

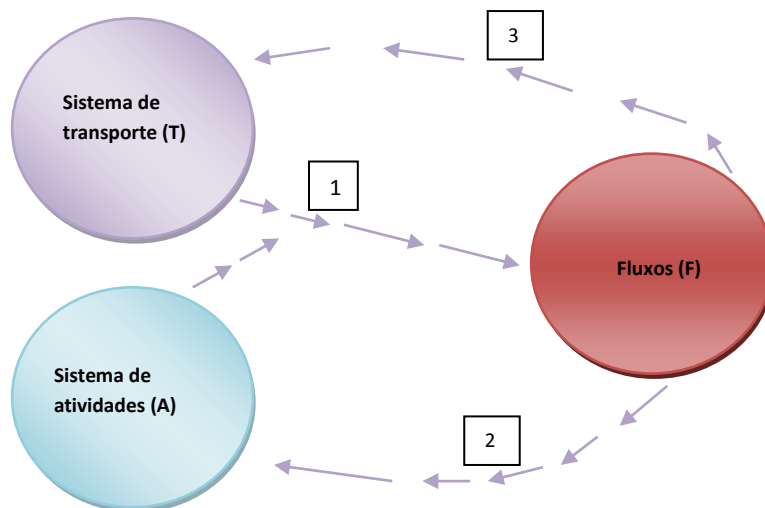
4. Planejamento de transporte de cargas

O presente capítulo tem como objetivo definir, de forma sucinta, o conceito sobre sistemas de transportes, bem como, abordar os principais modelos de tomada de decisões que são utilizados para otimizar tais sistemas. O capítulo trata, também, da formulação do modelo multimodal-multiproduto, o qual é utilizado no software STAN/ALOK.

4.1. Introdução aos sistemas de transportes

O sistema de transporte pode ser definido como sendo um conjunto integrado de atividades que envolvem os recursos humanos e materiais para o deslocamento da carga ao longo de um itinerário (D'agosto, 2008). Ou seja, o sistema de transporte é o meio que permite a disponibilidade de insumos para a produção e mercadorias em vários lugares, de forma atender as necessidades dos fornecedores e consumidores; sendo constituído por um número amplo de processos, os quais juntos possibilitam a realização das funções ao longo do sistema, por exemplo: armazenagem, transporte etc. (Lubis *et. al.* 2003).

O sistema pode ser definido por três variáveis básicas: i) sistema de transporte, ii) sistema de atividades, isto é, o padrão das atividades econômicas e sociais, iii) fluxos no sistema de transporte, ou seja, origens e destinos, rotas e volumes de mercadorias e pessoas que deslocam através do sistema (Manheim, 1979). A relação entre essas variáveis é melhor explicada por meio da Figura 8.



Fonte: Adaptado de Manheim, 1979.

Figura 8: Relação básica do sistema de transporte

Conforme a Figura 8 nota-se que, segundo Manheim (1979), o fluxo padrão [1] do sistema é determinado pelos sistemas de transporte e atividades. O fluxo padrão ocasionará mudanças ao longo do tempo no sistema de atividades [2], à medida que o serviço padrão de transporte oferecido e seus recursos forem utilizados. Tal padrão de fluxo, também, causará alterações ao longo do tempo no sistema de transporte [3], em resposta aos fluxos reais ou antecipados dos empresários ou do governo em desenvolver novos serviços de transportes ou novos produtos.

Segundo Harker, 1987; Tavasszy, 1996, apud Lubis *et. al.* 2003, a interação entre os agentes²⁴ com o sistema de transporte é dada através de suas reações individuais, as quais visam ajustar as suas necessidades às condições do sistema (capacidade, tarifa, disponibilidade do modo etc.). Os agentes envolvidos nesse processo, tais como os produtores, embarcadores, transportadores e o ²⁵governo, tomam as suas decisões, conforme a seguinte forma: i) **produtores**: decidem o local de produção e o preço dos produtos; ii) **consumidores**: decidem o volume e o tipo de mercadorias a ser compradas; iii) **embarcadores**: decidem a distribuição e a frequência da movimentação das mercadorias, as características do carregamento e o(s) modo(s) de transporte(s); iv) **transportadores**: executam as atividades de transporte, operando com um ou mais modos de transportes; v)

²⁴ Os tomadores de decisões dentro um sistema de transporte são definidos como agentes e identificados pelo meio de opções que eles selecionam (Harker, 1987 apud Lubis *et. al.*, 2003).

governo: regula o mercado através de legislação e provê a infraestrutura para o processo no sistema.

As decisões realizadas pelos agentes podem gerar, através dos incrementos de demanda, mudanças no sistema de transportes, fazendo com que o custo de movimentar bens e mercadorias aumente, devido à limitação do sistema em atender toda a demanda. Em consequência, os agentes envolvidos no sistema buscam minimizar os custos de escolha do modo mais eficiente do sistema de transporte, o que deverá permiti-lo movimentar mercadorias e serviços com o menor custo possível. Nesse sentido, faz-se necessário planejar a rede de transporte para que os agentes possam utilizá-la de forma eficiente. Para tanto, existem modelos os quais podem ser utilizados para o planejamento da rede; tais modelos buscam entender e prognosticar o comportamento da rede, levando em consideração fatores tais como: sociais, econômicos, políticos e tecnológicas (Crainic e Florian, 2008).

4.2. Modelos de Planejamento de Cargas

Os modelos de transporte de carga foram pouco abordados em decorrência da complexidade inerente a cada caso (Guélat *et. al.*, 1990). A necessidade de planejar o transporte de carga de forma mais eficiente, tanto no âmbito do setor privado quanto na esfera governamental, levou a uma acentuada demanda por tais modelos de rede. Desse modo, observa-se um sensível interesse por modelos de redes de transporte de cargas, que pudessem ser utilizados como ferramentas de apoio na tomada de decisão.

Houve, portanto, um aumento na oferta desses modelos por parte dos pesquisadores, os quais passaram a dar ênfase ao estudo de transportes de cargas (Carrilho e Leal, 2011). Exemplo disso são as pesquisas desenvolvidas pelo *Centre for Research on Transportation* (CRT), o qual tem contribuído significativamente para esse campo, uma vez que vêm desenvolvendo modelos e métodos para atividades de planejamento e transferido esses resultados para a prática, através da distribuição de *software* comercial (Crainic e Florian, 2008).

Esses modelos buscam representar um dado sistema de transporte multimodal com seus principais componentes e interações, de forma a realizar uma simulação do comportamento global do sistema. Ou seja, os modelos de

planejamento servem como uma ferramenta para planejar e/ou estimar cenários referentes às modificações em: *infraestrutura* (construção de um novo modal); *tecnologia* (melhoria em veículos/ melhoria na engenharia); *socioeconômicas* (aumento da população/ elevação do consumo/ realocação de indústria / exaustão de recursos); *política* (regulamentação das condições de trabalho/ taxa de consumo de energia / tarifas de barreiras) (Crainic e Florian, 2008).

Para tanto, as metodologias para construção desses modelos devem ser flexíveis e adaptáveis ao objetivo do estudo proposto, e abranger uma ampla faixa de dimensões geográficas de um país, ou um conjunto de regiões. Todavia, segundo Crainic e Florian (2008), não há uma única formulação dos modelos que possa abranger todo o sistema. O que se observa é uma metodologia composta por um conjunto de procedimentos, cujas etapas são: modelagem do fornecedor; modelagem da demanda; designação do fluxo e análise dos dados (Ibid., 2008).

4.2.1 Síntese dos modelos

Na literatura observa-se uma variedade de modelos de transporte de cargas convenientemente utilizados para cada situação. Esses modelos sofrem diversos arranjos em suas formulações, de modo a obter o melhor desempenho dos mesmos e solucionar o problema que se propõem. Cada modelo apresenta, portanto, características próprias. A Tabela 4 a seguir, sintetiza tais características e a evolução dos principais modelos de transporte de cargas até a concepção do modelo multimodal-multiproduto, desenvolvido pelos pesquisadores da Universidade de Montreal e a PUC-Rio. Tal modelo foi adotado por muitos países para o planejamento estratégico de transporte de cargas, tais como: Finlândia, Itália, Espanha, Alemanha, Reino Unido etc. Atualmente são 52 instituições em 18 países usando esse modelo (Crainic & Florian, 2008).

Tabela 4: Síntese dos principais modelos de transporte de cargas

Modelo	Ano	Autor(s)	Característica	Observações
Harvard-Brookings	1966	Roberts /Kresgre	- Primeiro modelo publicado para previsão de redes de transportes de cargas interurbana. Trata-se de um modelo simples, onde os links diretos representam a rede física.	- O modelo foi aprimorado em 1971 e utilizado na Colômbia para elaboração de um plano de desenvolvimento do sistema de transporte do país.
Peterson	1975	Peterson Fullerton e	- A formulação do modelo é baseada em um problema de programação matemática, cujo objetivo é minimizar as funções não-lineares de tempo de viagem sobre os arcos da rede, como sendo uma função dos fluxos agregados.	- Na modelagem foram utilizados alternativamente os princípios de comportamento de Wadrop para as decisões dos operadores de transporte. - A demanda por transporte é constante e são determinadas fora do modelo. É considerado apenas um tipo de produto e operador. - Para a solução do problema é usado o algoritmo de Frank-Wolf.
Transportation Network - TNM	1980	CACI Inc./Bronzini	- O Modelo de Redes teve como ênfase estudar a eficiência energética de diferentes modos de transporte intermunicipal, representando de forma mais detalhada os custos de energia em relação aos demais modelos.	- O modelo trabalha com equilíbrio de funções de custo agregado para todos os produtos, ao invés de produto diferenciado (Fernández e Cea, 1995). - O modelo inclui um submodelo de custos fixos e alocação mínima de rotas.
Spatial price equilibrium mode	1985	Harker e Friesz	- O modelo tem como objetivo determinar simultaneamente os fluxos de produtos entre regiões consumidoras e produtoras, bem como os níveis preço que satisfazem às condições de equilíbrio espacial. - Existe uma variabilidade desse modelo, como se observa nos trabalhos desenvolvidos por: Friesz et al., 1983; Harker e Friesz, 1986a, 1986b; Harker, 1987; Florian e Hearn, 1995; e Nagurney, 1993 (CRAMIC e KIM, 2007).	- O modelo possui restrições com uma estrutura de rede semelhante ao modelo de equilíbrio de tráfego. - Mesmo quando as funções de custos (oferta/demanda/transporte) do modelo não são separadas, o problema de equilíbrio espacial de preço pode ser convertido em um problema de equilíbrio de tráfego de rede.

Friesz, Gottfried e Morlok Model	1986	Friesz, Gottfried e Morlok	- Consiste em um modelo sequencial expedidor-transportador, em que é utilizada a combinação entre os dois critérios de otimização: o equilíbrio ótimo do sistema e do usuário.	- Devem ser feitas interações entre os dois níveis (<i>shippers-carriers</i>) para considerar os problemas de congestionamentos. Esses problemas foram gerados pela ausência de conhecimento dos custos reais na primeira alocação do submodelo dos carriers.
Multimodal Multi-product model	1989	Pesquisadores da Universidade de Montreal, PUC-Rio e GEIPOT	- O modelo considera os diferentes modos de transportes e produtos; - Seu objetivo é minimizar os custos totais; - Serve de instrumento para analisar o grau de otimização da rede e analisar a alternativa de investimentos, considerando o impacto nos custos totais de transporte ao nível da coletividade.	- É preciso obter informações sobre a estrutura da matriz insumo-produto e dados sobre a transferência dos produtos analisados, de forma a construir o modelo de demanda de produtos com base na matriz O-D. - É necessário, também, informações a respeito do lucro econômico dos transportadores, bem como a descrição exata da infraestrutura e serviços oferecidos. - O modelo STAN/ALOK inclui a restrição do fluxo de retorno dos veículos para origem.

Fonte: Carrilho e Leal, 2011.

Nota-se que os modelos são concebidos em ambientes diversificados e com objetivos distintos; eles estão intensamente ligados ao fenômeno de transporte correspondente a sua origem. Deste modo, tais fenômenos são tratados de forma diferente, pois eles usam metodologias que se adaptam ao objeto de estudo. A abordagem desses fenômenos através de redes físicas pode ser feita sob os seguintes pontos de vista: i) descritivo, que tenta reproduzir os padrões de comportamentos do fluxo de mercadorias; ii) normativo, que busca encontrar a melhor forma de utilização da infraestrutura de uma dada rede. A otimização em um modelo descritivo é aquela que tenta reproduzir o comportamento ótimo de cada usuário, o que resulta em um equilíbrio segundo o primeiro princípio de Wardrop. No caso do modelo normativo busca-se otimizar uma função para o sistema como um todo, de acordo com o segundo princípio de Wardrop chegando-se ao que se denomina “Ótimo do sistema”. O modelo multimodal multiproduto busca o ótimo do sistema segundo as características descritas na tabela 4.

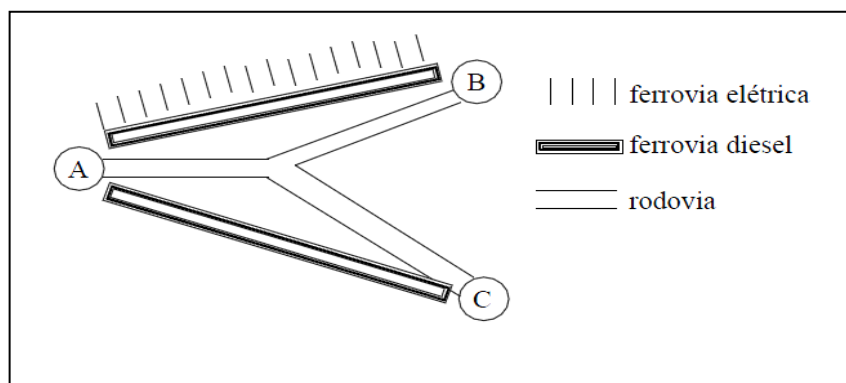
4.3. STAN/ALOK - Modelo multimodal-multiproduto de transporte de carga

O modelo STAN/ALOK é uma ferramenta que possibilita analisar o grau de otimização da rede e analisar a alternativa de investimentos, considerando o impacto nos custos totais de transporte ao nível da coletividade. Tal modelo utiliza, para a alocação, a rede que representa a infraestrutura de transportes do Brasil a qual é construída para os principais corredores de exportação com suas respectivas características tais como: modo de transporte, custo operacional do modo de transportes em cada tipo de via, capacidade da via e os principais nós de origem e destino (centroídes).

4.3.1 Representação da rede

O modelo de transporte de carga multimodal-multiproduto possui uma rede que suporta vários modos de transportes e produtos, considerando o produto como sendo um bem particular cujo fluxo é associado aos arcos que compõem a rede. Em relação aos modos, estes, são considerados na rede com suas próprias características, tais como: tipo, capacidade do veículo, função de custo específico (Pompermayer, 1997). Desde modo, a rede é construída por nós, arcos e modos, os quais representam as possibilidades de movimento na infraestrutura avaliada.

O modelo utilizado para definir os arcos é da forma (i, j, m) , onde i é o nó de origem, $i \in N$, N é o conjunto de nós da rede, j é o nó de destino, $j \in N$, e m é o modo associado ao arco, $m \in M$, onde M é o conjunto de modos disponíveis na rede (Ibid., 1997). Os arcos paralelos são usados na representação no caso em que mais de um modo de transporte é usado para transferir produtos entre dois nós adjacentes. Um simples esboço da rede é proposto por Guélat *et. al.* (1990) para justificar tal escolha na modelagem de rede. Tal esboço (Figura 9) consiste em três modos: transporte rodoviário, ferroviário a diesel e ferroviário elétrico.



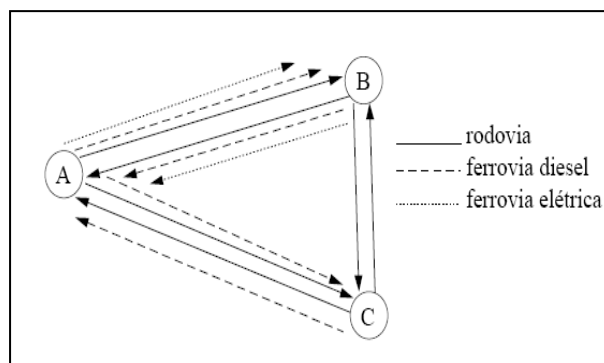
Fonte: GUÉLAT *et. al.*, 1990.

Figura 9: Rede Física (primeira proposta)

De acordo com a Figura 9, nota-se que as cidades A e B estão conectadas a todos os modos disponíveis na rede, já as cidades A e C, têm apenas disponível o transporte ferroviário a diesel e rodovia, enquanto que entre B e C, existe, apenas, rodovia. De forma a simplificar tal apresentação, não são permitidas transferências intermodais. Uma versão menos detalhada dessa rede é a conexão de todas as cidades, por arcos, direcionados considerando os modos de transporte como atributos dos arcos. Desse modo, o arco (A, B) possui todos os meios de transportes permitidos; no arco (A, C), os modos, ferrovia (diesel e elétrica) e rodoviários, já o arco (B,C) tem disponível, apenas, o modo rodoviário.

Todavia, de acordo com Guélat *et. al.* (1990), esta representação possui uma grande desvantagem no atual modelo, pois, se um fluxo único é associado com um determinado *link*, este deve apenas representar o fluxo total sobre a ligação, e os fluxos específicos de cada modo de transporte não são mantidos de forma explícita (Pompermayer, 1997). Além disso, as características físicas inerentes de cada infraestrutura modelada não são explicitadas neste tipo de apresentação. O mesmo problema ocorrerá para os fluxos de cada modo ao especificar as funções de custo e de atraso (Ibid., 1997).

Para solucionar tais desvantagens, faz-se necessário escolher uma representação de rede que permita, claramente, a identificação dos fluxos de bens, por modo, bem como das funções de custo e de atraso para cada modo de transporte. Para tanto, uma alternativa para superar tal problema é usar arcos paralelos entre cada nó, sendo um para cada modo permitido, como se pode observar na Figura 9.

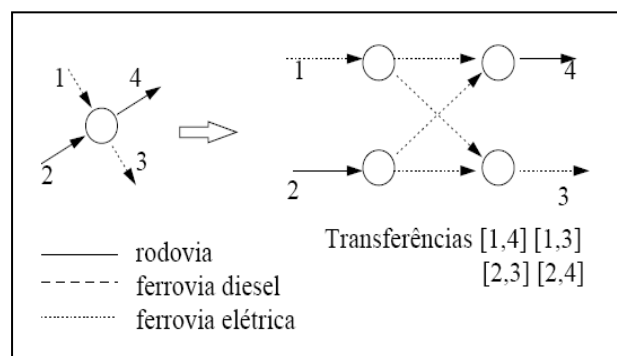


Fonte: GUÉLAT *et. al.*, 1990.

Figura 10: Rede Física (segunda proposta)

Neste modelo apresentado (Figura 10), nota-se que a rede assemelha-se com a rede física real, uma vez que as infraestruturas, ferroviárias e rodoviárias, fisicamente diferentes, são explicitadas no modelo. Entretanto, como destaca Guélat *et. al.* (1990), os arcos paralelos inseridos podem conduzir a dificuldades de implementação dos algoritmos de redes. Todavia, uma forma de solucionar tal impasse é fazer com que os arcos paralelos, entre os nós adjacentes, os quais representam os modos, sejam estruturalmente diferentes. Isto, portanto, é alcançado definindo o arco como sendo uma tríade (origem, destino e modo) (Pompermayer, 1997).

Uma vez definida a representação da rede a ser usada, o próximo passo é modelar as transferências intermodais. Para isso, deve-se determinar e associar os custos e atrasos apropriados para as transferências entre os modos, em certos nós da rede. Para tanto, faz-se a expansão (explosão) do nó, onde ocorrem as transferências, pela adição de tantos nós, quantos sejam os arcos entrando ou saindo do nó, e pela adição de arcos de transferências, entre estes nós, para constituir um grafo “bipartido”, como demonstra a Figura 11 (Ibid., 1997).

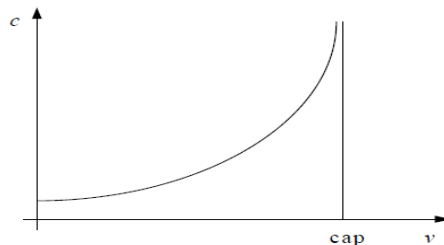


Fonte: GUÉLAT *et. al.*, 1990.

Figura 11: Rede Física (terceira proposta)

A explosão dos nós faz com que os mesmos sejam explicitados, aumentando o número de arcos na rede. Por sua vez, os novos nós inseridos não representariam mais a rede física, e os arcos de transferências tornar-se-iam multimodais em vez de monos-modais. Tal representação escolhida para transferências não exige a modificação explícita da rede, sendo essas transferências representadas, perfeitamente declaradas, por um par de arcos, um chegando e o outro saindo. Dessa forma, os arcos de transferências não são inseridos à rede básica, sendo facilmente as transferências transmitidas em cada nó, representadas ou listadas, fazendo-se apenas referências aos pares de arcos.

Um aspecto que deve ser levantado, segundo Pompermayer (1997), é a forma pela qual a capacidade dos arcos deverá ser trabalhada nesta representação. Neste caso, a capacidade do arco, diferentemente de outros modelos como, por exemplo, modelo de fluxo máximo, será um atributo de cada arco, não sendo uma componente explícita na apresentação. Para isso, a capacidade será inserida na função custo do arco, onde o valor de fluxo ao se aproximar da capacidade do arco, elevará, fazendo com que a utilização desse arco torne-se proibitiva.



Fonte: Pompermayer, 1997.

Gráfico 14 - Relação entre o custo e a capacidade de um arco

O Gráfico 14 ilustra a relação mantida entre o custo de transferir um determinado produto em um dado arco, e o custo correlacionado com a sua capacidade. A curva que mostra o volume que passa no arco (v) apresenta o aumento do fluxo de volume do arco que é utilizado de sua capacidade, elevando-se os custos de transferência. À medida que os arcos vão atingindo a sua capacidade (cap) a utilização torna-se inviável devido ao alto custo envolvido.

4.3.2. Formulação do modelo multimodal-multiproduto (ótimo do sistema)²⁶

A formulação do modelo multimodal-multiproduto é baseado no objetivo de minimizar os custos totais, servindo de instrumento para analisar o grau de otimização da rede e indicar alternativas de possíveis investimentos, considerando o impacto nos custos totais de transporte ao nível da coletividade. Neste modelo, o conceito de custos é interpretado de forma generalizada, no sentido de que poderá ter diferentes componentes, tais como: custo monetário, custo de atraso, consumo de energia, entre outros (Pompermayer, 1997).

A rede considerada no modelo consiste em um conjunto de nós N , em um conjunto de arcos A , onde $A \subseteq N \times N$, um conjunto de modos M e um conjunto de transferências T , onde $T \subseteq A \times A$. Define-se, para cada conjunto, as cardinalidades n_N , n_A , n_M , n_T , respectivamente. Para cada arco a , $a \in A$, é associada uma função $s_a(\cdot)$, a qual depende dos volumes de bens no arco, ou possivelmente, do volume de bens nos outros arcos da rede. Semelhante, a função de custos $s_t(\cdot)$ ²⁷ é associada com cada transferência t , $t \in T$.

²⁶ Foi usado como referencia para a descrição do modelo multimodal-multiproduto o trabalho realizado por Pompermayer, 1997.

²⁷ função de custo da transferência t .

Os produtos transportados na rede multimodal são denominados pelo índice p , $p \in P$, onde P , é o conjunto de todos os produtos considerados, com a sua cardinalidade n_p . Cada produto é enviado das origens o , $o \in N$, para destinos d , $d \in D \subseteq N$, na rede considerada. A demanda por cada produto e para todos os pares de origem e destino (O/D) é especificada pelo conjunto de matrizes (O/D) para os subconjuntos correspondentes de modos. É suposto que a escolha do modo é determinada fora do modelo (Pompermayer, 1997). Seja $g^{m(p)}$ a matriz de demanda associada a um produto $p \in P$, onde $m(p)$ é um subconjunto de modos, que pertencem a $m(p)$, que, por sua vez, é o conjunto de todos os subconjuntos de modos, que são utilizados, para transportar o produto p . Dessa forma, se desejado alocar uma dada matriz em alguns modos específicos, basta definir o subconjunto $m(p)$ associado a esta matriz com os modos desejados (Ibid., 1997).

$$v^p = \begin{pmatrix} v_a^p, & a \in A \\ v_t^p, & t \in T \end{pmatrix} \quad (1.0)$$

O conjunto de fluxos do produto p , na rede multimodal, é denominado por v^p , e consiste dos fluxos induzidos por estes produtos sobre os arcos v_a^p e as transferências, v_t^p . O fluxo de todos os produtos, na rede multimodal, é representado por $v = v^p$, $p \in P$, que é um vetor de dimensões $n^{p*}(n_A \times n_T)$.

As funções com o custo médio $s_a^p(v)$, nos arcos, e $s_t^p(v)$, nas transferências, são dependentes de um dado vetor de fluxos v . Mais logo, esta condição de dependência de um vetor de fluxos v será relaxada, permanecendo o custo de um dado arco dependente apenas do fluxo neste arco. As funções de custo médio por produto são denotadas, de forma similar à notação usada para o fluxo v^p , por $p \in P$, onde:

$$s^p = \begin{pmatrix} s_a^p, & a \in A \\ s_t^p, & t \in T \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

onde:

$$s = s_a^p, p \in P, \text{ é um vetor } np(n_a \times n_t). \quad (1.3)$$

O custo total do fluxo no arco a , $a \in A$, para o produto p , $p \in P$, é o produto $s_a^p(v)x v_a^p$; o custo total do fluxo na transferência t , $t \in T$, é $s_t^p(v)x v_t^p$. O custo total dos fluxos de todos os produtos sobre a rede multimodal é a função de F que deve ser minimizada.

$$F = \sum_{p \in P} \left(\sum_{a \in A} s_a^p(v) x v_a^p + \sum_{t \in T} s_t^p(v) x v_t^p \right) (s(v)^t v) \quad (1.4)$$

Sobre o conjunto de fluxos que satisfaça as restrições de conservação de fluxo e não negatividade. Para descrever estas restrições, a seguinte notação será usada. Seja $K_{od}^{m(p)}$ o conjunto de caminhos que partem da origem o , $o \in O$, para o destino d , $d \in D$, usando somente os modos de $m(p) \in M(P)$, $p \in P$. Seja $g_{od}^{m(p)}$ o fluxo entre a origem o e o destino d , que pode utilizar os modos $m(p)$.

Com isso, as equações de conservação dos fluxos são:

$$\sum_{k \in K_{od}^{m(p)}} h_k = g_{od}^{m(p)} \quad o \in O, d \in D, m(p) \in M(p), p \in P \quad (1.5)$$

s.a.:

$$h_k \geq 0, k \in K_{od}^{m(p)}, o \in O, d \in D, p \in P \quad (1.6)$$

Seja Ω o conjunto de fluxos de satisfaz (1.2) e (1.4). A relação entre fluxos nos arcos e fluxos nos caminhos é dada por:

$$v_a^p = \sum_{k \in K^p} \delta_{ak} h_k \quad a \in A, p \in P \quad (1.7)$$

onde:

$$K^p = \bigcup_{m(p) \in M(P)} \bigcup_{o \in O} \bigcup_{d \in D} K_{od}^{m(p)}$$

é o conjunto de todos os caminhos que podem ser usados pelo produto p , e

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in k \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Que indica se o arco a está no caminho k . Similarmente, os fluxos nas transferências são:

$$v_t^p = \sum_{k \in K^p} \delta_{tk} h_k, \quad t \in T, p \in P \quad (1.8)$$

A transferência t está no caminho k se os dois arcos que definem a transferência estão neste caminho. Em síntese, o modelo de alocação multimodal-multiproduto com ótimo do sistema consiste em minimizar (1.4) sujeito (1.5) e (1.6) com as restrições de definição (1.7) e (1.8).

De acordo com Pompermayer (1997), este modelo pode ser adaptado a diferentes modos de especificação de demanda. A escolha do modo de transportes pode ser feita, *a priori*, no modelo, bastando definir o conjunto de modos $m(p)$, onde a demanda deve ser alocada, com os modos escolhidos. O modelo apresenta também, flexibilidade na especificação de movimentos intermodais. As transferências podem ser restringidas a ocorrerem somente em nós específicos da rede, e apenas entre modos específicos.

4.3.3 Ótimo do sistema

São apresentadas a seguir, as condições de otimalidade para o problema de equilíbrio de fluxos em redes para o caso de ótimo do sistema. De forma a exemplificar o entendimento, será analisado o problema sem transferências e para um só produto, omitindo-se os índices p e $m(p)$. A função a minimizar, portanto, é:

$$\text{Min } F(v) = \sum_{a \in A} s_a(v) v_a \quad (1.9)$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_{od}} h_k - g_{od} \\ h_k \geq 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$v_a = \sum_{k \in K} \delta_{ak} h_k \quad (1.11)$$

Aplicando Kuhn-Tucker, as restrições (1.9) e (1.10) terão as variáveis duais associadas μ_{od} e λ_k respectivamente. Observando uma componente K do gradiente tem-se:

$$\frac{\partial F(v)}{\partial h_k} = \sum_{a \in A} \frac{\partial F(v)}{\partial v_a} \cdot \frac{\partial v_a}{\partial h_k} \quad (1.12)$$

Mas

$$\frac{\partial v_a}{\partial h_k} = \delta_{ak}$$

Então

$$\frac{\partial F(v)}{\partial h_k} = \sum_{a \in A} \frac{\partial F(v)}{\partial v_a} \times \delta_{ak}$$

Como

$$F_a = s_a(v) v_a$$

$$\frac{\partial F(v)}{\partial v_a} = s_a(v) + \frac{\partial s_a(v)}{\partial v_a} \times v_a = \overline{C_a(v)} \Rightarrow \text{custo marginal do arco } a$$

Assim

$$\frac{\partial F(v)}{\partial h_k} = \sum_{a \in A} \delta_{ak} \cdot \overline{C_a(v)} = c_k$$

Condição de Kuhn-Tucker para o caminho k

$$\nabla F = \mu_{od} - \lambda_k = 0 \quad (1.13)$$

$$\overline{c_k} - \mu_{od} - \lambda_k = 0 \quad (1.14)$$

Como μ_{od} está sempre ativa, pois $g_{od} - \sum_k h_k = 0$, tem-se

$$\begin{cases} \text{se } h_k > 0 \rightarrow \lambda_k = 0 \text{ e } \overline{c_k} = \mu_{od} \\ \text{se } h_k = 0 \rightarrow \lambda_k \geq 0 \text{ e } \overline{c_k} \geq \mu_{od} \end{cases}$$

Ou seja, se o caminho k é utilizado, o custo marginal do caminho k , $\bar{c}_k$ é mínimo e igual a μ_{od} ; e, caso o caminho não seja utilizado, seu custo marginal é maior ou igual a μ_{od} , e maior ou igual ao custo marginal dos caminhos utilizados.

4.3.4. Algoritmo de Solução

Para implementar o algoritmo, o problema deverá ser formulado de uma forma compacta como:

$$\text{Min } F(v), \text{ sujeito a } v \in \Omega \quad (1.15)$$

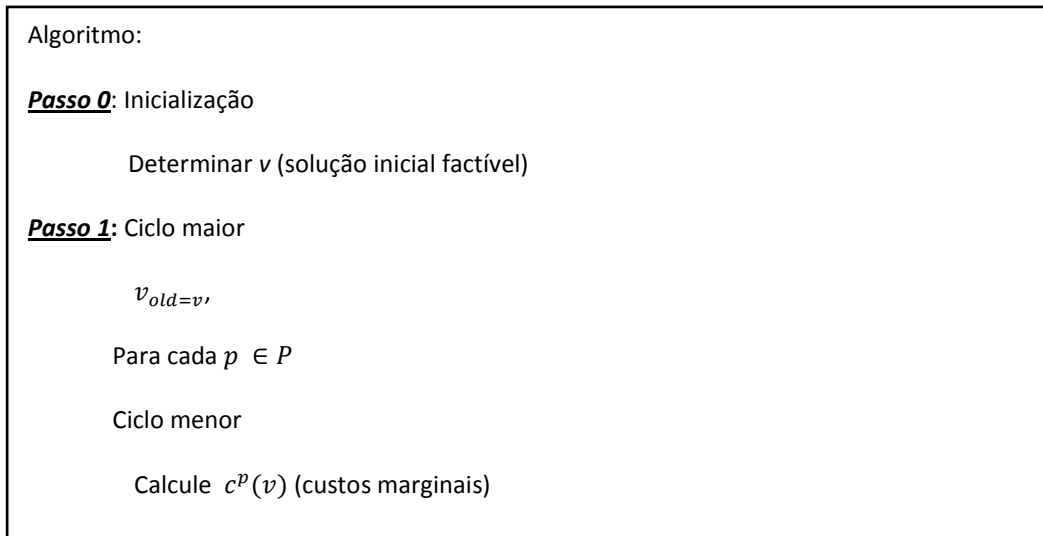
Desde que as restrições (1.5) a (1.7) sejam lineares, Ω é um politopo que, se a rede multimodal é fortemente conectada, é não vazio. Ou seja, se a rede multimodal é totalmente conectada, existirão caminhos conectados aos nós de origem e destino. Ômega é compacto, significa que, se as funções de custo são estritamente positivas, os caminhos considerados não contêm ciclos (Guélet *apud* Pompermayer, 1997). Caso as funções de custo pudessem assumir valores negativos, poderiam existir ciclos em que a soma dos custos de seus arcos seja negativa. Portanto, haveriam caminhos com custo infinitamente negativo.

A função $F(v)$ é considerada como sendo uma função convexa e diferencial em um espaço aberto que contenha Ω . Tais suposições são contentadas, por exemplo, através de funções de custo médio para os arcos ou transferências do tipo:

$$s_a^p = \sum_i \alpha_i (\beta_i + v_a^p)^{z^{(i)}}, \quad \alpha_i > 0, \beta_i > 0, 0 \leq z^{(i)} < \infty \quad (1.16)$$

A estrutura do modelo sugere uma decomposição natural do produto. A direção de descida do método de aproximação, que neste caso seria F^p ($F = \sum_{p=1}^{n_p} F^p$); o que resulta em resolver n_p subproblemas em um ciclo do algoritmo. Para cada produto p , uma direção de descida é calculada para v_p que é de dimensão $(n_A + n_T)$. Uma vez que um produto é considerado, todas as variáveis de fluxo pertinentes aos demais produtos permanecem com seus valores prévios. Com base nesses volumes fixos durante toda a interação, o próximo ciclo maior é

processado calculando-se os custos vigentes na interação $c_0^p(v)$ e novos fluxos para cada produto. A seguir é demonstrado o algoritmo (Figura 7).



Fonte: Pompermayer, 1997.

Figura 12: Algoritmo do Modelo de Alocação Multimodal Multiproduto

Destaca-se que no ciclo menor do algoritmo é realizada uma interação do método de aproximação linear no subespaço de fluxos relacionado ao produto p . Uma direção de descida é encontrada pela minimização de aproximação linear de F^p em Ω^p , que é dada pela seguinte expressão abaixo (Pompermayer, 1997):

$$\text{Min } \nabla F^p(v)y, \text{ sujeito a, sujeito } y \in \Omega^p \quad (1.17)$$

Desde que $F^p(v) = s(v)^t v$, então $\nabla F^p(v) = s(v)^t + v^T s'(v)$. Define-se o custo marginal como $c(v) = s'(v)^T v$. O subproblema de programação linear é:

$$\text{Min } c^p(v)^T y, \text{ sujeito a } y \in \Omega^p \quad (1.18)$$

O que vem ser é o problema de caminho mínimo com custos marginais separáveis por origem e destino ($O-D$). A solução deste problema é obtida pela alocação da demanda $g^{m(p)}$ nos caminhos de custo mínimo entre cada par de

origem-destino, computados com os custos nos arcos $c^p(v)$ (custos marginais), respeitando os modos definidos por $m(p)$. Para isto, dentro do algoritmo deve-se determinar as rotas de custo mínimo entre cada para $O-D$, baseadas nos custos marginais dos arcos e transferências. Por seguinte, deve-se fazer uma alocação tudo ou nada nestas rotas de custo mínimo, para obter a direção de descida (Pompermayer, 1997).

O tamanho ótimo do passo λ_p é obtido pela minimização unidimensional de F na direção $(0, \dots, d^{pT}, \dots, 0)^T$ a não ser que $c^p(v)^T d^p = 0$, caso em que $\lambda_p = 0$. Uma solução inicial pode ser obtida executando o ciclo menor com custos marginais iniciais correspondentes a fluxo zero $v=0$, isto é $c(0)$ e fazendo $\lambda_p = 1$ em cada ciclo menor. O presente algoritmo irá parar quando os fluxos v não sofrerem modificações após a execução de um ciclo maior. Assim sendo, a solução encontrada será ótima. Na prática, o algoritmo poderá ser parado após executar um número predeterminado de ciclos maiores ou após um tempo máximo de execução (Ibid., 1997). Dado a suposta convexidade da função objetivo F , pode-se construir um critério de parada baseado no “gap relativo” GR.

$$RG = 100 * \frac{F(v) - BLB(v)}{F(v)} \quad (1.19)$$

$BLV(v)$ representa o melhor limite inferior obtido durante os ciclos maiores anteriores. Este limite inferior em uma solução ótima $F(v^*)$ é dado por $F(v) + \nabla F(v)(y^* - v)$, aonde y^* é a solução ótima do problema acima, não podendo ser calculado através do uso de caminhos mínimos determinados em cada ciclo menor, pois requer a solução de tantos problemas de caminho mínimo quantas forem as matrizes $O-D$ $g^{m(p)}$.