

5

Modelo Proposto

5.1

Modelo de Previsão da Volatilidade por Redes Neurais Artificiais

Na literatura são propostos vários modelos para previsão da volatilidade entre paramétricos e não paramétricos, considerando inclusive características estocásticas (ex. modelos de suavização exponencial EWMA, volatilidade condicional: ARCH, GARCH, EGARCH e modelos de volatilidade estocástica). O EWMA e o GARCH são os métodos mais utilizados por investidores (Sinclair, 2008).

Este trabalho se propôs explorar as características de uma rede neural, como a sua capacidade de observar dependências e relações não lineares entre as variáveis de entrada, para identificar uma melhor relação entre a volatilidade ocorrida no passado e a expectativa de volatilidade futura.

Redes neurais são aproximadoras universais de funções e, se bem treinadas, com uma configuração de neurônios satisfatória e dada uma quantidade suficiente de dados, teoricamente, podem resolver qualquer problema complexo de aproximação não linear. Essa habilidade, a imensidade de dados para treinamento existente, em um histórico de anos de cotação de ações, e a complexidade de se desenvolver uma formulação matemática direta que simule o comportamento dos preços do mercado torna a rede neural, com aprendizado supervisionado, um modelo mais que apropriado para resolver tal problema. Os modelos utilizados atualmente não modelam tão bem o comportamento dos preços dos ativos.

Foi verificado na seção anterior que a volatilidade tem uma tendência a reverter a média e que ela é melhor explicada pelo histórico mais recente de volatilidades do que por um mais longo, porém a utilização de uma volatilidade histórica longa e outra curta conseguem melhor descrever a volatilidade futura do que cada uma delas separadamente. Todas essas observações foram levadas em conta na escolha das variáveis de entrada.

Após diversos testes e exaustivas simulações, testando diversas configurações diferentes de entradas e estruturas de neurônios em uma e duas camadas escondidas, foram escolhidas 23 variáveis de entrada, destas, 12 correspondendo ao cone de volatilidade anualizado (Apêndice 3), formado com o histórico dos últimos seis meses da volatilidade realizada no mercado para o ativo analisado, sendo o cone formado pelas volatilidades calculadas para 15 dias, 30 dias, 45 dias e 60 dias. Para a formação do cone foi utilizada a volatilidade máxima, mínima e a média realizada nos últimos seis meses para cada período de cálculo acima. Os outros valores utilizados como entrada para a rede foram: as volatilidades dos últimos oito dias (são oito variáveis com uma base de cálculo de dias para trás, igual ao período de cálculo pra frente da previsão futura desejada); o número de dias úteis dividido por 252^{14} ($\text{DiasUteis}/252$); a previsão da volatilidade calculada por GARCH; e a previsão da volatilidade calculada por EWMA. A rede possui uma única saída que é a previsão de volatilidade futura anualizada do ativo (Figura 25).

O cone de volatilidade nos mostra a média para diferentes períodos de cálculo da volatilidade, tanto mais curtos quanto mais longos, bem como nos define limites máximos esperados de oscilação. As volatilidades realizadas nos últimos dias nos dão uma base de como ela tem se comportado recentemente e a previsão por EWMA e GARCH são os benchmarks da rede de como o mercado pode estar precificando essa volatilidade, pois a mesma pode ser influenciada pelos interesses de grandes investidores.

Uma RNA foi desenvolvida para previsão da volatilidade futura do período de 10/03/2009 a 30/07/2010 para todos os ativos listados no capítulo anterior. Chamaremos essa rede de RNA Múltiplos Ativos. A melhor configuração de rede encontrada no período de treinamento (01/01/2005 a 09/03/2009), após uma busca exaustiva, foi com uma camada intermediária/oculta de dez neurônios, Levenberg-Marquardt Backpropagation como algoritmo de aprendizado, Tangente Sigmóide como função de ativação dos neurônios e EQM (Erro Quadrático Médio) e o MAPE (*Mean Absolut Percentage Error*) como funções de desempenho das saídas.

¹⁴ 252 representa o número de dias úteis em 1 ano.

Uma segunda rede com as mesmas características da RNA anterior foi desenvolvida, treinada e testada para um ativo específico, sendo este VALE5¹⁵, ativo com maior volume de operações na BOVESPA e que tem maior liquidez no mercado de opções, para testar se a RNA aprenderia melhor as características de um ativo específico ao invés de uma média do mercado. Chamaremos esta rede de RNA de VALE5

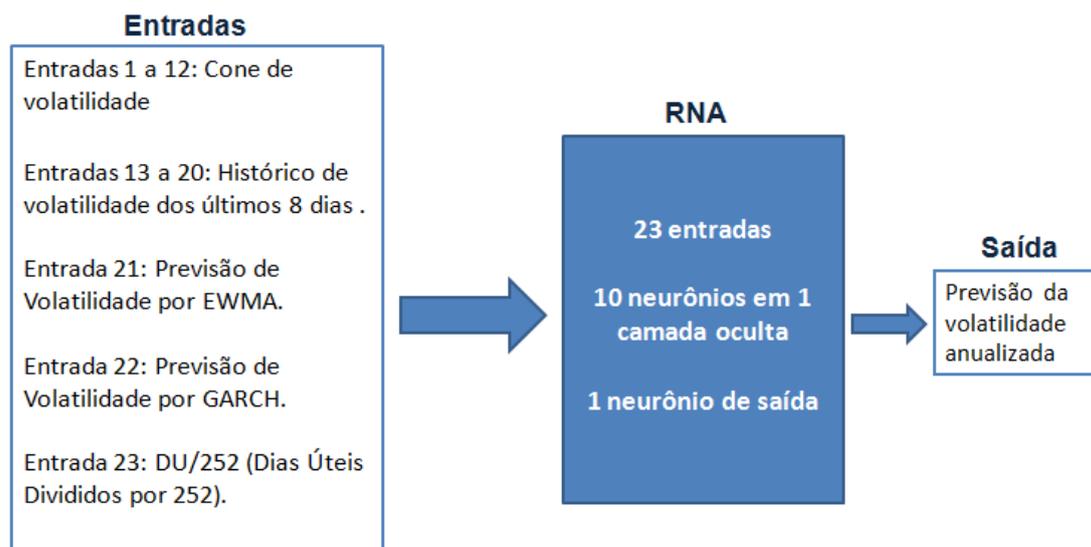


Figura 25 – Esquema da Rede Neural Artificial Utilizada neste Trabalho

5.2

Modelo de Otimização de Carteiras/Estratégias com Opções Financeiras por Algoritmos Genéticos

O problema que este modelo objetiva é a de um investidor que com um ativo e n opções, calls e puts, sobre este ativo, deve decidir como alocar o seu capital, de tal forma a maximizar seus objetivos em um período pré-definido, com data de vencimento.

No instante inicial, o investidor não dispõe de nenhuma aplicação de risco, tendo todo o seu capital disponível rendendo CDI (aplicação livre de risco com rentabilidade garantida) e por meio de um modelo matemático e probabilístico de

¹⁵ VALE5 é o código de negociação das ações preferenciais da Companhia Vale do Rio Doce.

tomada de decisão ele montará uma carteira com o objetivo de obter rentabilidades maiores que o CDI com o menor risco possível.

A escolha e análise de diferentes combinações de carteiras com opções e ativo, torna-se um problema complexo quanto ao tamanho do espaço de busca, devido ao grande número de opções de diferentes tipos (call ou put), possibilidade de assumir uma posição comprada ou vendida, a quantidade negociada de cada opção, o número de opções a serem utilizadas e os diferentes Preços de Exercício (strikes) que podem ser utilizados na estratégia. Tendo em vista que no mercado real não há limites para o número de opções a serem utilizadas na carteira, pode-se solicitar junto a bolsa de valores a criação de opções com novos preços de exercício e as quantidades “operadas” poderem ser números reais. Existem infinitas soluções possíveis, necessitando então da utilização de um método de busca e otimização para resolver o problema de forma eficiente.

Tem-se como proposta a utilização de algoritmos genéticos na Otimização de carteiras com opções no mercado acionário brasileiro, a fim de aumentar o potencial de retorno de um investimento, minimizando seus riscos e aumentando a probabilidade de lucro.

O apreçamento das opções na data inicial foi realizado seguindo o modelo de BLACK-SCHOLES (1973), que depende dos fatores: preço de exercício, preço do ativo, taxa livre de risco, volatilidade do ativo e tempo até o vencimento. A volatilidade do ativo foi o resultado da previsão realizada pela RNA, descrita no tópico anterior. Foi considerado que a taxa CDI representa a taxa livre de risco do mercado e qualquer resultado abaixo dessa taxa é considerado negativo e abaixo do RMA (Retorno mínimo aceitável), essa taxa é uma interpolação da taxa média esperada do CDI no período e é assumida como constante durante o período de investimento.

Na Tabela 1 tem-se um exemplo de cenário de mercado definido com o valor atual do ativo, o número de dias úteis para o vencimento da estratégia, a taxa CDI média do período e a volatilidade anualizada prevista para o período de 15 dias. Com esse cenário utilizou-se o modelo de BLACK-SCHOLES (1973) para precificar uma série de opções, conforme demonstrado na Tabela 1. Para o caso de opções precificadas em R\$ 0,00 (conforme alguns casos da Tabela 1) considerou-se que elas valem R\$0,01 para compra, já que nenhuma contraparte no mercado venderia uma opção por R\$0,00.

Tabela 1 – Tabela com cenário de mercado e precificação das opções disponíveis nesse cenário.

Cenário de Mercado		Lista de opções Disponíveis para a elaboração da carteira					
Preço do Ativo	43,00	Tipo	Strike	Preço Justo	Tipo	Strike	Preço Justo
Dias Úteis da Estratégia	15	CALL	34,00	9,23	PUT	34,00	0,00
Taxa CDI ao ano	12,00%	CALL	35,00	8,24	PUT	35,00	0,00
Volatilidade Prevista	20,00%	CALL	36,00	7,24	PUT	36,00	0,00
		CALL	37,00	6,25	PUT	37,00	0,00
		CALL	38,00	5,26	PUT	38,00	0,00
		CALL	39,00	4,27	PUT	39,00	0,01
		CALL	40,00	3,31	PUT	40,00	0,04
		CALL	41,00	2,41	PUT	41,00	0,14
		CALL	42,00	1,62	PUT	42,00	0,34
		CALL	43,00	0,99	PUT	43,00	0,70
		CALL	44,00	0,54	PUT	44,00	1,24
		CALL	45,00	0,26	PUT	45,00	1,96
		CALL	46,00	0,11	PUT	46,00	2,80
		CALL	47,00	0,04	PUT	47,00	3,73
		CALL	48,00	0,01	PUT	48,00	4,69
		CALL	49,00	0,00	PUT	49,00	5,67
		CALL	50,00	0,00	PUT	50,00	6,66
		CALL	51,00	0,00	PUT	51,00	7,66
		CALL	52,00	0,00	PUT	52,00	8,65

Com finalidade de exemplificar a construção de uma carteira, utilizando-se do cenário da Tabela 1, montou-se uma carteira aleatória com seis opções de strikes diferentes, todas do tipo Call e o ativo-objeto dessas opções. Os possíveis resultados financeiros (*payoffs*) da carteira na data de horizonte (data de vencimento das opções) já são conhecidos de antemão e são função única e exclusiva do valor do ativo nesta data. A probabilidade do ativo se encontrar em determinado patamar de preço na data do vencimento é definido pela função densidade acumulada da distribuição normal (Figura 27). Na Tabela 2 pode-se ver a composição desta carteira de exemplo, com suas opções e ativo e o gráfico de *payoff* na data de vencimento (Figura 26), que varia de acordo com o preço que o ativo se encontrar nessa data. Observa-se que a carteira terá resultado positivo, acima do RMA, entre os valores de R\$41,00 e R\$47,00 para o ativo na data de vencimento. Cabe destacar que a probabilidade do ativo se encontrar nessa faixa de preços onde a carteira obtém resultado satisfatório é muito alta.

Tabela 2 – Exemplo de carteira com opções e ativo

Exemplo de Carteira

TIPO	Strike	Posição	Quantidade
CALL	40,00	Vendido	3
CALL	41,00	Vendido	2
CALL	42,00	Vendido	1
CALL	46,00	Vendido	1
CALL	47,00	Vendido	2
CALL	48,00	Vendido	3
ATIVO		Comprado	6

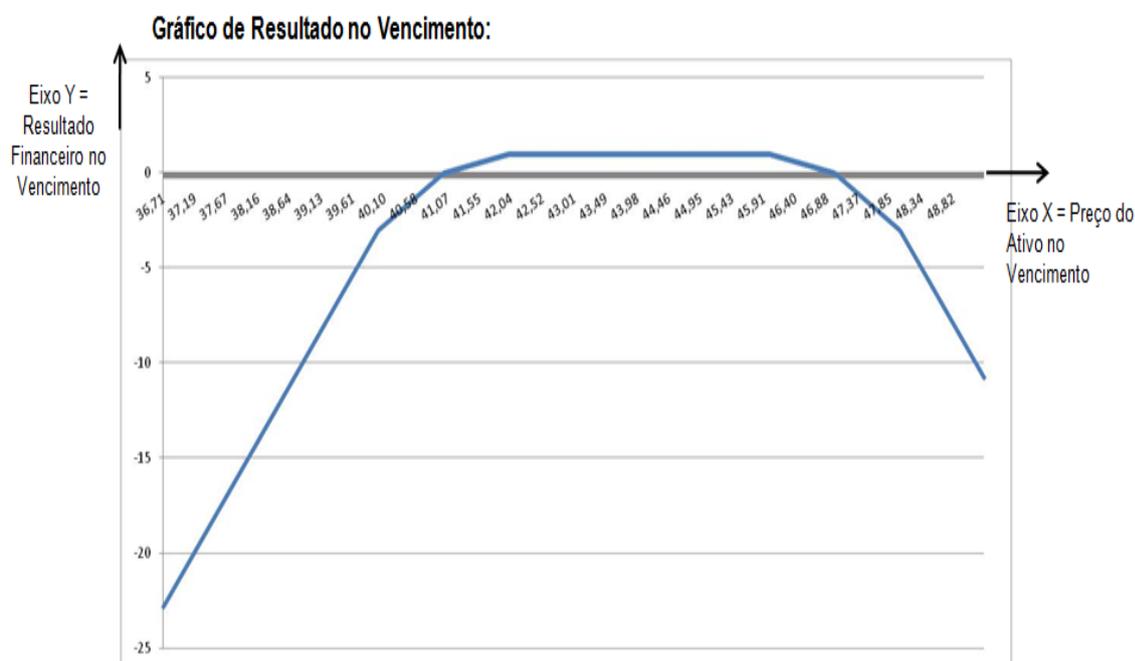


Figura 26 – Payoff da carteira exemplo no vencimento.

A curva de *payoff* da Figura 26, como se pode observar, poderia ser avaliada até o valor R\$0,00 para a esquerda do eixo X e até infinito para a direita do eixo X, mas como não se pode precificar a carteira até o infinito, precisa-se definir um limitador para ambos os lados de oscilação máxima do ativo. Assim, definiu-se 3 desvios padrões como limites máximos de oscilação da média¹⁶, para ambos os lados, como o espaço onde a carteira é avaliada. De acordo com a curva da distribuição normal¹⁷, há em torno de 99,7% de probabilidade de que o ativo permaneça dentro dessa faixa de oscilação.

¹⁶ A média da distribuição de retornos é o preço atual do ativo levado até a data do vencimento pela taxa do CDI no período.

¹⁷ Este trabalho considera que os ativos analisados seguem uma distribuição normal nos retornos.

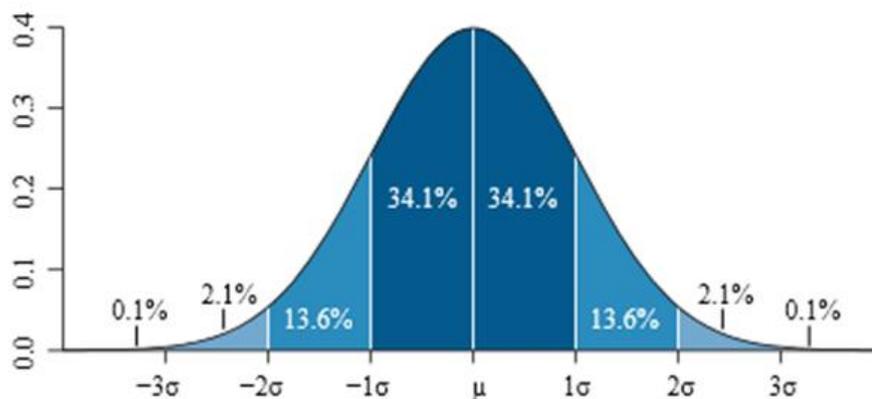


Figura 27 – Curva da Distribuição Normal, com suas probabilidades.

Para otimizar uma carteira com formato descrito nesta seção, precisa-se de uma representação matemática para a mesma, para isso desenvolveu-se um cromossoma que possa ser geneticamente evoluído

5.2.1

Cromossoma

Devido a impossibilidade de se calcular um número infinito de opções, este trabalho considera um máximo de 10 opções diferentes e um ativo para a construção da carteira. Trabalhar com um máximo de dez opções não é uma limitação do modelo e sim um valor máximo escolhido para os estudos realizados neste trabalho.

Para a otimização por Algoritmos Genéticos desenvolveu-se um cromossoma (Figura 28) que representasse a carteira, constituído de 42 variáveis. Para cada uma das 10 opções tem-se o Preço de Exercício, o tipo (call ou put), a posição (comprado ou vendido) e a quantidade¹⁸; para o ativo tem-se a posição e a quantidade. Um total de 19 strikes foram disponibilizados para elaboração do cromossoma. Por análise combinatória chegou-se a um total de $7,7^{19} \approx 4 * 2^{64}$ combinações possíveis de carteiras, com as restrições impostas, o que justifica a utilização dessa técnica de computação evolucionária para auxiliar na resolução do problema.

¹⁸ A quantidade é representada por um número inteiro de zero a dez q significa a proporção entre cada uma das opções e não a quantidade absoluta.

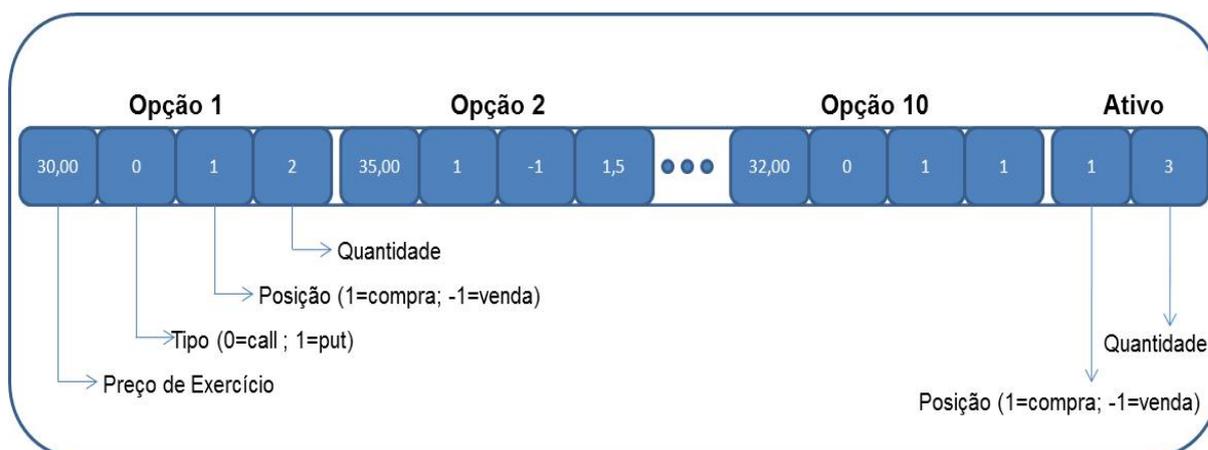


Figura 28 – Representação do Modelo de Cromossoma Utilizado

5.2.2

Função Objetivo

O estudo do problema de alocação ótima de ativos em uma carteira de investimentos é um tema muito frequente de estudos nas áreas de finanças. Como elaborado na seção 2.8 deste trabalho, várias métricas foram desenvolvidas ao longo dos anos de tal forma que grandes avanços foram alcançados desde o trabalho publicado por Markowitz, descrito na bibliografia (Markowitz, 2001).

Para avaliar uma carteira, como é a proposta neste trabalho, precisa-se analisar o conjunto formado pelas opções com o ativo. A teoria de Markowitz leva em consideração somente ativos financeiros com um longo histórico de retornos, não podendo ser calculada para derivativos e opções financeiras com um curto período de vida. Não faz sentido também se calcular as correlações entre as opções e o ativo devido às características implícitas de cada opção que faz com que as correlações mudem com o passar do tempo e com a variação do preço do ativo e da percepção de risco do mercado

O Índice de Sharpe, bem como os outros índices¹⁹ enunciados na seção 2.8 são baseados em valores históricos e só podem ser utilizados para avaliar carteiras com um razoável histórico de rentabilidade, não permitindo uma análise de uma carteira com derivativos recém “criados” como a proposta deste trabalho.

Desenvolveu-se então três diferentes Funções-Objetivo com o intuito de maximizar o “espaço” de ganho, aumentando a probabilidade de lucro.

¹⁹ Índice de Sortino, Índice de Calmar e Índice de Sterling.

5.2.3

Função Probabilidade Máxima

Esta função objetivo visa somente obter a maior probabilidade de lucro, sem levar em consideração medidas de risco, Eq. (36). Na Figura 29 pode-se ver uma representação gráfica da função.

$$F = \text{Probabilidade de Lucro} \quad \text{Eq. (36)}$$

Onde a probabilidade de lucro é calculada pela função densidade da distribuição normal.

No exemplo da Figura 29 o resultado da função é a probabilidade do ativo se encontrar entre X_1 e X_2 ; Prob de Lucro Total = $P(X_1 < x < X_2)$; onde x é o preço do ativo no vencimento. Considera-se Lucro quando o resultado é acima do RMA (Retorno Mínimo Aceitável). L_1 e L_2 são os limites extremos de oscilação do ativo, que definem três desvios padrão de oscilação, até onde a carteira é avaliada.

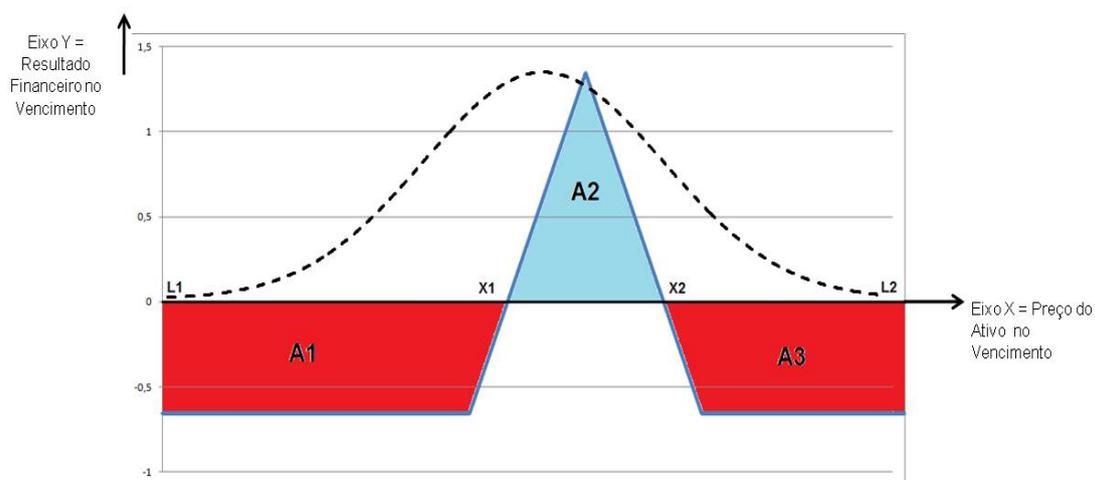


Figura 29 – Representação Gráfica da “Função Probabilidade Máxima” no Vencimento da carteira

5.2.4

Função Área Total

Esta função objetivo analisa a área total de lucro (no gráfico de *payoff*) multiplicado pela probabilidade total de se obter lucro dividido pela área total de prejuízo multiplicado pela probabilidade total de se obter um prejuízo, como demonstrado na Eq. (37). Pode-se melhor entender este conceito pela Figura 30.

Onde a probabilidade é calculada pela função densidade da distribuição normal. L1 e L2 são os limites extremos de oscilação do ativo, que definem três desvios padrão de oscilação, até onde a carteira é avaliada.

$$F = \frac{\text{Probabilidade de Lucro Total} * \text{Area com Lucro}}{\text{Probabilidade de Prejuízo Total} * \text{Area com Prejuízo}} \quad \text{Eq. (37)}$$

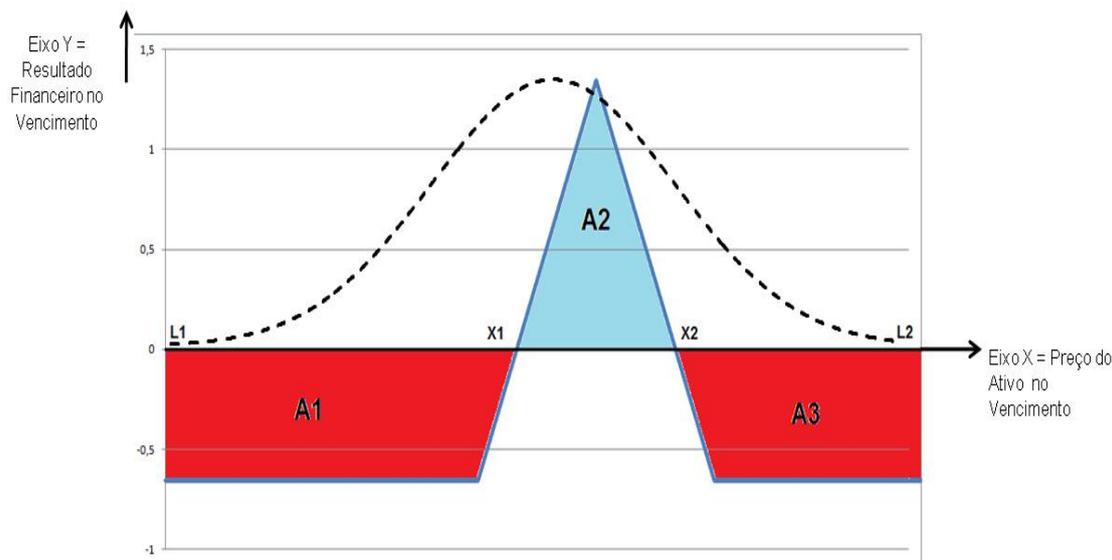


Figura 30 – Representação Gráfica da “Função Area Total” no Vencimento da carteira

Onde A2 é a área com lucro e a área com prejuízo é a soma de A1 com A3. A Probabilidade de Lucro Total é a probabilidade do ativo se encontrar entre X1 e X2 no vencimento. A Probabilidade de Prejuízo Total é a probabilidade do ativo se encontrar entre L1 e X1 no vencimento mais a probabilidade do ativo se encontrar entre X2 e L2 no vencimento. Tem-se então a Eq. (38) para o exemplo da Figura 30

$$F = \frac{P(X1 < x < X2) * A2}{[P(L1 \leq x < X1) + P(X2 < x \leq L2)] * (A1 + A3)} \quad \text{Eq. (38)}$$

5.2.5

Função Omega

A função Omega, já descrita neste trabalho na seção 2.8.3, foi a terceira função objetivo selecionada para avaliar carteiras com opções financeiras e ativo-objeto. Como o objetivo é avaliar carteiras “novas”, sem histórico de

rentabilidades, não se tem uma distribuição de retornos históricos para utilizar, porém como se sabe a distribuição de probabilidade dos retornos do ativo, conseguimos mensurar de antemão exatamente o retorno da carteira em cada patamar de preço do ativo. Considera-se esta, de todas descritas na seção 2.8, a função que melhor se encaixa no objetivo proposto. A Eq. (39) descreve de forma mais simples o modo de cálculo desta função.

$$F = \frac{\sum_{i=1}^N (R_i * P_i)}{\sum_{j=1}^M (R_j * P_j)} \quad \text{Eq. (39)}$$

Onde:

R é um resultado financeiro da carteira.

P é a probabilidade do ativo alcançar um patamar de preço no vencimento.

i é valor do ativo no vencimento, tal que R_i é um resultado positivo (acima do RMA).

N é o conjunto de valores do ativo no vencimento, tal que R_i é um resultado positivo (acima do RMA).

j é valor do ativo no vencimento, tal que R_j é um resultado negativo (abaixo do RMA).

M é o conjunto de valores do ativo no vencimento, tal que R_j é um resultado negativo (abaixo do RMA).

Onde a probabilidade é calculada pela função densidade da distribuição normal. L_1 e L_2 são os limites extremos de oscilação do ativo, que definem três desvios padrão de oscilação, até onde a carteira é avaliada.

Na Figura 31 pode-se ver um exemplo gráfico do resultado de uma carteira no vencimento. Tem-se então Eq. (40) abaixo para o cálculo deste exemplo.

$$F = \frac{\sum_{i=10}^{13} (R_i * P(x = x_i))}{\sum_{i=1}^9 (R_i * P(x = x_i)) + \sum_{i=14}^{19} (R_i * P(x = x_i))} \quad \text{Eq. (40)}$$

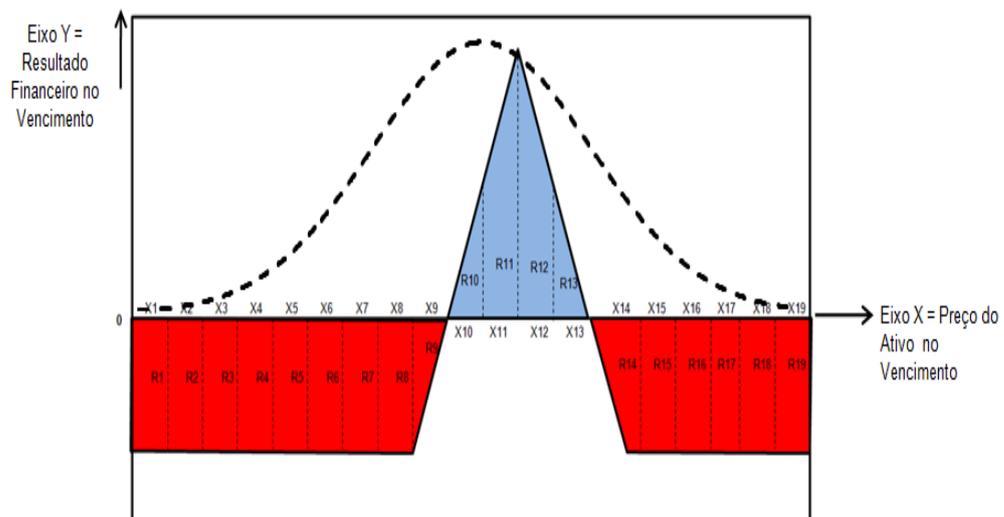


Figura 31 – Representação Gráfica da “Função Omega” no Vencimento da carteira