

Referências bibliográficas

ALBUQUERQUE, N.R. **Derivativos (Demonstrações)**. Notas de aula da disciplina “Matemática para Derivativos”, ministrada pelo prof. Tara Baydia. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial. Rio de Janeiro, 2007, 1º. Semestre, 34p.

ALMEIDA, M.F.L. **Sustentabilidade Corporativa, Inovação Tecnológica e Planejamento Adaptativo**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial. Rio de Janeiro, 2006, 259p.

AMRAM, M.; KULATILAKA, N. **Real Options – Managing Strategic Investment in an Uncertain World**. Harvard business Scholl Press, Boston, MA, USA, 1999, 246 pp.

BACHELIER, L. **Theory of Speculation**. p[10], pp 17-78, in cootner, 1900.

BARROS, M. **Processos Estocásticos**. Papel Virtual Editora, Rio de Janeiro, 2004.

BATISTA, F.R.S. et al. **Avaliação dos Métodos de Grant, Vora & Weeks e dos Mínimos Quadrados na Determinação do Valor Incremental do Mercado de Carbono nos Projetos de Geração de Energia Elétrica no Brasil**. Pesq. Oper. [online], vol.31, n.1, pp. 135-155. ISSN 0101-7438, 2011.

BERNSTEIN, L.P. **Desafio aos Deuses – A Fascinante História do Risco**. Ed. Campus, Rio de Janeiro, 1997.

BEWLEY, T.F. **Knightian Decision Theory, Part I**. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale university. Cowles Foundation Paper no. 1053. New Haven, Connecticut, 2003.

BLACK, F.; SCHOLES, M. **The Pricing of options and Corporate Liabilities**. The Journal of Political Economy, Vol.81, No.3, 1973.

BOX, G.E.P; JENKINS, G.M. **Time Series Analysis Forecasting and Control**. Ed. San Francisco: Holden-Day, 1976.

BREALEY, R.A; MYERS, S.C. **Principles of Corporate Finance**. Boston: McGraw-Hill, Inc., sixth ed., 1999, 1093 p.

CHOQUET, G. **Theory of Capacities**. Ann. Inst. Fourier, 5: 131-295, 1953.

COIMBRA-LISBÔA, P.C.; **On The contamination of Confidence**. Tese de Doutorado em Economia. Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas – EPGE-FGV. Rio de Janeiro, 2009, 115p.

COIMBRA-LISBÔA, P.C.; GONÇALVES, E. **Arbitrage Theorems Under Knightian Uncertainty**, versão preliminar, [S.I;s.n],2006.

COIMBRA-LISBÔA P.C.; WERLANG, S. **Uma Introdução à Escolha Individual Sob Incerteza Knightiana**, notas de aula do curso sobre Teoria dos Jogos, primeira parte. EPGE/FGV, Rio de Janeiro, 2008.

COPELAND, T. AND ANTIKAROV V. **Real Options – A Practitioner's Guide**. TEXERE, NY, USA, 2001.

CONSTANTINIDES, G.M.; MALLIARIS, G. **Options Markets: An Integrative Approach**, [s.n], 2000.

COX, J.C.; ROSS, S.A; RUBINSTEIN, M. **Option Pricing: A Simplified Approach**. Journal of Financial Economics, vol. 7, 1979, p.229-263.

CRESPO, C. F. S. **Avaliação do Impacto Econômico de um projeto de Pesquisa e Desenvolvimento no valor de uma planta Gas-to-Liquids usando a Teoria das Opções Reais**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

DANEMBERG, J.H. (Org.). **Manual de Análise Empresarial de Projetos de Investimento**. Petrobras, Ed. 2003, Relatório Interno.

DAVIS, G.A.; OWENS, B. **Optimizing The Level Of Renewable Electric R&D Expenditures Using Real Options Analysis**. Energy Policy, 31, 2003.

DELLACHARIE, C. (1972). **Capacités et Processus Stochastiques**. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

DEMPSTER, A. **Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping**. Annals Mathematical Statistics, 38, 205-247. 1967.

DIAS, M.A.G. **Opções Reais Híbridas com Aplicações em Petróleo**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial. Rio de Janeiro, 2005, 509p.

_____. **Opções Reais para a Análise de Investimentos sob Incertezas com Aplicações em P&D**. Apresentação em PowerPoint, Petrobras, Cenpes, 2005.

DIXIT, A.K.; PINDYCK, R.S. **Investment under Uncertainty**. Princeton University Press, Princeton, N.J., USA, 1994.

DOW, J.; WERLANG, S. R. C. **Uncertainty Aversion, Risk Aversion, and the Optimal Choice of Portfolio**. Econometrica, 60: 197-204, 1992.

ELLSBERG, D. **Risk, Ambiguity and the Savage Axioms**. Quarterly Journal of Economics, 75: 643-669, 1961.

FAULKNER, T.W. **Applying “Option Thinking” To R&D Valuation**. Research Technology Management, 39, 3 ABI/INFORM Global pg.50, 1996.

GESKE, R. **The Valuation of Compound Options**. Journal of Financial Economics. no. 7, pp. 63-81, 1979.

GILBOA, I. **Expected Utility Theory with Purely Subjective Non-Additive Probabilities**. Journal of Mathematical Economics, 16: 65-88, 1987.

———. **Theory of Decision under Uncertainty**. Cambridge University Press, New York, 2009.

GILBOA, I.; SCHMEIDLER, D. **Maxmin Expected Utility with Non-unique Prior**. Journal of Mathematical Economics, 18: 141-153, 1989.

HASENCLEVER, L.; KUPFER, D. (Org.). **Economia Industrial, Fundamentos Teóricos e Práticas no Brasil**. Campus, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.

HAYES, R.H.; GARVIN, D. **Managing Our Way to Economic Decline**. Harvard Business Review, maio/junho, pp. 67-77, 1980.

———. **Managing as if Tomorrow Mattered**. Harvard Business Review, julho/agosto, vol 60, pp. 71-79, 1982.

HEREATH, H.S.B.; PARK, C.S. **Economic Analysis of R&D Projects: An Options Approach**. The Engineering Economist, v.44, n.1, p-135, 1999.

HUCHZERMEIER, A. AND LOCH, C. H. **Project management under risk: Using real options approach to evaluate flexibility in R&D**. Management Science, 47, 85-101, 2001.

HULL, J.C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Third-Edition, 1997. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 572p.

IBGE-FINEP. **Pesquisa de inovação Tecnológica – PINTEC**. IBGE, 2008, Rio de Janeiro. ISBN 978-85-240-4149-5, 159p.

KEMMA, A.G.Z. **Case Studies on Real Options**. Financial Management, Autumn, pp-259-270, 1993.

KNIGHT, F. **Risk, Uncertainty and Profit**. Boston: Houghton Mifflin, 1921.

LEITE, L.A.M. **Tributação e Inovação na Indústria de Petróleo e Gás Natural do Brasil: Uma Caracterização do Processo de P&D e Avaliação setorial da política Nacional de Incentivos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense (UFF), Centro de Estudos Sociais Aplicados, Pós-Graduação em Economia. Niterói, (2005), 101p.

LUHERMAN, T. **Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on The Numbers**. Harvard Business Review, Julho/Agosto, 1998.

MEDINA, H.V.; NAVEIRO, R.M. **Materiais Avançados: Novos Produtos e Novos Processos na Indústria Automobilística**. Prod., vol.8, no.1, p.29-44. ISSN 0103-6513, 1998.

MIRANDA, J.A. **Avaliação dos Resultados do processo Tecnológico na Petrobras**. Relatório interno, Petrobras-Cenpes, 1996.

———. **Metodologia de Avaliação dos Resultados dos Processos Tecnológicos na Petrobras**. Relatório interno, Petrobras-Cenpes, 2001.

MORRIS, P.A.; TEISBERG, E.; KOLBE, A.L. **When Choosing R&D Projects, Go With Long Shots**. Research Technology Management, 34,1; Janeiro/Fevereiro, 1991.

MUN, J. **Real options Analysis – Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions.** John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2006.

MYERS, S.C. **Determinants of Corporate Borrowing.** Journal of Financial Economics. Nov. 1977.

NOVAES, A.G.N.S.; SOUZA, J.C. **A Real Options Approach to a Classical Capacity Expansion Problem.** Pesq. Oper., vol. 25, no. 2, p 159-181. ISSN 0101-7438, 2005.

NEVES, C. **Avaliação de um Investimento em Pesquisa Adicional num Novo Processo de Produção: Considerações Metodológicas e uma Aplicação.** Prod., vol.2, no.2, p.145-155. ISSN 0103-6513, 1992.

NEUMANN, J.V.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behaviour.** Princeton: Princeton University Press, 1944.

OTC. **Offshore Technology Conference Distinguished Achievement Awards for Companies, Organizations and Institutions.** Disponível em: http://www.otcnet.org/pages/awards/awards_corp.php, acesso em: outubro/2011.

PAXON, D.A. **Real R&D Options.** Butterworth-Heinemann (Elsevier Science), Burlington, MA, USA, 2003.

PETROBRAS. **Manual de Análise Empresarial de Projetos de Investimento.** Petrobras, Estratégia Corporativa, Ed. 2011, Relatório Interno.

PETROBRAS – CENPES et al. **Desenvolvimento de Metodologia para a Avaliação de Projetos de P&D Baseada na Teoria das Opções Reais – Relatório Final.** Relatório técnico de projeto de P&D concluído. Petrobras-Cenpes, Rio de Janeiro, 2008.

ROSENMUELLER, M. **On Core and Value.** Methods of Operations Research, 9: 84-104, 1971.

———. **Some Properties of Convex Set Functions, Part II.** Methods of Operations Research, 17: 287-307, 1972.

ROUSSEL, P., SAAD, K.N.; BOHLIN, N. **Pesquisa & Desenvolvimento, Como Integrar P&D ao Plano Estratégico e Operacional das Empresas Como Fator de Produtividade e Competitividade.** Makron Books, São Paulo, 1992.

SAMANEZ, C.P. **Gestão de Investimentos e Geração de Valor.** Pearson Prentice Hall, São Paulo, Brasil, 2007.

SAMUELSON, P. **Rational Theory of Warrant Price.** Industrial Management Review, 6, 13-31, 1965.

SANTIAGO, L. P.; BIFANO, T.G. **Management of R&D projects under uncertainty: A multidimensional approach to managerial flexibility.** IEEE Transactions on Engineering Management, 52, 269-280, 2005.

SANTIAGO, L.P.; VAKILI, P. **On the Value of Flexibility in R&D Projects.** Management Science, 51, 1206 – 1218, 2005.

SANTOS, E.M.; PAMPLONA, E. **Teoria das Opções Reais: A Aplicação em Pesquisa e Desenvolvimento (P&D)**. Segundo Encontro Brasileiro de Finanças, IBMEC, Rio de Janeiro, 2002.

SAVAGE, L.J. **The Foundations of Statistics**. New York: John Wiley. (Second Edition, 1972, New York: Dove, 1954.

SCHWARTZ, E.S. **Patents and R&D as Real Options**. Anderson School at UCLA. Los Angeles, CA, USA, 2001.

SCHMEIDLER, D. **Subjective Probability and Expected Utility without Additivity**. CARESS, Working Paper, 84-112, 1982.

———. **Subjective Probability and Expected Utility without Additivity**. *Econometrica*, 57, 571-587, 1989.

SHAFER, G. A. **Mathematical Theory of Evidence**. Princeton University Press, 1976.

SHAPLEY, L.S. **Cores of convex Games**. *International Journal of Game Theory*, 1:11-26, 1972.

SILVA, T.A.O.; SANTIAGO, L.P. **New Product Development Projects Evaluation Under Time Uncertainty**. *Pesq. Oper.*, vol. 29, no.3, p 517-532. ISSN 0101-7438, 2009.

SIMONSEN, M.H.; WERLANG, S.R.C. **Subadditive probabilities and Portfolio Inertia**. *Revista de Econometria*, v,XI, n.1,p.1-19, 1991.

SOUZA, R.C.; CAMARGO, M.E. **Análise e Previsão de Séries Temporais**. Gráfica e Editora Regional, Rio de Janeiro, 2004.

STUORI, R. **Metodologia de Descrição de Cenários**. Instituto SAGRES – Política e gestão Estratégica Aplicadas, [S.I.], 2008.

TRIGEORGIS, L. **Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. The MIT Press. Cambridge, 1996.

Apêndices e Anexos

As notas 7.1, 7.2 e 7.3 foram transcritas de Albuquerque(2007). A nota 7.4 foi transcrita de Dias(2005a) e a 7.5 de Coimbra-Lisboa & Werlang (2008.)

7.1

Demonstração da fórmula de “Black-Scholes-Merton”

MODELO “BLACK-SCHOLES-MERTON”



O preço do instrumento subjacente a S_t segue o **Movimento Geométrico Browniano** - MGB com constante μ (*drift*) e volatilidade σ , segundo:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Hipóteses adotadas:

- É possível negociar uma opção de compra subjacente a carteira;
- Não há oportunidades de arbitragem;
- A negociação da carteira é contínua;
- Não há custos da transação ou impostos;
- Todas as ações são perfeitamente divisíveis (*e.g.* é possível comprar um $1/n$ avos da ação);
- É possível tomar ou emprestar dinheiro a uma taxa livre risco constante.

A PDE (Partial Differential Equation)

Dado as suposições do modelo "*Black-Scholes-Merton*", o preço de um derivativo $V_{(S, t)}$ escrito em uma carteira (grupo de ações) com o preço S_t evolui de acordo com a seguinte equação diferencial parcial (PDE):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Equação Padrão de

B&S&M.

Nota-se que o PDE acima não contém μ , o 'drift' da carteira. Uma solução informal do PDE, explicando este resultado, é dada a seguir.

Solução Informal

A equação anterior conduz à seguinte fórmula para o preço da Opção de Compra $C(S, T)$ (caso particular de derivativo $V_{(S, t)}$) com valor de exercício K em um estoque negociado atualmente ao preço S , i.e., o direito para comprar uma parte do estoque ao valor K no tempo T . A taxa de juros constante é r , e a constante de volatilidade do estoque é σ .

$$C(S, T) = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \quad \text{Onde;}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Estes são também escritos de forma mnemônica como:

$$d_{\pm} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

(onde $d_+ = d_1$ e $d_- = d_2$). Nota-se que Φ é função de distribuição normal padrão cumulativo do tipo:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

DERIVAÇÃO DA PDE

Dados as suposições modelo anterior, nós supomos que a carteira segue o Movimento Geométrico Browniano. Isto é,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad \text{Onde } W_t \text{ é Browniano.}$$

Suponhamos que V seja algum derivativo sobre S - matematicamente V é uma função de S e t .

$V(S, t)$ é o valor da opção no tempo t se o preço do estoque subjacente no tempo t é S . Sabemos que o valor da opção amadurece no instante T . Para determinar seu valor em uma época mais adiante nós necessitamos saber como o valor evoluiu enquanto seguimos no tempo.

Suponha um "portfolio" composto de Ativos S e m kits de V , onde V são opções em S .

$\Pi = S_t + mV_{s,t}$ onde S é o ativo subjacente e V opções lastreada por S
definimos uma variação do portfólio como: $d\Pi = dS_t + mdV_{s,t}$

supondo um portfólio neutro ao risco $d\Pi = r_f \Pi dt \therefore \frac{d\Pi}{dt} = r_f \Pi$

que tem como solução: $d\Pi = e^{r_f t}$

Igualando as duas equações: $v \quad \boxed{rf \Pi dt = dS + mdV} \quad (1),$

O lado esquerdo é determinístico, mas o lado direito não. A idéia é transformar as variáveis estocásticas do lado direito em variáveis determinísticas.

A partir do Lema de Ito (Anexo 7.2), assumindo que V é C^2 (continuamente diferenciável até a segunda derivada) e que V segue Movimento Geométrico Browniano – GMB. Então

$$mdV = m \left(\frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{dV}{dt} dt \right); \quad \text{Juntando os termos de } dS$$

$$= m \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + m \frac{dV}{dt} dt$$

$$dS^2 = (\mu S dt + \sigma S dW)^2$$

$$= (\mu^2 S^2 dt^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dW + \sigma^2 S^2 dW^2)$$

Como demonstrado em **Lema**

Ito (mais adiante), $dt^2 \rightarrow 0$ e $dt dW \rightarrow 0$ e $dW^2 \rightarrow dt$, logo a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$mdV = m \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + m \frac{\partial V}{\partial t} dt, \text{ voltando ao desenvolvimento}$$

origina, em (1)l:

$$rf \Pi dt = dS + m \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + m \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

$$= \underbrace{\left(1 + m \frac{\partial V}{\partial S}\right)}_{1^a} dS + \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + m \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

A primeira parcela à direita da equação é estocástica, logo precisamos neutralizar isso fazendo $1 + m \frac{\partial V}{\partial S} = 0$; então $m = -\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial S}} \therefore m = -\frac{\partial S}{\partial V}$, o que anula a parcela estocástica dessa equação.

$$rf \Pi dt = \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + m \frac{\partial V}{\partial t} dt, \text{ como definimos que } \Pi = S_t + mV_{s,t}$$

$$rf(S_t + mV_{s,t}) dt = \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + m \frac{\partial V}{\partial t} dt, \text{ simplificando e colocando}$$

todas as variáveis no lado esquerdo da equação:

$$\frac{1}{2} m \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + m \frac{\partial V}{\partial t} dt - r_f S dt - r_f m V dt = 0, \text{ cortando } dt;$$

$$\frac{1}{2} m \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + m \frac{\partial V}{\partial t} - r_f S - r_f m V = 0, \text{ simplificando } m;$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{m} r_f S - r_f V = 0, \text{ considerando que } \frac{1}{m} = -\frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}_I + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{II} + \underbrace{r_f S \frac{\partial V}{\partial S}}_{III} - \underbrace{r_f V}_{IV} = 0, \quad \text{como na demonstração}$$

anterior.

Solução do PDE "Black-Scholes" (Abordagem por Fourier)

Mostramos agora como obter a solução da Equação Diferencial Parcial - PDE geral de *Black-Scholes* numa avaliação específica para uma opção.

Considere como um exemplo segundo a equação de *Black-Scholes* do preço de opção de compra - **V** subjacente a um estoque de ações que vale atualmente o preço **S**. A opção tem um preço de exercício **K**, no tempo **T** futuro; i.e., o direito de comprar o lote de ações ao preço K. A taxa de juros constante é **r_f** e a taxa constante de volatilidade da carteira é igual a **σ**.

Para uma opção compra o PDE acima tem condições de contorno sendo;

$$V(0, t), \text{ para todo } t;$$

$$V(S, t) \rightarrow 0, \text{ quando } S \rightarrow \infty;$$

$$V(S, T) = \max(S_T - K, 0), \text{ pelo Contrato}$$

A última restrição dá o valor da opção no instante do exercício. A solução do PDE dá o valor da opção ao longo do tempo. Para fim resolver o PDE nós transformamos a PDE de B&S&M em uma equação conhecida como equação da difusão do calor, a qual pode ser resolvida usando método padrão. Nesse ponto, introduzimos a transformação de variável das variáveis:

Nosso alvo é obter uma solução de uma EDP que se assemelhe a equação padrão da termodinâmica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c \frac{\partial f}{\partial t}$$

Procuraremos então uma solução com a seguinte forma:

$$V(S, t) = e^{(r(T-t))} f^*(u, s), \text{ onde } T \rightarrow \text{instante de exercício da opção.}$$

Primeira Etapa.

Primeira mudança de variáveis:

$$S = K e^g \Rightarrow g = \ln(S/K)$$

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{1/K}{S/K} = \frac{1}{S} \quad (\text{mv1}) \quad t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \Rightarrow \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

Desenvolvendo a derivada de V em relação a S $\rightarrow \frac{\partial V}{\partial S}$

$$V(S, t) \Rightarrow V\left(Ke^g, T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}\right) = V^\#(g, \tau) \text{ desejo que essa função seja do tipo } \Rightarrow k \hat{V}(g, \tau).$$

Derivando V em S, obtemos:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = k \frac{\partial \hat{V}}{\partial S} \xrightarrow{\text{cadeia}} k \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial S}, \text{ como } \frac{\partial g}{\partial S} = \frac{1}{S}, \text{ então}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = k \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \frac{1}{S}, \text{ onde } S = k e^g \text{ (por definição na criação das variáveis). Logo:}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = k \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \frac{1}{k} e^{-g} \xrightarrow[\text{k}]{\text{simplificando}} \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} e^{-g}$$

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} e^{-g}} \quad (t1)$$

Observando na parte **III** da EDP vemos que: $r_f S \underbrace{\frac{\partial V}{\partial S}}_{\text{III}}$

$$r_f S \frac{\partial V}{\partial S} = r_f S \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} e^{-g} \Rightarrow r_f \underbrace{K e^g}_S e^{-g} \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \Rightarrow r_f K \frac{\partial \hat{V}}{\partial g}, \text{ que representa a parcela}$$

III (terceira) da EDP original.

Agora vamos avaliar a transformação da parcela **I** (primeira), ou seja,

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}_I$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{\partial V}{\partial S} \right], \text{ onde } \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} e^{-g}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{\partial \hat{V}}{\partial g} e^{-g} \right] \xrightarrow{\text{regra do produto}} \underbrace{\frac{\partial e^{-g}}{\partial S}}_a \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} + e^{-g} \underbrace{\frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right]}_b;$$

$$(a) \rightarrow \frac{\partial e^{-g}}{\partial S} \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} = \frac{\partial e^{-g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial S} \frac{\partial \hat{V}}{\partial g}$$

$$(b) \rightarrow e^{-g} \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right] = e^{-g} \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{\partial \hat{V}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial g} \right] = e^{-g} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} \frac{\partial g}{\partial S}$$

Simplificando (a), onde em (t1) temos que $\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} e^{-g}$, logo

$$\boxed{\frac{\partial \hat{V}}{\partial g} = \frac{\partial V}{\partial S} e^g},$$

$$\boxed{\frac{\partial e^{-g}}{\partial g} = -e^{-g}};$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{1}{S} = \frac{1}{K} e^{-g}}$$

$$(a) \frac{\partial e^{-g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial S} \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} = -e^{-g} \frac{1}{K} e^{-g} \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} = -\frac{1}{K} e^{-2g} \frac{\partial \hat{V}}{\partial g}$$

Simplificando (b), temos $\frac{1}{K} e^{-2g} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2}$, onde (a) + (b)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \left(-\frac{1}{K} e^{-2g} \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right) + \left(\frac{1}{K} e^{-2g} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} \right) = \frac{1}{K} e^{-2g} \left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} - \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{1}{K} e^{-2g} \left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} - \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right)}$$

O primeiro termo da EDP original: $\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, substituindo as transformações já obtidas:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(\frac{1}{K} e^{-2g} \left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} - \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right) \right), \text{ como } S = K e^g ; \\ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{1}{2}\sigma^2 (K e^g)^2 \left(\frac{1}{K} e^{-2g} \left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} - \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{K} e^{-2g} \left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} - \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right) \sigma^2 (K e^g)^2 = \\ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} - \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right) K \sigma^2 \quad (\mathbf{I})\end{aligned}$$

Falta obter o termo em t, sabendo que pela transformação de variáveis temos:

$$V(S, t) \Rightarrow V \left(K e^g, T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \right) = K \hat{V}(g, \tau).$$

Derivando V em t, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} &\Rightarrow K \frac{\partial \hat{V}(g, \tau)}{\partial t} \xrightarrow{\text{cadeia}} K \frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \\ \text{como } \tau &= \frac{\sigma^2}{2} (T - t) \therefore \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sigma^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -K \frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau} \frac{1}{2} \sigma^2\end{aligned}$$

Então:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -K \frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau} \frac{1}{2} \sigma^2$$

Na EDP original, então:

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}_I + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{II} + \underbrace{r_f S \frac{\partial V}{\partial S}}_{III} - \underbrace{r_f V}_{IV} &= 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} - \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} \right) K \sigma^2 + \left(-K \frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau} \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + r_f K \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} - r_f K \hat{V} &= 0\end{aligned}$$

Simplificando K e dividindo por $\frac{\sigma^2}{2}$

$\left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} - \frac{\partial \hat{V}}{\partial g}\right) - \frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau} + \frac{r_f}{\sigma^2/2} \frac{\partial \hat{V}}{\partial g} - \frac{r_f}{\sigma^2/2} \hat{V}$, fazendo $\frac{r_f}{\sigma^2/2} = \varphi$ e reagrupando:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2}}_A + \underbrace{(\varphi - 1) \frac{\partial \hat{V}}{\partial g}}_B - \underbrace{\frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau}}_C - \underbrace{\varphi \hat{V}}_D = 0. \quad (2^a \text{ PDE})$$

Vamos proceder a uma nova mudança de variáveis.

Procuramos uma transformação de se assemelhe a solução:

$$\boxed{\hat{V} = e^{(\alpha g + \beta \tau)} a}$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial g} = \alpha e^{(\alpha g + \beta \tau)} a + e^{(\alpha g + \beta \tau)} \frac{\partial a}{\partial g}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} = \alpha^2 e^{(\alpha g + \beta \tau)} a + \alpha e^{(\alpha g + \beta \tau)} \frac{\partial a}{\partial g} + \alpha e^{(\alpha g + \beta \tau)} \frac{\partial a}{\partial g} + e^{(\alpha g + \beta \tau)} \frac{\partial^2 a}{\partial g^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial g^2} = e^{(\alpha g + \beta \tau)} \left[\alpha^2 a + 2\alpha \frac{\partial a}{\partial g} + \frac{\partial^2 a}{\partial g^2} \right]}$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} (e^{(\alpha g + \beta \tau)} a) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} e^{(\alpha g + \beta \tau)} a + e^{(\alpha g + \beta \tau)} \frac{\partial a}{\partial \tau} \right) = \beta e^{(\alpha g + \beta \tau)} a + e^{(\alpha g + \beta \tau)} \frac{\partial a}{\partial \tau} =$$

$$\boxed{\frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau} = e^{(\alpha g + \beta \tau)} \left(\beta a + \frac{\partial a}{\partial \tau} \right)}$$

Substituindo as novas variáveis na PDE:

$$\begin{aligned} & \left(e^{(\alpha g + \beta \tau)} \left[\alpha^2 a + 2\alpha \frac{\partial a}{\partial g} + \frac{\partial^2 a}{\partial g^2} \right] \right) + (\varphi - 1) \left(\alpha e^{(\alpha g + \beta \tau)} a + e^{(\alpha g + \beta \tau)} \frac{\partial a}{\partial g} \right) \dots \\ & - \left(e^{(\alpha g + \beta \tau)} \left(\beta a + \frac{\partial a}{\partial \tau} \right) \right) - \varphi \left(e^{(\alpha g + \beta \tau)} a \right) = 0 \end{aligned}$$

Dividindo todos os membros por $e^{(\alpha g + \beta \tau)}$:

$$\alpha^2 a + 2\alpha \frac{\partial a}{\partial g} + \frac{\partial^2 a}{\partial g^2} + (\varphi - 1) \left(\alpha a + \frac{\partial a}{\partial g} \right) - \beta a - \frac{\partial a}{\partial \tau} - \varphi a = 0$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial g^2} + \left(\underbrace{2\alpha + (\varphi - 1)}_0 \right) \frac{\partial a}{\partial g} + \left(\underbrace{\alpha^2 + (\varphi - 1)\alpha - \kappa}_\beta \right) a - \beta a - \frac{\partial a}{\partial \tau} = 0 .$$

Devemos aproximar essa EDP a da equação padrão de transmissão de calor

$$\boxed{\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = k \frac{\partial f}{\partial t} \therefore \frac{\partial f^2}{\partial x^2} - k \frac{\partial f}{\partial t} = 0};$$

Para isso, devemos fazer a parcela em $\left(\underbrace{2\alpha + (\varphi - 1)}_0 \right) \frac{\partial a}{\partial g} = 0$ e

$$\left(\underbrace{\alpha^2 + (\varphi - 1)\alpha - \varphi}_\beta \right) a = \beta a \text{ para cancelar a outra parcela de } -\beta a .$$

Então:

$$2\alpha + (\varphi - 1) = 0 \therefore \alpha = \frac{-(\varphi - 1)}{2}$$

$\alpha^2 + (\varphi - 1)\alpha - \varphi = \beta$, substituindo na equação acima:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial g^2} + \beta a - \beta a - \frac{\partial a}{\partial \tau} = 0 \therefore \frac{\partial^2 a}{\partial g^2} - \frac{\partial a}{\partial \tau} = 0 .$$

Com a nova equação obtida com as transformações de variáveis, precisamos agora encontrar novas condições de contorno;

$$V(0, t), \text{ para todo } t;$$

$$V(S, t) \rightarrow 0, \text{ quando } S \rightarrow \infty;$$

$$V(S, T) = \max(S_T - K, 0), \text{ pelo Contrato}$$

$$(1) \quad V(S, t) = K\hat{V}(g, \tau) = Ke^{(\alpha g + \beta \tau)} a(g, \tau)$$

$$V(S, T) = Ke^{(\alpha g + \beta \tau)} a(g, \tau), \text{ como } \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t), \text{ quando } t=T, \text{ então } \tau = 0 \therefore$$

$$V(S, T) = \max(S - K, 0) = Ke^{(\alpha g)} a(g, 0);$$

$$a(g, 0) = \frac{1}{K} e^{-(\alpha g)} \max(S - K, 0), \text{ como } S = K e^g;$$

$$a(g, 0) = \frac{1}{K} e^{-(\alpha g)} \max(K e^g - K, 0), \text{ simplificando } K$$

$$a(g, 0) = e^{-(\alpha g)} \max(e^g - 1, 0), \text{ fazendo } \alpha = \frac{-(\varphi - 1)}{2}$$

$$a(g, 0) = e^{\left(\frac{(\varphi - 1)}{2} g\right)} \max(e^g - 1, 0);$$

$$a(g, 0) = e^{\left(\frac{(\varphi - 1)}{2} g\right)} \max(e^g - 1, 0);$$

$$a(g, 0) = \max \left(e^{\frac{(\varphi - 1)}{2} g} e^g - e^{\frac{(\varphi - 1)}{2} g}, 0 \right);$$

$$a(g, 0) = \max \left(e^{\left(1 + \frac{(\varphi - 1)}{2}\right) g} - e^{\frac{(\varphi - 1)}{2} g}, 0 \right);$$

$$(3) \quad \boxed{a(g, 0) = \max \left(e^{\frac{(\varphi + 1)}{2} g} - e^{\frac{(\varphi - 1)}{2} g}, 0 \right);}$$

Resumo:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial g^2} - \frac{\partial a}{\partial \tau} = 0, \text{ onde:}$$

$$a(g, \tau) = \frac{1}{K} e^{-(\alpha g + \beta \tau)} = K \hat{V}(g, \tau) = V(S, t),$$

e como condição de contorno:

$$a(g, 0) = \max \left[e^{\frac{(\varphi+1)}{2}g} - e^{\frac{(\varphi-1)}{2}g}, 0 \right], \text{ sendo } \alpha = \frac{-(\varphi-1)}{2}.$$

$$\Theta(g) = a(g, 0) = \max \left[e^{\frac{(\varphi+1)}{2}g} - e^{\frac{(\varphi-1)}{2}g}, 0 \right] \text{ Como}$$

Precisamos encontrar a solução deste problema. Uma função do tipo $a(g, \tau)$, Fourier tem a seguinte solução.

$$a(g, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s) e^{-\frac{(s-g)^2}{4\tau}} ds$$

Somente são considerados preços $S \geq 0$ (preços maior/igual a zero, por definição), logo a integral poderá ser subdividida em duas etapas):

$$a(g, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^x \Theta(s) e^{-\frac{(s-g)^2}{4\tau}} ds + \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_x^{\infty} \Theta(s) e^{-\frac{(s-g)^2}{4\tau}} ds$$

Procedendo mais uma mudança de variável:

$$x = \frac{s-g}{\sqrt{2\tau}} \therefore s = x\sqrt{2\tau} + g \therefore g = s - x\sqrt{2\tau}$$

como $s \geq 0$, então podemos dizer que $x = \frac{-g}{\sqrt{2\tau}}$ quando $s = 0$.

Substituindo na integral anterior:

$$a(g, \tau) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}} \Theta(s) e^{-\frac{(s-g)^2}{4\tau}} ds}_{(-\infty \leftrightarrow 0; S=0) \Rightarrow 0} + \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \Theta(s) e^{-\frac{(s-g)^2}{4\tau}} ds$$

Agora realizando a mudança de variável em x e como

$$\Theta(s) = a(s, 0) = \max \left[e^{\frac{(\varphi+1)}{2}s} - e^{\frac{(\varphi-1)}{2}s}, 0 \right] \text{ e como } s > 0;$$

$$a(g, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left(e^{\frac{(\varphi+1)}{2}s} - e^{\frac{(\varphi-1)}{2}s} \right) e^{-\frac{(s-g)^2}{4\tau}} ds, \text{ como } (s-g)^2 = x^2 2\tau$$

e $dx = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} ds \therefore ds = \sqrt{2\tau} dx$, então:

$$a(g, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left(e^{\frac{(\varphi+1)}{2}s} - e^{\frac{(\varphi-1)}{2}s} \right) e^{-\frac{x^2 2\tau}{4\tau}} \sqrt{2\tau} dx$$

$$a(g, \tau) = \frac{\sqrt{2\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left(e^{\frac{(\varphi+1)}{2}s} - e^{\frac{(\varphi-1)}{2}s} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left(e^{\frac{(\varphi+1)}{2}s} - e^{\frac{(\varphi-1)}{2}s} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Dividindo a integral em duas partes I_1 - I_2 , ficamos:

$$a(g, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(\varphi+1)}{2}s} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} -e^{\frac{(\varphi-1)}{2}s} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

fazendo as variáveis como x e lembrando que $s = x\sqrt{2\tau} + g$:

$$a(g, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(\varphi+1)}{2}(x\sqrt{2\tau}+g)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} -e^{\frac{(\varphi-1)}{2}(x\sqrt{2\tau}+g)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

expondo as parcelas que não dependem de x , teremos:

$$a(g, \tau) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\varphi+1)g}{2}} \int_{-\frac{g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\left[\frac{(\varphi+1)x\sqrt{2\tau}}{2} - \frac{x^2}{2} \right]} dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\varphi-1)g}{2}} \int_{-\frac{g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\left[\frac{(\varphi-1)x\sqrt{2\tau}}{2} - \frac{x^2}{2} \right]} dx}_{I_2}$$

Resolvendo cada parcela separadamente:

$$I_1 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\varphi+1)g}{2}} \int_{-\frac{g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\left[\frac{(\varphi+1)x\sqrt{2\tau}}{2} - \frac{x^2}{2} \right]} dx}_{I_1}, \text{ desejamos transformar a}$$

parcela interna da integral num quadrado perfeito do tipo: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Para tal faremos algumas transformações na integral para torná-la semelhante a forma citada.

Avaliando somente a parte que desejamos alterar:

$$\frac{(\varphi+1)x\sqrt{2\tau}}{2} - \frac{x^2}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \left(x^2 - (\varphi+1)x\sqrt{2\tau} + \frac{(\varphi+1)^2 \tau}{2} - \frac{(\varphi+1)^2 \tau}{2} \right) \therefore -\frac{1}{2} \left(x^2 - (\varphi+1)x\sqrt{2\tau} + \frac{(\varphi+1)^2 \tau}{2} \right) + \frac{(\varphi+1)^2 \tau}{4} \therefore$$

$$-\frac{1}{2} \left(x - \frac{(\varphi+1)\sqrt{2\tau}}{2} \right)^2 + \frac{(\varphi+1)^2 \tau}{4}, \text{ voltando à integral:}$$

$I_1 \rightarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\varphi+1)g}{2}} \int_{-\frac{g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\left[\frac{(\varphi+1)x\sqrt{2\tau}}{2} - \frac{x^2}{2} \right]} dx}_{I_1} \therefore \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\varphi+1)g}{2}} \int_{-\frac{g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\left[-\frac{1}{2} \left(x - \frac{(\varphi+1)\sqrt{2\tau}}{2} \right)^2 + \frac{(\varphi+1)^2 \tau}{4} \right]} dx \therefore$$

$I_1 \rightarrow$

$$\frac{e^{\frac{(\varphi+1)g}{2} + \frac{(\varphi+1)^2 \tau}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{g}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\underbrace{x - \frac{(\varphi+1)\sqrt{2\tau}}{2}}_{\rho_1} \right)^2} dx, \quad \rho_1 = x - \frac{(\varphi+1)\sqrt{2\tau}}{2} \therefore x = \rho_1 + \frac{(\varphi+1)\sqrt{2\tau}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{simetria}} \left[e^{\frac{(\varphi+1)g}{2} + \frac{(\varphi+1)^2 \tau}{4}} \right] * \int_{-\infty}^{\frac{g}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(\varphi+1)\sqrt{2\tau}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho_1^2}{2}} d\rho_1$$

Fazendo $d_1 = \frac{g}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(\varphi+1)\sqrt{2\tau}}{2}$, podemos escrever a equação da seguinte

forma:

$$\left[e^{\frac{(\varphi+1)g}{2} + \frac{(\varphi+1)^2 \tau}{4}} \right] \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho_1^2}{2}} d\rho_1, \text{ que reescrevemos como:}$$

$I_1 \rightarrow e^{\oplus} N(d_1)$, onde $N(d_1)$ indica a **função distribuição acumulada** (veja explicação mais adiante, quando explicamos da fdp e cdp da Normal) até d_1 .

$$a(g, \tau) = e^{\oplus} N(d_1) - \underbrace{e^{\frac{1}{2}(\varphi-1)g} * \int_{-\infty}^{\frac{g}{\sqrt{2\tau}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(\varphi-1)x\sqrt{2\tau}}{2} - \frac{x^2}{2} \right]} dx}_{I_2}$$

$$a(g, \tau) = e^{\oplus} N(d_1) - \underbrace{e^{\frac{1}{2}(\varphi-1)g + \frac{1}{4}(\varphi-1)^2 \tau} * \int_{-\infty}^{\left(\frac{g}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(\varphi-1)\sqrt{2\tau}}{2} \right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\underbrace{x - \frac{(\varphi+1)\sqrt{2\tau}}{2}}_{\rho_2} \right)^2} d\rho_2}_{I_2}$$

Refazendo as conversões das variáveis, temos as seguintes transformações:

$$S = K e^g \rightarrow \ln(S/K) = g$$

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{1/K}{S/K} = \frac{1}{S} \quad t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

$$\hat{V}(g, \tau) = e^{(\alpha g + \beta \tau)} a(g, \tau)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}(\varphi - 1) \text{ onde } \varphi = \frac{2r_f}{\sigma^2}, \text{ e}$$

$$\beta = \alpha^2 + (\varphi - 1)\alpha - \varphi = -\frac{1}{4}(\varphi + 1)^2$$

$$\frac{V(S, t)}{K} = e^{-\frac{1}{2}(\varphi - 1)g - \frac{1}{4}(\varphi + 1)^2 \tau} a(g, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(\varphi - 1)g - \frac{1}{4}(\varphi + 1)^2 \tau} (I_1 - I_2)$$

$$\frac{V(S, t)}{K} = e^{-\frac{1}{2}(\varphi - 1)g - \frac{1}{4}(\varphi + 1)^2 \tau} \left(e^{\frac{1}{2}(\varphi + 1)g + \frac{1}{4}(\varphi + 1)^2 \tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\varphi - 1)g + \frac{1}{4}(\varphi - 1)^2 \tau} N(d_2) \right)$$

$$\frac{V(S, t)}{K} = e^{-\frac{1}{2}(\varphi - 1)g} e^{\frac{1}{2}(\varphi + 1)g} N(d_1) - e^{-\frac{1}{4}(\varphi + 1)^2 \tau} e^{\frac{1}{4}(\varphi - 1)^2 \tau} N(d_2)$$

$$\frac{V(S, t)}{K} = e^g N(d_1) - e^{\frac{1}{4} \left[\underbrace{(\varphi - 1)^2 - (\varphi + 1)^2}_{-4\varphi} \right] \tau} N(d_2)$$

$$V(S, t) = K \left[e^g N(d_1) - e^{-\frac{2r_f}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} N(d_2) \right] = S N(d_1) - K e^{-r_f(T-t)} N(d_2) \therefore$$

$$V(S, t) = C(S, t) = S N(d_1) - K e^{-r_f(T-t)} N(d_2) \text{ , onde:}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sqrt{2\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}} + \frac{\left(\frac{2r_f}{\sigma^2} + 1\right) \sqrt{2\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}}{2} = \frac{2\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\frac{2r_f}{\sigma^2} + 1\right) \sqrt{\sigma^2(T-t)} \sqrt{\sigma^2(T-t)}}{2\sqrt{\sigma^2(T-t)}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\frac{r_f}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right) \sigma^2(T-t)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{g}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(\varphi-1)\sqrt{2\tau}}{2}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\frac{2r_f}{\sigma^2} - 1\right)\sqrt{2\sigma^2(T-t)}}{\sqrt{2\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}} = \frac{2\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\frac{2r_f}{\sigma^2} - 1\right)\sqrt{2\sigma^2(T-t)}}{2\sqrt{\sigma^2(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\frac{r_f}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

7.2

Lema de Itô

Seja $x(t)$ Processo de Itô (ou Wiener generalizado- Vide cap. 7.3). Isso é:

$$dx(t) = a(x, t) dt + b(x, t) dW_t$$

onde W_t é a Processo do Wiener. Seja $f(x, t)$ uma função com derivada segunda

(C^2) contínua. Então, $f(x(t), t)$ é também um processo de Itô, e

$$df(x(t), t) = \left(a(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW_t.$$

Prova informal

Expandindo $f(x, t)$ em Série de Taylor em x e t , temos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \dots$$

substituindo dx por $(adt + bdW)$, obtemos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a dt + b dW) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (a^2 dt^2 + 2ab dt dW + b^2 dW^2) + \dots$$

No limite, dt tende a 0, os termos dt^2 e $dt dW$ desaparecem, mas o termo dW^2 tende a dt . O último pode ser mostrado se nós provarmos que:

$$dW^2 \rightarrow E(dW^2), \text{ desde que } E(dW^2) = dt.$$

Prova desta propriedade estatística:

Por definição, Variância $\rightarrow \text{Var}(x) = E[x^2] - (E[x])^2$ ou $E[x^2] = (E[x])^2 + \text{Var}[x]$. Pela definição de Movimento Browniano:

$$W \sim N(0,1) \text{ e } dW \sim N(0, dt), \quad dW = W \sqrt{dt}$$

ou seja, W possui distribuição Normal com média 0(zero) e desvio padrão 1, e dW possui distribuição Normal com média 0(zero) e desvio padrão dt . Então:

$$E[W] = 0, \text{ Var}[W] = 1, \text{ Var}[W] = E[W^2] - (E[W])^2 \Rightarrow \text{Var}[W] = E[W^2] - 0$$

$$E[W^2] = 1$$

$$E[dW] = E[W \sqrt{dt}] = \sqrt{dt} (E[W]) = 0$$

$$\text{Var}[dW] = E[dW^2] - (E[dW])^2 = E[W^2 dt] - (0)^2 = dt E[W^2] =$$

$$dt([E[W]]^2 + \text{Var}(W)) = dt(1+0)$$

$$\Rightarrow \text{Var}[dW] = dt$$

$$E[dW^2] = E[W^2 dt] = dt E[W^2] = dt \text{Var}(W) \Rightarrow E[dW^2] = dt$$

$$(E[W])^2 = 0 \text{ e } \text{Var}[dW^2] = E[(dW^2)^2] - (E[dW^2])^2 = E[(dW)^4] - (E[dW^2])^2 =$$

$\rightarrow 3 dt^2 - dt^2 = 0$ (sabendo que $(dt)^i$ para todo $i > 1$ $dt \rightarrow 0$). Isso implica que não é estocástico (variância 0(zero)). Por outro lado:

$$dW dt = W (dt) (dt)^{1/2} ;$$

$$dW = W \text{sqr}(dt), \quad W (dt)^{1/2} \rightarrow$$

$$= W (dt)^{3/2} ; \text{ como } i > 1 \text{ então } dt \rightarrow 0$$

Suprimindo os termos dt^2 e $dt dW$, substituindo dW^2 , e evidenciando a equação em termos de dt e dW teremos:

$$df = \left(a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial f}{\partial x} dW$$

Voltando a PDE de Black-Scholes-Merton: substituindo df por dV e $a = \mu S$ e $b = \sigma S$, teremos a equação:

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW.$$

Demonstrada anteriormente.

7.3

Processo Wiener

O processo do Wiener W_t é caracterizado por três fatos:

- $W_0 = 0$;
- W_t é quase certamente contínuo;
- W_t tem incrementos independentes com distribuição " $N(0, \sigma^2)$ " denota **distribuição normal** com valor esperado 0 e variância σ^2 ;

A indicação de incrementos independentes significa aquela se $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ então $W_{t_1} - W_{s_1}$ e $W_{t_2} - W_{s_2}$ são as variáveis aleatórias independentes.

Uma integral baseada na medida do Wiener pode ser chamada a **Integral de Wiener**.

Propriedades de um processo unidimensional de Wiener:

A função da densidade da probabilidade em tempo fixo t :

$$f_X(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} e^{-x^2/2\alpha t} \quad \text{Expectância: } \mu_X = 0$$

Processos relacionados:

O processo estocástico definido por $X_t = \mu t + \sigma W_t$ é chamado a *Processo de Wiener* com drift μ e variância infinitesimal σ^2 . É um processo estocástico usado para modelar eventos que nunca atingem valores negativos, tais como o valor de uma ação mobiliária.

7.4

Uso de Taxa Livre de Risco em P&D

Proposição 4: A incerteza técnica não demanda prêmio de risco por parte de corporações com acionistas diversificados.

Prova: A teoria neoclássica de finanças, em especial a teoria de portfólio e o CAPM (“Capital Asset Pricing Model”) mostra a distinção entre risco diversificável e risco não-diversificável. Pelo CAPM, a taxa ajustada ao risco $\mu = r + \pi$, onde π é o prêmio de risco demandado por investidores diversificados, dado pelo produto do fator β pelo spread de retorno do mercado ($r_M - r$), onde r_M é o retorno do portfólio de mercado e β a covariância do retorno do ativo com o retorno do mercado, normalizada (dividida) pela variância de mercado. Mas a incerteza técnica é independente da evolução do mercado (flutuações do mercado não afetam a probabilidade de ocorrência de petróleo, o volume, etc.) e, logo, tem correlação zero com o retorno do portfólio de mercado (é um risco diversificável).

Assim, pela definição, tem-se $\beta = 0$ e, portanto $\pi = 0$. Logo, a incerteza técnica não demanda prêmio de risco por parte de investidores diversificados de corporações – como os acionistas de companhias de petróleo. $\square$

7.5

Valor Esperado de Choquet

Podemos escrever o valor esperado de Choquet de 3 formas diferentes:

$$(1) \int f dv = \int_{-\infty}^0 (v(f \geq \alpha) - 1) d\alpha + \int_0^{+\infty} v(f \geq \alpha) d\alpha$$

$$(2) E^C X = f(w_1) + \sum_{i=2}^n v(\{w_i, \dots, w_n\}) [f(w_i) - f(w_{i-1})]$$

$$(3) E^C X = \sum_{i=1}^{n-1} f(w_i) (v(\{w_i, \dots, w_n\}) - v(\{w_{i+1}, \dots, w_n\})) + f(w_n) (v(w_n))$$

(1) $\Rightarrow$ (2) (Prova):

Da fórmula do valor esperado, temos que:

$$\begin{aligned} E^C X = & \int_{-\infty}^{f(w_1)} (v(f \geq \alpha) - 1) d\alpha + \int_{f(w_1)}^{f(w_2)} (v(f \geq \alpha) - 1) d\alpha + \dots + \int_{f(w_j)}^0 (v(f \geq \alpha) - 1) d\alpha + \\ & \int_0^{f(w_{j+1})} v(f \geq \alpha) d\alpha + \dots + \int_{f(w_{n-1})}^{f(w_n)} v(f \geq \alpha) d\alpha + \int_{f(w_n)}^{\infty} v(f \geq \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Examinando cuidadosamente o valor da capacidade que está associada a cada intervalo de valores que α pode assumir:

Se $\alpha \leq f(w_1)$, então $v(f \geq \alpha) = v(\{w_1, w_2, \dots, w_n\}) = v(\Omega) = 1$

Se $\alpha \in [f(w_1), f(w_2)]$, então $v(f \geq \alpha) = v(\{w_2, w_3, \dots, w_n\})$

Se $\alpha \in [f(w_2), f(w_3)]$, então $v(f \geq \alpha) = v(\{w_3, w_4, \dots, w_n\})$

E assim por diante, até termos:

Se $\alpha \in [f(w_{n-1}), f(w_n)]$, então $v(f \geq \alpha) = v(\{w_n\})$

Se $\alpha \geq f(w_n)$, então $v(f \geq \alpha) = v(\emptyset) = 0$

Desse modo, podemos escrever a expressão para o valor esperado substituindo o valor de $v(f \geq \alpha)$ para cada intervalo onde α se localiza.

$$\begin{aligned}
 E^C X &= \int_{-\infty}^{f(w_1)} (v(f \geq \alpha) - 1) d\alpha + \int_{f(w_1)}^{f(w_2)} (v(f \geq \alpha) - 1) d\alpha + \dots + \int_{f(w_j)}^0 (v(f \geq \alpha) - 1) d\alpha + \\
 &\int_0^{f(w_{j+1})} (v(f \geq \alpha) d\alpha + \dots + \int_{f(w_{n-1})}^{f(w_n)} (v(f \geq \alpha) d\alpha + \int_{f(w_n)}^{\infty} (v(f \geq \alpha) d\alpha = \\
 &= 0[f(w_1) - (-\infty)] + (v(\{w_2, w_3, \dots, w_n\}) - 1)[f(w_2) - f(w_1)] + \dots + \\
 &+ (v(\{w_{j+1}, \dots, w_n\}) - 1)[0 - f(w_{j+1})] + (v(\{w_{j+1}, \dots, w_n\}) - 1)[f(w_{j+1}) - 0] + \dots + \\
 &+ v(\{w_n\})[f(w_n) - f(w_{n-1})] + 0[\infty - f(w_n)] = \\
 &= f(w_1) + (v(\{w_2, \dots, w_n\})[f(w_2) - f(w_1)] + (v(\{w_3, \dots, w_n\})[f(w_3) - f(w_2)] + \dots + \\
 &+ v(w_n)[f(w_n) - f(w_{n-1})] \\
 &= f(w_1) + \sum_{i=2}^n (v(\{w_i, \dots, w_n\})[f(w_i) - f(w_{i-1})]
 \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) (Prova):

Acabamos de verificar que o valor esperado pode ser escrito como:

$$E^C X = f(w_1) + \sum_{i=2}^n v(\{w_i, \dots, w_n\})[f(w_i) - f(w_{i-1})]$$

Que nos informa que o valor esperado corresponde à média ponderada dos resultados possíveis, onde se atribui maior peso para aqueles em que ocorrem os piores resultados. Reescrevendo esta expressão, obtemos a fórmula do valor esperado desejado, isto é:

$$\begin{aligned}
 &= f(w_1)(1 - v(\{w_2, \dots, w_n\})) + f(w_2)(v(\{w_2, \dots, w_n\}) - v(\{w_3, \dots, w_n\})) + \\
 &+ \dots + f(w_{n-1})(v(\{w_{n-1}, w_n\}) - v(\{w_n\})) + f(w_n)(v(\{w_n\}))
 \end{aligned}$$

Esta última é conhecida como valor esperado de Choquet.

(3) $\Rightarrow$ (1) (Prova):

Acabamos de verificar que o valor esperado de Choquet pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 E^C X &= f(w_1)(1 - v(\{w_2, \dots, w_n\})) + \sum_{i=2}^{n-1} f(w_i)(v(\{w_i, \dots, w_n\}) - v(\{w_{i+1}, \dots, w_n\})) + f(w_n)(v(\{w_n\})) = \\
 &= f(w_1) + \sum_{i=2}^n v(\{w_i, \dots, w_n\})[f(w_i) - f(w_{i-1})] = \\
 &= \int_{-\infty}^0 (v(f \geq \alpha) - 1) d\alpha + \int_0^{\infty} (v(f \geq \alpha)) d\alpha
 \end{aligned}$$

Valor Esperado de Choquet para uma Capacidade Simples:

Vimos que a fórmula do valor esperado de Choquet pode ser escrita como:

$$\int f dv = E^C X = f(w_1) + \sum_{i=2}^n v(\{w_i, \dots, w_n\})[f(w_i) - f(w_{i-1})]$$

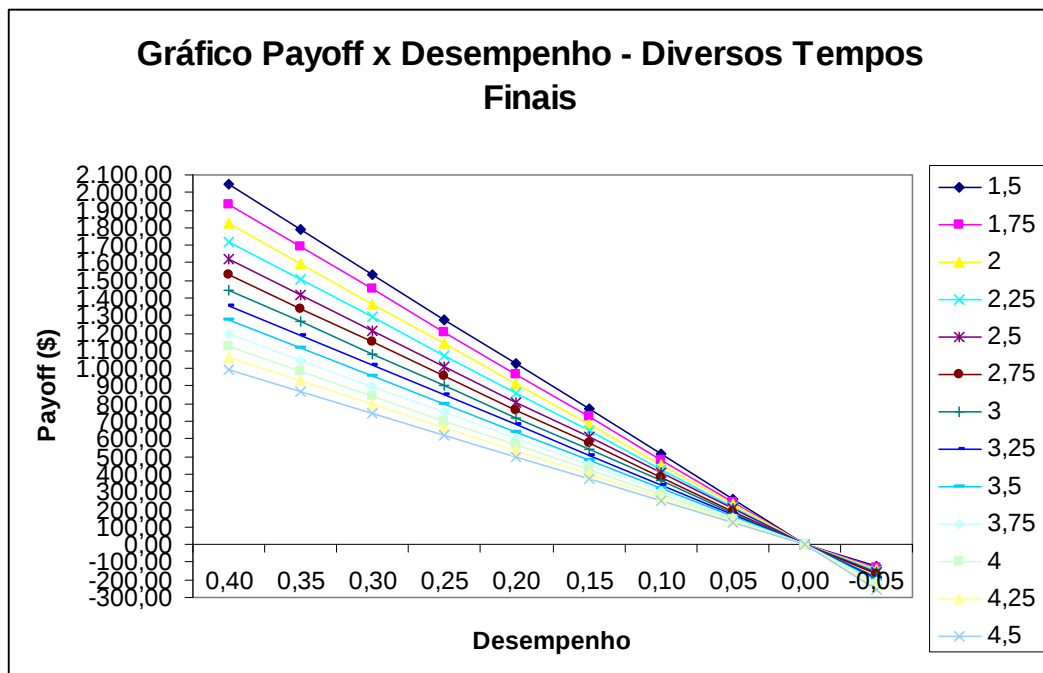
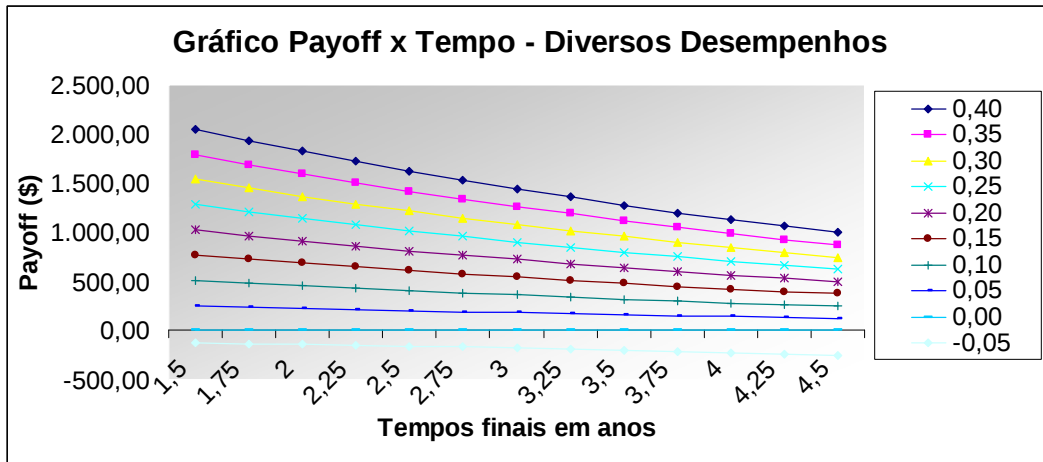
Como v é uma capacidade simples, então:

$$v(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = \Omega \\ (1-c)p(A) & \text{se } A \neq \Omega \end{cases} \quad \text{onde } p \text{ é aditiva}$$

Substituindo, teremos: (observe que, na segunda linha, o termo $[cf(w_1) - cf(w_1)]$, que vale 0, é apenas um artifício para possibilitar o aparecimento de $\int f dp$ logo adiante.

$$\begin{aligned}
 &= f(w_1) + \sum_{i=2}^n (1-c)p(\{w_i, \dots, w_n\})[f(w_i) - f(w_{i-1})] = \\
 &= f(w_1) + [cf(w_1) - cf(w_1)] + (1-c) \sum_{i=2}^n p(\{w_i, \dots, w_n\})[f(w_i) - f(w_{i-1})] = \\
 &= cf(w_1) + (1-c) \left\{ f(w_1) + \sum_{i=2}^n p(\{w_i, \dots, w_n\})[f(w_i) - f(w_{i-1})] \right\} = \\
 &= cf(w_1) + (1-c) \int f dp = \\
 &= cf(w_1) + (1-c)E(x)
 \end{aligned}$$

7.6

Gráficos de *Payoff* em 2D

7.7

Manipulações Algébricas para o Quadro Resumo da Figura 26.

Partindo da Função:

$$V_t^c(X_t) = \text{Max}((-C_t M + \frac{1}{(1+r)} (c \text{Min} \theta_{t+1} M + (1-c) E[\theta_{t+1} M])), (-C_t C + \frac{1}{(1+r)} (c \text{Min} \theta_{t+1} C + (1-c) E[\theta_{t+1} C])), 0)$$

U_t (decisão) será, de forma ótima, “Melhorar” quando:

$$[(-C_t M + \frac{1}{(1+r)} (c \text{Min} \theta_{t+1} M + (1-c) E[\theta_{t+1} M])) > (-C_t C + \frac{1}{(1+r)} (c \text{Min} \theta_{t+1} C + (1-c) E[\theta_{t+1} C]))] \geq 0$$

Assim, quando $c=0$:

$$-C_t M + \frac{1}{(1+r)} (E[\theta_{t+1} M]) > -C_t C + \frac{1}{(1+r)} (E[\theta_{t+1} C]) \Rightarrow \left[\frac{1}{(1+r)} \right] (E[\theta_{t+1} M] - E[\theta_{t+1} C]) > [C_t M - C_t C]$$

Quando $c=1$:

$$-C_t M + \frac{1}{(1+r)} (\text{Min} \theta_{t+1} M) > -C_t C + \frac{1}{(1+r)} (\text{Min} \theta_{t+1} C) \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{(1+r)} \right] (E[\theta_{t+1} M] - E[\theta_{t+1} C]) > (C_t M - C_t C)$$

E, finalmente, quando $0 < c < 1$:

$$(-C_t M + \frac{1}{(1+r)} (c \text{Min} \theta_{t+1} M + (1-c) E[\theta_{t+1} M])) > (-C_t C + \frac{1}{(1+r)} (c \text{Min} \theta_{t+1} C + (1-c) E[\theta_{t+1} C])) \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{(1+r)} \right] (c (\text{Min} \theta_{t+1} M - \text{Min} \theta_{t+1} C) + (1-c) (E[\theta_{t+1} M] - E[\theta_{t+1} C])) > (C_t M - C_t C)$$