

2 Referencial Teórico

O presente capítulo será dividido em seis seções. Na primeira serão explicados os conceitos básicos do mercado de opções sobre ações e terá uma síntese do funcionamento deste mercado no Brasil, já a segunda seção trará uma revisão do modelo de Black e Scholes (1973) mostrando a revolução ocasionada pelo mesmo, fórmulas referentes ao modelo e as principais premissas que o constituem. A terceira sessão mostrará o comportamento da volatilidade ao longo do tempo, que também é conhecida como estrutura a termo da volatilidade. Na quarta seção serão mostrados os conceitos de volatilidade implícita e do *smile* de volatilidade; a quinta seção apresentará o modelo desenvolvido por Corrado-Su (1996), que será de suma importância para que se entenda o desenvolvimento da sexta seção, onde serão mostrados os cones de assimetria e curtose e os cones de volatilidade.

2.1. Conceitos básicos sobre opções

O mercado de opções tem sido objeto de estudo de diversos acadêmicos ao longo das últimas décadas, principalmente a partir do início dos anos de 1970, quando Black e Scholes (1973) e Merton (1973) fizeram grandes avanços na questão da apuração do preço de opções. O reconhecimento nos avanços desenvolvidos por estes acadêmicos culminou com o prêmio Nobel em Economia de 1997, com o qual Myron Scholes e Robert Merton foram agraciados. Segundo Hull (2011), Fischer Black só não recebeu esta honraria devido ao seu falecimento, em 1995.

Já no meio profissional, a utilização de opções é muito difundida nos mercados, principalmente no que tange à utilização das mesmas como uma forma de *hedge*, através da qual os profissionais de mercado tentam proteger seus ativos

em momentos de alta volatilidade, ou até mesmo se aproveitar dos momentos em que a volatilidade é mais amena, conforme Hull (2005).

Para Bessada (2009), o mercado de opções possui um alto potencial de risco e conseqüentemente de rentabilidade, ou seja, as operações realizadas com as mesmas podem resultar em uma perda total do valor investido no caso de um erro na tomada de decisão ou em grandes ganhos no caso de acerto. Mesmo sendo derivativos de ativos do mercado acionário, de commodities ou cambial, as opções dependem de muitas variáveis para que sejam corretamente apreçadas, o que ocasiona uma maior variabilidade na previsão entre lucros e perdas.

Conforme mostra Figueiredo (2011), *call* é o nome em inglês para uma opção de compra que representa o direito de comprar um ativo em determinada data por um certo preço (preço de exercício), já uma *put* é o nome em inglês para uma opção de venda, que representa o direito de vender um ativo em determinada data por um certo preço (preço de exercício). As opções são direitos adquiridos em mercado com uma data de exercício predeterminada, no caso das opções europeias, ou que podem ser exercidas ou não até esta data predeterminada no caso das opções americanas.

Cabe ressaltar que tanto no caso das opções europeias, como no caso das opções americanas, o titular tem o direito de exercer ou não tal opção. Já o lançador é obrigado a comprar ou vender a opção, caso o direito de compra ou de venda seja exercido pelo titular. Ou seja, o lançador tem um dever e o titular tem um direito sobre tal ativo.

Hull (2011) afirma que toda opção tem um prêmio e um preço de exercício. O prêmio é o valor que o titular paga para ter tal direito, como foi explicado no parágrafo acima. O preço de exercício (*strike price*) é o valor pago ou recebido pelo titular em decorrência do exercício da mesma e a respectiva compra do ativo objeto por este valor.

Para um melhor entendimento deste tipo de derivativo, cabe destacar que a opção só será exercida se o adquirente puder obter ganho com o exercício, ou seja, se a opção apresentar valor intrínseco. Para Hull (2005), se S representa o preço à vista do ativo e K o preço de exercício da opção, o valor intrínseco desta é dado por $\text{Max}[S - K; 0]$ no caso da opção de compra, e $\text{Max}[K - S; 0]$ para a opção de venda. Se o resultado desta fórmula for zero e o vencimento estiver muito próximo, considera-se que a opção virou *pó*, ou seja, seu prêmio é muito pequeno

ou zero. Porém, se a data de vencimento estiver distante, existem probabilidades de haver variação no preço da opção, dado que a mesma está em função de outras variáveis.

Para o autor supracitado, as variáveis que afetam o prêmio de uma opção são: o tempo até o vencimento, o seu preço de exercício, o preço a vista do ativo subjacente, os dividendos, o custo de carregamento, a taxa de juros livre de risco e a volatilidade do ativo subjacente. Com exceção da volatilidade, todas as variáveis acima são conhecidas, portanto a importância de um estudo mais aprofundado desta variável se faz necessário, conforme será mostrado ao longo deste estudo.

Já no que tange a classificação quanto ao preço de exercício das opções de compra e o preço à vista do ativo-objeto, Bessada (2009) mostra que existem três possibilidades:

- preço do ativo $>$ valor presente do preço de exercício \rightarrow *in-the-money* (dentro do dinheiro).
- preço do ativo \approx valor presente do preço de exercício \rightarrow *at-the-money* (no dinheiro).
- preço do ativo $<$ valor presente do preço de exercício \rightarrow *out-of-the-money* (fora do dinheiro).

2.1.1.

O mercado de opções no Brasil

As opções de compra e opções de venda de ações e de índice são negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa); já na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) existem varias modalidades de opções, sendo as mais famosas e negociadas as opções de dólar comercial.

Figueiredo (2011) diz que mais de 90% do volume negociado no mercado de opções refere-se a transações com opções de compra de ações, ou seja, a liquidez deste mercado está concentrada sobre estes ativos.

A identificação das opções é feita pelo símbolo do ativo-objeto associado a uma letra e a um número de série. A letra serve para identificar se uma opção é de compra ou de venda e qual o mês de vencimento da mesma. No caso das opções de compra as letras variam em ordem alfabética de A até L, sendo que A representa o mês de janeiro e L o mês de dezembro. Já no caso das opções de

venda as letras variam de M até X, onde a letra M representa o mês de janeiro e a letra X o mês de dezembro.

Já o número que segue a letra representa o preço de exercício da opção, por exemplo, a opção PETRB30, refere-se a uma opção de compra do ativo Petrobrás PN com vencimento no mês de fevereiro do respectivo ano a um preço de exercício de R\$30,00. A variação padrão entre os preços de exercício é de R\$2,00, sendo que os mesmos são ajustados quando ocorre o pagamento de proventos.

Na Bovespa, o vencimento das opções ocorre na terceira segunda-feira do mês de vencimento da mesma e as opções são do tipo americanas, ou seja, as mesmas podem ser exercidas a qualquer momento.

2.2.

O modelo de Black&Scholes

Logo após o início das atividades do Chicago Board Options Exchange (CBOE) no ano de 1973, o artigo produzido por Fisher Black e Myron Scholes foi um grande avanço na área de finanças, pois neste trabalho foi mostrado através de um modelo matemático como os preços teóricos de opções podem ser determinados. (Figueiredo,2009; Bessada; Barbedo; Araújo, 2009).

Para Black e Scholes (1973), o prêmio de uma opção de compra ou de venda é função do preço do ativo-objeto, do preço de exercício, do tempo até o exercício, da taxa de juros livre de risco e da volatilidade do ativo-objeto até o exercício e essa relação se dá através da seguinte fórmula:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \quad (1)$$

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (2)$$

$$d_1 = \left[\ln(S / X) + (r + \sigma^2 / 2)T \right] / \sigma\sqrt{T} \quad (3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (4)$$

Onde:

c = preço justo da opção de compra segundo o modelo de Black-Scholes;

p = preço justo da opção de venda segundo o modelo de Black-Scholes;

S = preço do ativo-objeto da opção na data presente;

X = preço de exercício da opção;

T = período de tempo até a data de vencimento da opção;

r = taxa de juros livre de risco ao período;

σ = volatilidade do ativo-objeto ao período;

$N(d)$ = função de densidade acumulada da distribuição Normal padronizada.

Segundo Figueiredo (2009), a principal premissa do modelo é a de que os preços do ativo seguem uma distribuição log-normal, que é aquela em que o logaritmo natural de uma variável é normalmente distribuído. Portanto, a distribuição probabilística dos retornos do ativo-objeto em uma data futura, calculados de forma contínua e composta a partir dos seus preços é uma função de densidade de probabilidade Normal.

Existem ainda, outras premissas do modelo, tais como:

- não há distribuição de dividendos;
- a volatilidade do ativo-objeto é um valor conhecido e que não varia ao longo do tempo (volatilidade histórica);
- o preço do ativo-objeto segue um movimento geométrico browniano.

Autores como Merton (1973), Hull e White (1987) e Amin (1993) mostram que a premissa de que os ativos seguem uma distribuição log-normal pode ser relaxada, pois estes autores consideravam que o ativo-objeto segue um processo de saltos aliados a um processo de normalidade. Estes autores consideram também que a modelagem comportamental da volatilidade é um processo estocástico que independe do ativo-objeto.

O estudo feito por Schepper e Heijnen (2007) também relaxa a premissa de que os ativos obedecem a uma distribuição log-normal. Para estes autores, uma faixa de valores para os preços das opções deve ser calculada a fim de estimar com maior precisão os possíveis valores das mesmas, ainda que em momentos de alta volatilidade.

Bakshi, Carr e Wu (2008) criam um modelo que estima a volatilidade para opções de moedas, levando em consideração uma assimetria estocástica que levavam a retornos que não tendiam a normalidade tanto a médio quanto a longo prazo.

Assim como Merton (1976), Dennis e Mayhew (2009) adicionam saltos, ruídos e vieses de mercado que podem afetar a precificação calculada por Black e Scholes, mostrando que a distribuição normal de probabilidade assumida pelo mesmo é errônea perante tais variáveis presentes no mercado. Além disso, os autores evitam utilizar dados de fechamento diário dos preços dos ativos, preferindo utilizar séries temporais elaboradas a partir dos dados intradiários.

Fonseca, Grasseli e Tebaldo (2007) também analisam o mercado de opções com assimetria e *smiles* de volatilidade em sua composição, a fim de detectar possíveis correções na distribuição de probabilidade a ser empregada no modelo, buscando reduzir o viés do mesmo.

Já autores como Jarrow e Rudd (1982) e Corrado e Su (1996) levam em consideração o terceiro momento centrado na média e do desvio-padrão (assimetria) e o quarto momento centrado na média e do desvio padrão (curtose), para a elaboração de uma distribuição de probabilidade com maior poder de previsibilidade dos retornos do ativo-objeto. Portanto, aumentando o poder de assertividade na precificação das opções estudadas pelos autores, tendo em vista que uma correta análise do comportamento do ativo-objeto é de suma importância para o modelo a ser desenvolvido.

2.3. Volatilidade implícita e *smile* de volatilidade

Como fora mostrado na seção anterior, a volatilidade é o único parâmetro desconhecido utilizado no modelo de Black e Scholes (1973), portanto saber como estimá-la é o maior desafio para uma correta precificação das opções, pois uma volatilidade condizente com a volatilidade futura, a ser verificada pela variação dos retornos do ativo-objeto, faz com que uma estratégia seja vencedora em um mercado tão volátil e imprevisível quanto o mercado de opções sobre ações.

Uma primeira estimativa de volatilidade a ser utilizada é a volatilidade histórica do ativo objeto, que tenta de alguma forma explicar a volatilidade futura de tal ativo pelos retornos passados do mesmo, ou seja o padrão de variação do mesmo será ao menos parecido com o ocorrido no passado.

Conforme Bessada (2009) e Marins (2009), o primeiro ponto a ser considerado para a utilização da volatilidade histórica é o tamanho da janela de tempo dos retornos passados a ser utilizada para um dado espaço de tempo futuro, ao qual se deseja estimar a volatilidade.

Apesar de um período de tempo maior capturar maiores informações a respeito da volatilidade, talvez o mesmo seja inapropriado, pois fatos ocorridos num passado muito distante influenciam com mesma intensidade que os fatos mais recentes, que podem explicar muito melhor a volatilidade futura.

Para Marins (2009), a maioria dos autores recomenda a utilização de janelas temporais maiores quando necessita-se prever volatilidades para longos períodos, e a utilização de janelas menores é recomendada para a previsão de períodos mais curtos.

Hull (2011) mostra um modelo de ponderação que atribui maior peso aos dados mais recentes, modelo este representado pela seguinte fórmula:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha v_{n-1}^2 \quad (5)$$

Onde, a variável v_i representa a variação percentual no preço de fechamento do ativo entre o dia $i - 1$ e i ; e α_i é o peso atribuído à observação há i dias atrás.. Se os valores mais recentes têm peso maior, então $\alpha_i < \alpha_j$ quando $i > j$; além disso a soma dos pesos deve ser igual a 1.

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \quad (6)$$

Para o autor, o modelo de média móvel ponderada exponencialmente (*exponentially weighted moving average* ou EWMA) é um caso particular do modelo definido pela equação (5). Os dados mais recentes continuam sendo os mais importantes, porém, os pesos diminuem de forma exponencial cada vez que se volta um passo. Tal modelo tem a seguinte equação:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) v_{n-1}^2 \quad (7)$$

O ponto chave desta equação é mostrar que $\alpha_{i+1} = \lambda \alpha_i$, onde λ é uma constante que varia de 0 a 1. Esta fórmula, simplesmente, vai atualizando as estimativas de volatilidade.

Hull (2011) mostra que outros modelos mais complexos também são utilizados para uma correta estimativa de volatilidade futura. Modelos conhecidos como Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH), tais como: GARCH(1,1) desenvolvido por Bollerslev (1986) e EGARCH elaborado por Nelson (1991). Cabe destacar que todos estes modelos utilizam-se de médias móveis para estimar a volatilidade futura.

Beckers (1981) e Whaley (1982) mostram que a volatilidade implícita, ou seja, aquela precificada pelo mercado no valor de uma opção calculada pelo modelo de Black-Scholes, a partir de um caminho inverso, possui informações substanciais sobre a volatilidade, que pode ter mais êxito na previsão da volatilidade futura do que a volatilidade histórica.

Para Marins (2009) a volatilidade implícita é, essencialmente, a volatilidade futura prevista pelo mercado, pois é a volatilidade que gera o prêmio de mercado de uma determinada opção.

O autor mostra ainda que calcular a volatilidade implícita como uma função de outros parâmetros do modelo a ser utilizado não ocorre de forma direta como tentavam provar Brenner e Subrahmanyam (1988). É necessário que se utilize um algoritmo de Newton-Raphson, que a calcula por aproximações sucessivas.

Uma das metodologias mais comuns para estimar a volatilidade implícita foi a apresentada por Schmalensee e Trippi (1978). Os autores apresentam a média ponderada simples da volatilidade implícita, porém são adotados pesos iguais para a totalidade dos N valores de volatilidade implícita.

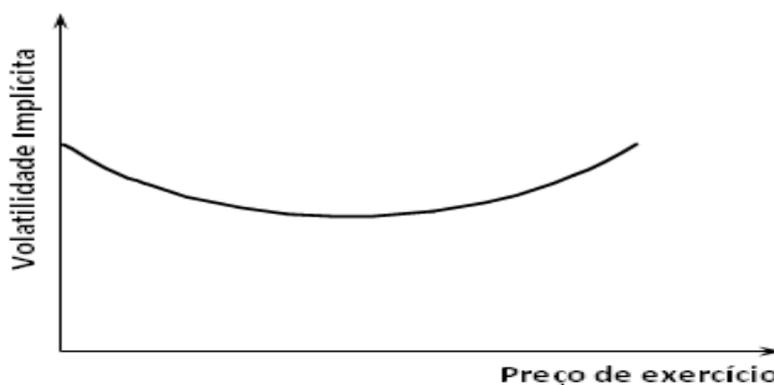
Tendo em vista que o modelo de Black e Scholes (1973) é mais eficiente em precificar algumas séries de opções do que outras, há uma grande preocupação em ponderar as observações, muitas vezes colocando mais peso nas observações em que o modelo é mais preciso, diante do exposto muitos autores descartam as opções que se situam muito “*out-of-the-money*” ou que estão muito próximas do exercício.

Em relação ao *smile* de volatilidade verificado na utilização da volatilidade implícita de uma opção como função do seu preço de exercício, Hull (2011) destacou que:

“A volatilidade decresce à medida que o preço de exercício aumenta. A volatilidade usada para apreçar a opção com baixo preço de exercício (isto é, *put* muito fora do dinheiro ou *call* muito dentro do dinheiro) é significativamente maior que a utilizada para apreçar a opção com alto preço de exercício (isto é, *put* muito dentro do dinheiro ou *call* muito fora do dinheiro)” (p.409).

Portanto, as volatilidades implícitas daquelas opções que vão ficando dentro do dinheiro são mais elevadas que a volatilidade implícita das opções no dinheiro, contudo ainda são mais baixas que as volatilidades implícitas das opções fora do dinheiro. Graficamente este “sorriso” de volatilidade apresenta o seguinte aspecto:

Figura 1 – O efeito “sorriso” das volatilidades implícitas



Extraído de Hull (2011)

Portanto, a volatilidade continua sendo uma variável fundamental para a correta precificação pelo modelo de Black e Scholes (1973), tendo em vista que esta é a única variável a ser estimada para utilização no modelo e embora a volatilidade implícita seja largamente utilizada, a mesma apresenta muitas falhas, tendo em vista que a expectativa de racionalidade dos mercados ainda é muito questionada, e como observa Hull (2005), o mercado é composto de diversos agentes com diferentes expectativas de volatilidade.

2.4. Estrutura a termo de volatilidade

O comportamento da volatilidade implícita ao longo do tempo até o exercício é conhecido como estrutura a termo de volatilidade. (HULL, 2005; CHRISTENSEN; PRABHALA, 1998).

Cabe ressaltar que, conforme Hull (2011), a estrutura a termo é o comportamento em relação ao tempo e o “sorriso” de volatilidade é o comportamento em relação aos diferentes preços de exercício.

No Brasil, trabalhos como os de Desterro (2003), Junior (2007) e Rodrigues (2003) abordam este segundo comportamento, ou seja, analisam os efeitos do sorriso de volatilidade sobre as opções, sejam elas de ações como os trabalhos de Junior (2007) e Rodrigues (2003), sejam elas opções de dólar como no trabalho de Desterro (2003).

O trabalho elaborado por Cerqueira (2010) estuda este comportamento da estrutura a termo de volatilidade, comportamento este de suma importância para a elaboração dos cones de volatilidade das opções de Petrobrás e Vale, desenvolvidos pelo autor.

Xu e Taylor (1994) verificam empiricamente os movimentos na estrutura a termo da volatilidade implícita de opções de moedas estrangeiras no Philadelphia Stock Exchange. Os autores examinam opções de uma cesta de moedas estrangeiras e mostram que a inclinação da estrutura a termo muda com relativa frequência no período de 1985 até 1989.

Por outro lado, Dixit et al (2007) verificam a ineficiência na precificação de opções no mercado indiano testando a hipótese de racionalidade na estrutura a termo da volatilidade implícita nestes ativos. Este estudo utiliza o teste de raiz unitária para verificar que a volatilidade implícita nestas opções segue um processo de reversão à média, o que é comprovado tanto em opções com prazo curto até o vencimento, quanto naquelas com um prazo maior.

Sinclair (2008) utiliza o modelo GARCH (1,1) para construir a estrutura a termo da volatilidade diária para as ações da Microsoft do ano de 2003 até o ano de 2007, porém o autor conclui que os modelos GARCH só produzem estruturas a termo de volatilidade que tendem a média de longo prazo, ou seja, a volatilidade para dois meses está entre a volatilidade de um mês e a de três meses. Portanto, para o autor, o mercado de opções não acredita nestes modelos auto regressivos com heterocedasticidade condicional.

Estes estudos acabam por mostrar que o mercado de opções acaba por ter certa independência do mercado à vista, ou seja, a premissa elaborada por Black e Scholes (1973) de que a volatilidade é conhecida e constante ao longo do tempo e desta forma as opções acompanhariam o preço do ativo-objeto são negadas por

estes estudos, que mostram que a estrutura a termo da volatilidade implícita acaba por ser o melhor parâmetro a ser inserido no modelo.

2.5. Modelos de Corrado e Su

Corrado e Su (1996) estudaram a inconsistência do modelo de Black e Scholes (1973) quando se verificava a volatilidade implícita no mercado de opções norte-americano, principalmente nas opções dentro do preço e fora do preço. Para os autores tal discrepância ocorre devido à inexistência de verificação empírica da propriedade de normalidade nos retornos do ativo-objeto imposta pelo modelo.

Para tentar suavizar os sorrisos de volatilidade verificados no modelo de Black e Scholes (1973), Corrado e Su (1996) adaptam o método desenvolvido por Jarrow e Rudd (1982), onde os coeficientes de assimetria e curtose não eram aqueles observados em uma distribuição normal, ou seja, os coeficientes zero e três, respectivamente.

Os autores observam que as medidas de assimetria e curtose do índice Standard & Poor 500 (S&P 500), no período de 1926 até 1995 apresentavam altas distorções, o que contrariava a hipótese de normalidade do modelo de Black e Scholes (1973).

Utilizando uma expansão de Gram-Charlier, Corrado e Su (1996) conseguem incluir momentos de terceira ordem (assimetria) e quarta ordem (curtose) no modelo de Black e Scholes (1973),

Mais tarde, Brown e Robinson (2002) e Jurczenko et al (2004) adaptam o modelo a restrições probabilísticas de Martingale, criando o modelo de Corrado e Su modificado.

Porém, no que tange ao mercado brasileiro de opções, Teixeira (2011), ao analisar as opções de compra de ações da Petrobras e da Vale, encontra resultados que são desanimadores para o modelo de Corrado e Su modificado, pois este modelo se mostrou inferior no que tange a comparação da volatilidade implícita com a volatilidade realizada.

Para que o modelo de Corrado e Su (1996) seja melhor explicado, é de suma importância que seja entendida a restrição de Martingale observada em Harrison e

Kreps (1979). O trabalho destes autores mostrou que violações da restrição de Martingale ocorriam nos valores futuros do preço de mercado sobre uma densidade de probabilidade neutra a risco, o que poderia representar oportunidades de ganhos de arbitragem em mercados menos flexíveis.

Conforme mostram Harrison e Kreps (1979), considere uma opção de compra europeia cujo preço do ativo subjacente na data t é definido como S_t , com preço de exercício K , prazo para o vencimento τ e vencimento em T . Assume-se que não há arbitragem e considerando r a taxa livre de risco constante, o preço da opção em t será o valor presente do resultado esperado no vencimento, conforme as formula a seguir:

$$C = e^{-r\tau} E_Q[\text{Max}(S_T - K; 0)] \quad (8)$$

$$C = e^{-r\tau} \int_{S_T=K}^{+\infty} (S_T - K) f(S_T) dS_T \quad (9)$$

Onde:

$E_Q[\]$ = esperança;

S_T = preço do ativo subjacente

$f[\]$ = função densidade de probabilidade

O retorno do ativo $\log(S_T/S_t)$ segue uma distribuição lognormal. Desta forma, considera-se que o ativo tem uma média $\mu\tau$ e um desvio padrão $\sigma\sqrt{\tau}$, podendo-se chegar a uma variável padronizada z , tal que:

$$z = \frac{\log(S_T/S_t) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (10)$$

Portanto, o preço justo da opção passa a ser:

$$C = e^{-r\tau} \int_{z=\log((K/S_t)-\mu\tau)/(\sigma\sqrt{\tau})}^{+\infty} (S_t e^{\mu\tau+z\sigma\sqrt{\tau}} - K) f(z) dz \quad (11)$$

Estabelecendo-se uma condição de não arbitragem, o preço esperado do ativo iguala-se ao preço à vista corrigido pela taxa de juros livre de risco no

período a ser analisado. Logo, a medida de probabilidade deve satisfazer a restrição de Martingale:

$$E_Q[S_t] = e^{r\tau} S_t \quad (12)$$

No que tange a função densidade de probabilidade $f(z)$, satisfaz-se:

$$\mu\tau = r\tau - \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu\tau + z\sigma} + f(z) dz \right]. \quad (13)$$

Para o modelo de Black e Scholes (1973) com distribuição lognormal, a restrição de Martingale pode ser dada, por:

$$\mu\tau = r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau \quad (14)$$

Já no caso do Modelo de Corrado-Su (1996), onde ocorre uma expansão Gram -Charlier tipo A, a restrição de Martingale é expressa por:

$$\mu\tau = r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \ln \left[1 + \frac{\gamma_1(f)}{3!}\sigma^3\tau^{3/2} + \frac{\gamma_2(f)}{4!}\sigma^4\tau^2 \right] \quad (15)$$

Onde:

$\gamma_1(f)$ = parâmetro de Fisher para assimetria;

$\gamma_2(f)$ = parâmetro de Fisher para curtose;

f = função densidade de probabilidade

$$\gamma_1(f) = \frac{\mu_3(\cdot)}{\mu_2^{3/2}(\cdot)} \quad \text{e} \quad \gamma_2(\cdot, f) = \frac{\mu_4(\cdot)}{\mu_2^2(\cdot)} - 3 \quad (16)$$

Onde:

$\mu_i(\cdot)$ = momentos centrais de ordem i , para $i=(2,3,4)$

Utilizando uma expansão de Gram-Charlier, Corrado e Su (1996) conseguem incluir momentos de terceira ordem (assimetria) e quarta ordem (curtose) no modelo de Black e Scholes (1973). Mais tarde Brown e Robinson (2002) e Jurczenko et al (2004) adaptam o modelo a restrições probabilísticas de Martingale, criando o modelo de Corrado e Su modificado.

A fórmula do modelo original de Corrado Su (1996) é a seguinte:

$$C_{cs} = C_{bs} + Y1(f)Q3 + Y2(f)Q4 \quad (17)$$

Onde:

C_{bs} = preço justo da opção de compra segundo o modelo de Black-

Scholes

$Y1(f)$ = parâmetro de Fisher para assimetria;

$Y2(f)$ = parâmetro de Fisher para curtose;

$$Q3 = \frac{1}{3!} St\sigma\sqrt{t}[P3(d)\varphi(d) - \sigma^2\tau\Phi(d)];$$

$$Q4 = \frac{1}{4!} St\sigma\sqrt{t}[P4(d)\varphi(d) + \sigma^3\tau^{\frac{3}{2}}\Phi(d)];$$

$$P3(y) = 2\sigma\sqrt{\tau} - y;$$

$$P4(y) = y^2 - 3y\sigma\sqrt{\tau} + 3\sigma^2\tau - 1;$$

$\varphi(d)$ = densidade de probabilidade da distribuição Normal padrão

$\Phi(d)$ = distribuição de probabilidade da distribuição Normal padrão

2.6.

Cones de assimetria, cones de curtose e cones de volatilidade

Na seção quatro deste capítulo foi apresentado o conceito de estrutura a termo de volatilidade, que é o ponto-chave para que se possa entender a dinâmica

de funcionamento tanto dos cones de volatilidade, como dos cones de assimetria e curtose.

Diferentemente da metodologia mais comumente utilizada, que leva em consideração a volatilidade histórica com horizontes de tempo predeterminados, tornando difícil a comparação da volatilidade implícita de em determinada opção com a sua volatilidade histórica, Burghardt e Lane (1990) constroem estruturas a termo de volatilidade para opções de eurodólar, que é o dólar depositado fora dos Estados Unidos, seja por um banco norte-americano, seja por um banco estrangeiro e de iene japonês. Os autores separam os contratos do ativo-objeto em períodos de um mês, três meses, seis meses, um ano e dois anos. A partir dos dados máximos e mínimos os autores constroem os cones com a volatilidade histórica ao longo do tempo, e com os dados de volatilidade implícitas sobrepostos sobre os mesmos, montam operações de compra ou de venda de volatilidade.

Além de Burghardt e Lane (1990), Sinclair (2008) mostra que devido a este formato cônico onde quanto menor o tempo até o exercício maior a amplitude da volatilidade que vai se estreitando quando o tempo até o exercício vai aumentando, a figura toma uma forma de cone.

Porém, Hodges e Tompkins (2002) encontram um viés no trabalho de Burghardt e Lane (1990), viés este ocasionado pela utilização de dados sobrepostos, tendo em vista que há uma generalização do processo estocástico do ativo objeto. Para os autores, a variância da variância é afetada por esta sobreposição de bases, para uma melhor estimativa desta variável, ela deve ser multiplicada pelo seguinte fator de ajuste:

$$m = \frac{1}{1 - \frac{h}{n} + \frac{h^2 - 1}{3n^2}} \quad (18)$$

Onde:

h= comprimento de cada intervalo de tempo

$n = (T - h) + 1$

T= total de observações

No estudo desenvolvido por Cerqueira (2010), a representação gráfica das estatísticas com o valor da volatilidade histórica no eixo das coordenadas e o tempo até o exercício nas abscissas mostra que a volatilidade para opções de curto prazo realmente apresenta uma amplitude maior do que para opções de longo prazo. Porém, no que tange aos resultados das operações realizadas com o cone de volatilidade, o autor tem uma conclusão divergente da de Stein (1989), pois não foi verificada que a expectativa de variações superiores na volatilidade de longo prazo diante de variações na volatilidade de curto prazo.

Javaheri (2005) e Sinclair (2008) observam que o cone com as medidas de assimetria e curtose também podem ser observados e utilizados para oportunidades de compra ou de venda de determinado tipo de opção, embora somente mostrem a existência deles, por não ser possível efetuar um cálculo de curtose e assimetria implícitas para que fossem simuladas operações com estas variáveis. Os autores, inclusive, elaboram uma macro no Excel, onde a cada período de tempo até o exercício são calculadas as medidas de assimetria e curtose históricas afim de que fossem utilizadas para a precificação pelo modelo de Corrado e Su (1996).