# 6. Modelagem Matemática para Solução por Método Exato

Os primeiros modelos a tratarem do Problema de Programação da Produção datam das décadas de 50 e 60. Destes modelos, destacam-se os modelos propostos por Manne (1960) e Wagner (1959). Ambos são modelos de programação linear inteira mista, propostos inicialmente para o problema de *job shop*.

O modelo de Wagner (1959) usa o problema clássico de alocação de tarefas para assinalar trabalhos a posições na seqüência de produção. Já o modelo de Manne (1960) utiliza um par de restrições dicotômicas para controlar a ordem relativa dos trabalhos dentro da seqüência de produção.

Vários modelos baseados em Wagner (1959) e Manne (1960) são encontrados na literatura para os diversos problemas de programação da produção. Stafford-Jr. et al. (2005) fazem uma avaliação comparativa entre diversos modelos baseados nessas formulações para o problema de *flowshop* com o objetivo de minimizar a data de término da última operação a ser processada.

Neste capítulo, será apresentado o Problema a ser estudado e as características levadas em consideração para fins de modelagem e em seguida serão apresentados os resultados obtidos com a resolução do modelo através do *software* de otimização AIMMS. Posteriormente será feita uma análise sem levar em conta as datas prometidas, com o objetivo de se minimizar o *makespan* da sequência a partir da minimização dos Tempos de Preparação de Máquina, utilizando a metodologia do Problema do Caixeiro Viajante.

## 6.1. O Problema Estudado

O problema estudado nesta dissertação é o problema de sequenciamento em uma máquina com penalidades por antecipação e atraso da produção com tempo de preparação da máquina dependente da sequência de produção e datas prometidas para cada trabalho, possuindo as seguintes características:

(a) Uma máquina deve processar um conjunto de *n* trabalhos.

(b) Cada trabalho *i* possui um tempo de processamento $t_i$ e uma data prometida, $d_i$, desejada para o término do processamento.

(c) A máquina executa no máximo um trabalho por vez e, uma vez iniciado o processamento de um trabalho, o mesmo deve ser finalizado, ou seja, não é permitida a interrupção do processamento.

(d) Todos os trabalhos estão disponíveis para processamento no tempo 0.

(e) Quando um trabalho *j* é sequenciado imediatamente após um trabalho *i*, é necessário um tempo $S_{ij}$ para a preparação da máquina. Assume-se, ainda, que a máquina não necessita de tempo de preparação inicial, ou seja, o tempo de preparação da máquina para o processamento do primeiro trabalho na seqüência é igual a 0.

(f) É permitido tempo ocioso entre a execução de dois trabalhos consecutivos.

(g) Os trabalhos devem ser finalizados o mais próximo da data prometida. Se o trabalho *i* for finalizado antes de $d_i$ então há um custo de manutenção de estoque. Caso o trabalho seja finalizado após $d_i$, então há associado um custo por atraso. Os trabalhos que forem finalizados na data prometida não proporcionarão nenhum custo adicional.

(h) Os custos unitários por antecipação e atraso da produção são dependentes dos trabalhos, ou seja, cada trabalho possui um custo de antecipação $\alpha_i$ e um custo de atraso $\beta_i$.

(i) O objetivo a ser alcançado com a resolução deste problema é a minimização do somatório dos custos de antecipação e atraso da produção.

## 6.2. Modelo

O modelo matemático desenvolvido foi baseado no trabalho de Manne (1960).

Sejam $n$ o número de trabalhos a serem processados, $t_i$ o tempo de processamento do trabalho $i$, $s_i$ o tempo de início do processamento do trabalho $i$ ($s_i \geq 0$) e $S_{ij}$ o tempo de preparação da máquina necessário para processar o trabalho $j$ depois do trabalho $i$.

Diferentemente de Bustamante (2006), foram utilizados dois trabalhos fictícios, 0 (zero) e n + 1, de tal forma que 0 antecede imediatamente a primeira tarefa e n + 1 sucede imediatamente o último trabalho na seqüência de produção. Admite-se que $t_0$ e $t_{n+1}$ são iguais a zero e que $S_{0i} = 0$ e $S_{i\,n+1} = 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$.

Para garantir que haja um tempo suficiente para completar um trabalho $i$ antes de começar um trabalho $j$, caso este último trabalho $j$ seja processado imediatamente após um trabalho $i$, sem nenhum trabalho intermediário, é necessário impor as restrições (6.1) e (6.2). Dados dois trabalhos $i$ e $j$, pode-se estabelecer uma restrição dependendo da precedência: caso $i$ preceda $j$, aplica-se (6.1) e caso $j$ preceda $i$, aplica-se (6.2).

$$s_j \geq s_i + t_i + S_{ij} \qquad \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n,\ \forall\, j = 0, 1, 2, \ldots, n+1 \text{ e } i \neq j \qquad (6.1)$$

ou

$$s_i \geq s_j + t_j + S_{ji} \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n+1,\ \forall\, j = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ e } i \neq j \qquad (6.2)$$

Como estas restrições são disjuntas, faz-se necessária a introdução de uma variável $y_{ij} \in [0; 1]$ para que esta disjunção não apareça no modelo matemático. A variável $y_{ij}$ é definida da seguinte forma: $y_{ij} = 1$, se o trabalho $j$ é seqüenciado imediatamente após o trabalho $i$ e $y_{ij} = 0$, caso contrário.

Desta maneira, as restrições (6.1) e (6.2) podem ser substituídas pelas restrições (6.3). Neste novo conjunto de restrições, M é um valor muito grande.

$$s_j - s_i - (M + S_{ij})\, y_{ij} \geq t_i - M \qquad \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n,\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n+1 \text{ e } i \neq j \quad (6.3)$$

Desta forma, quando $y_{ij} = 1$, a restrição (6.3) torna-se:

$$s_j \geq s_i + t_i + S_{ij} \tag{6.4}$$

Por outro lado, quando $y_{ij} = 0$, a restrição (6.3)

$$s_j - s_i - t_i \geq -M \tag{6.5}$$

A restrição (6.3) é, desta forma, desativada, pois a equação (6.5) é inócua, ou seja, a parcela $(s_j - s_i - t_i)$ será sempre maior que $-M$.

Estas restrições garantem que cada trabalho tenha somente um trabalho imediatamente antecessor e um trabalho imediatamente sucessor, respectivamente. Além disso, estas restrições eliminam o problema da desigualdade triangular.

$$\sum_{i=0,\, i\neq j}^{n} y_{ij} = 1 \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{6.6}$$

$$\sum_{j=1,\, i\neq j}^{n+1} y_{ij} = 1 \qquad \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{6.7}$$

Seja $d_i$ a data prometida do trabalho $i$, $E_i$ o tempo de antecipação do trabalho $i$ e $T_i$ o tempo de atraso do trabalho $i$. As restrições (6.8) a (6.11) garantem que o tempo de antecipação $E_i$ seja o máximo entre 0 e $d_i - t_i - s_i$ e que o tempo de atraso $T_i$ seja o máximo entre 0 e $s_i + t_i - d_i$.

$$s_i + t_i + E_i \geq d_i \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.8}$$

$$s_i + t_i - T_i \leq d_i \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.9}$$

$$E_i \geq 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.10}$$

$$T_i \geq 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.11}$$

Sejam $\alpha_i$ e $\beta_i$ os custos de antecipação e atraso da produção do trabalho $i$ por unidade de tempo, respectivamente. O custo total por antecipação é dado por $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$ e o custo total por atraso é dado por $\sum_{i=1}^{n} \beta_i T_i$. A função objetivo, que consiste em minimizar o somatório dos custos totais de antecipação e atraso da produção, é dada pela equação (6.12).

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i E_i + \beta_i T_i) \tag{6.12}$$

Resumindo, as variáveis de decisão do modelo proposto são:

- $s_i$: tempo de início do processamento do trabalho *i*.
- $y_{ij}$ : variável que determina a seqüência de produção, se $y_{ij}=1$ o trabalho *j* é processado depois do trabalho *i* e 0 caso contrário.
- $E_i$: tempo de antecipação do trabalho *i*.
- $T_i$: tempo de atraso do trabalho *i*.

E o modelo correspondente de Programação Linear Inteira Mista é:

$$\text{minimizar } Z = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i E_i + \beta_i T_i) \tag{6.13}$$

$$\text{sujeito a:} \quad s_j - s_i - (M + S_{ij})\, y_{ij} \geq t_i - M \qquad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ e } i \neq j \tag{6.14}$$

$$\sum_{i=0,\, i\neq j}^{n} y_{ij} = 1 \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{6.15}$$

$$\sum_{j=1,\, i\neq j}^{n+1} y_{ij} = 1 \qquad \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{6.16}$$

$$s_i + t_i + E_i \geq d_i \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.17}$$

$$s_i + t_i - T_i \leq d_i \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.18}$$

$$s_i \geq 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.19}$$

$$E_i \geq 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.20}$$

$$T_i \geq 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.21}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\ i, j = 0, 1, 2, \ldots, n+1 \tag{6.22}$$

A função objetivo, representada pela equação (6.13), tem como critério de otimização a minimização dos custos de antecipação e atraso. As restrições (6.14) definem a sequência de operações sobre o recurso (máquina) utilizado. As restrições (6.15) e (6.16) garantem que cada trabalho tenha somente um trabalho imediatamente antecessor e um trabalho imediatamente sucessor, respectivamente. As restrições (6.17) e (6.18) definem os valores do atraso e da antecipação de acordo com a data prometida desejada para o término do processamento do trabalho *i*, caso estes existam. As restrições (6.19) a (6.22) definem o domínio das variáveis do problema.