4
POROELASTICIDADE

4.1.
Introdução

Esta teoria que descreve o comportamento acoplado entre os fluidos e sólidos em meios porosos foi primeiramente descrita por Biot que teve início com uma série de artigos publicados a partir de 1941. Posteriormente, outros estudos, visando mais especificamente o comportamento acoplado fluido-sólido, onde as compressibilidades de meios rochosos sejam relevantes (caso de reservatórios de petróleo, que são compostos basicamente por fluido e rocha), foram realizados, objetivando validar a teoria proposta por Biot (1941), como em Geerstma (1957).

Na teoria de poroelasticidade o meio poroso é considerado elástico linear, isotrópico e considera os poros totalmente ocupados por um fluído. A síntese feita neste tópico baseia - se no trabalho de Biot (1941).

O interesse deste capítulo é mostrar de uma forma sucinta a teoria de poroelasticidade, descrevendo sucintamente o processo de acoplamento baseado na teoria poroelasticidade de Biot (1941).

Além deste assunto, encontra-se uma discussão sobre a solução adotada pelo programa de elementos finitos Abaqus.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

4.2.
Equações Governantes do Problema de Fluxo

As equações governantes do problema poroelástico têm duas parcelas:

- Parcela de Fluxo
- Parcela Mecânica

Neste tópico, será analisada a parcela de fluxo, que se obtém combinando as equações da continuidade, lei de Darcy e equação de estado (que considera análise de tensões).

4.2.1.
Equação da Continuidade

Para resolver o problema de fluxo em meios porosos, é preciso satisfazer o principio físico fundamental da conservação de massa. A equação de continuidade descreve a variação de massa dentro do meio poroso devido a esse fluxo.

Adotando um volume de controle de dimensões infinitesimais dx, dy, dz, é feito o balanço de massa nas faces do elemento para a direção X, utilizando o conceito de velocidade de Darcy, como é mostrado na Figura 4.1. O caso mais geral é aquele em que ocorre a movimentação do fluido nas três direções, x, y e z. O fluido penetra no meio poroso através de uma face perpendicular a cada uma das direções e sai pela face oposta. A Figura 4.1 ilustra a movimentação do fluido na direção x.

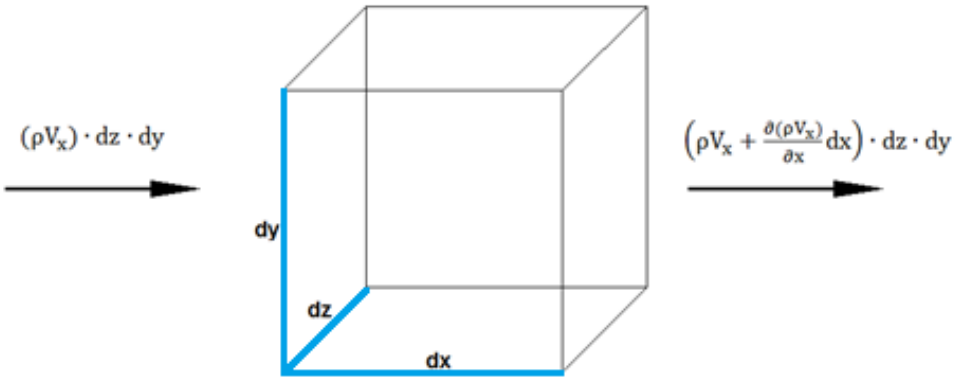

Figura 4.1: Fluxo de Fluido Através de um elemento de meio poroso.

Fazendo o balanço de massa nas três direções, temos que a massa de fluido que entra no volume de controle menos a que saí é igual ao acúmulo ou diminuição de massa neste ou expressado matematicamente:

$$\left\{\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}\right\} \cdot dx \cdot dz \cdot dy = -\frac{\partial(\rho V_p)}{\partial t} \qquad (4.1)$$

ou

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial i} V_t = -\frac{\partial(\rho V_p)}{\partial t} \qquad (4.2)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

Onde:

V_x, V_y e V_z, são as velocidades de Darcy nas direções x, y e z.

Assumindo, que o espaço poroso está totalmente preenchido por fluido, a variação do volume de poros é igual à variação do volume de fluido.

A porosidade é definida como:

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} \tag{4.3}$$

Onde:

V_p: Volume dos poros.

V_t: Volume total do elemento.

Substituindo a equação (4.3) em (4.1), tem-se:

$$\left\{\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}\right\} = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \tag{4.4}$$

Finalmente a equação (4.4) é a chamada equação de continuidade, é dito que, a diferença entre a massa que entra e a massa que sai nas três direções de fluxo é igual à variação de massa dentro do meio poroso.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

4.2.2. Equação de Darcy

Nesta etapa seguinte, procura-se associar a equação da continuidade com uma lei que rege o transporte de fluido no meio poroso. Esta lei relaciona a velocidade aparente do fluido com os gradientes de pressão, ou mais genericamente com os gradientes de potencial, através da equação:

$$V_s = -\frac{k_s \gamma}{\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial_s} \tag{4.5}$$

Onde:

s: Trajetória de fluxo qualquer.

k_s: Permeabilidade do meio poroso na direção do fluxo.

γ: Peso específico do fluido.

Φ: Potencial de fluxo.

O potencial Φ é o agente responsável e propulsor do deslocamento do fluido no meio poroso. Os fluidos se deslocam sempre de pontos de maior potencial para pontos de menor potencial.

Usando a lei de Darcy, as velocidades aparentes nas três direções de fluxo são dadas pelas seguintes expressões:

$$V_x = -\frac{k_x \gamma}{\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial_x} \tag{4.6}$$

$$V_y = -\frac{k_y \gamma}{\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial_y} \tag{4.7}$$

$$V_z = -\frac{k_z \gamma}{\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial_z} \tag{4.8}$$

Quando as expressões de velocidades são introduzidas na equação de continuidade, (Eq. 4.4), obtém-se uma nova forma para a equação diferencial de escoamento:

$$\frac{\partial}{\partial_x}\left(\rho\frac{k_x \gamma}{\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial_x}\right) + \frac{\partial}{\partial_y}\left(\rho\frac{k_y \gamma}{\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial_y}\right) + \frac{\partial}{\partial_z}\left(\rho\frac{k_z \gamma}{\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial_z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \tag{4.9}$$

4.2.3. Equação de Estado

Neste tópico, será inserida a análise de tensões no cálculo da porosidade e variação da massa específica do fluido devido à variação de pressão.

Para isto serão utilizadas as equações desenvolvidas no item 1.2 e 1.2.1. A convenção de sinais neste caso será considerando tensões de tração como positivas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

A análise de tensões será inserida através da variação da porosidade no tempo. A continuação mostra-se as equações, segundo a abordagem feita por Frydman (1996). O aumento da massa de fluido pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} \phi_0 \tag{4.10}$$

Onde:

ρ_0: Massa específica do fluido.

ϕ_0: Porosidade em um instante de referência.

Na equação (4.10), o termo $\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{t}} \rho_0$ corresponde à variação da massa de fluido, associada ao aumento do volume poroso, e $\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} \phi_0$ corresponde à expansão do fluido.

A variação do volume poroso ($\Delta\phi = \phi - \phi_0$) pode ser descomposta em duas partes:

1) Variação volumétrica do esqueleto

$$\left(\frac{\Delta \mathrm{V}}{\mathrm{V}}\right) = \Delta \varepsilon_{\mathrm{V}} = \mathbf{m}^{\mathbf{T}} \Delta \varepsilon \tag{4.11}$$

2) Variação do volume dos grãos

Assumindo um comportamento elástico para os grãos, no cálculo da variação volumétrica, o carregamento foi descomposto em dois componentes:

(i) Componente 1, que corresponde ao incremento de tensão efetiva de Terzaghi ($\Delta\sigma_{\mathrm{I}} = \Delta\sigma + \mathbf{m}\Delta \mathrm{p}$);

(ii) Componente 2, que corresponde ao incremento $\Delta \mathrm{p}$ de pressão confinante e da pressão de poros.

Para a componente 1, tem-se:

$$\left(\frac{\Delta \mathrm{V_s}}{\mathrm{V}}\right)_1 = \frac{1}{3\mathrm{k_s}} \mathbf{m}^{\mathbf{T}} (\Delta\sigma + \mathbf{m}\, \Delta \mathrm{p}) \tag{4.12}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

A seguir mostram-se as equações necessárias, para continuar com a demonstração da equação de estado. Sabe-se que a tensão efetiva é igual:

$$\sigma = \sigma' - \left(\mathbf{m} - \frac{\mathbf{D_T m}}{\mathbf{3k_s}}\right) \mathrm{p} \tag{4.13}$$

É utilizada uma relação constitutiva que considera as tensões efetivas e as deformações do esqueleto independente da pressão de poros p_0, e pode ser escrita como:

$$\sigma' = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma'_0 \tag{4.14}$$

Substituindo a equação (4.13), na equação (4.12), tem-se:

$$\left(\frac{\Delta \mathrm{V_s}}{\mathrm{V}}\right)_1 = \frac{1}{3\mathrm{k_s}} \mathbf{m^T} \Delta\sigma' + \frac{1}{9\mathrm{k_s}^2} \mathbf{m^T D_T\, m}\, \Delta \mathrm{p} \tag{4.15}$$

Substituindo a equação (4.14), na equação (4.15), tem-se:

$$\left(\frac{\Delta \mathrm{V_s}}{\mathrm{V}}\right)_1 = \frac{1}{3\mathrm{k_s}} \mathbf{m^T D_T} \Delta\varepsilon + \frac{1}{9\mathrm{k_s}^2} \mathbf{m^T D_T\, m}\, \Delta \mathrm{p} \tag{4.16}$$

Para a componente 2, tem-se:

$$\left(\frac{\Delta \mathrm{V_s}}{\mathrm{V}}\right)_2 = -\frac{(1 - \phi_0)}{\mathrm{k_s}} \Delta \mathrm{p} \tag{4.17}$$

Adicionando-se as componentes 1 e 2 segundo a equação abaixo:

$$\left(\frac{\Delta \mathrm{V_s}}{\mathrm{V}}\right) = \left(\frac{\Delta \mathrm{V_s}}{\mathrm{V}}\right)_1 + \left(\frac{\Delta \mathrm{V_s}}{\mathrm{V}}\right)_2 \tag{4.18}$$

Obtém-se a variação volumétrica dos grãos:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

$$\left(\frac{\Delta V_s}{V}\right) = \frac{1}{3k_s}\mathbf{m^T D_T}\Delta\varepsilon + \frac{1}{9{k_s}^2}\mathbf{m^T D_T\, m}\,\Delta p - \frac{(1-\phi_0)}{k_s}\Delta p \qquad (4.19)$$

Enfim, a variação do volume poroso pode ser calculada com base na variação do volume do esqueleto subtraída da expansão dos grãos, conforme as equações abaixo:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\Delta V}{V}\right) - \left(\frac{\Delta V_s}{V}\right) \qquad (4.20)$$

$$\Delta\phi = \left[\mathbf{m^T} - \frac{1}{3k_s}\mathbf{m^T D_T}\right]\Delta\varepsilon + \left[\frac{(1-\phi_0)}{k_s} - \frac{1}{9{k_s}^2}\mathbf{m^T D_T\, m}\right]\Delta p \qquad (4.21)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[\mathbf{m^T} - \frac{1}{3k_s}\mathbf{m^T D_T}\right]\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \left[\frac{(1-\phi_0)}{k_s} - \frac{1}{9{k_s}^2}\mathbf{m^T D_T\, m}\right]\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (4.22)$$

A expansão volumétrica do fluido $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\phi_0}$, pode ser calculada por:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\phi_0 = \rho_0\frac{\phi_0}{k_f}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (4.23)$$

Onde:

k_f: Modulo de bulk do fluido.

Fazendo a substituição da equação (4.10) pelas equações (4.22) e (4.23), temos:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \rho_0\left[\mathbf{m^T} - \frac{1}{3k_s}\mathbf{m^T D_T}\right]\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \rho_0\left[\frac{(1-\phi_0)}{k_s} + \frac{\phi_0}{k_f} - \frac{1}{9{k_s}^2}\mathbf{m^T D_T\, m}\right]\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (4.24)$$

Substituindo a equação (4.24) na equação de continuidade (4.4), tem-se a equação de fluxo que considera a análise de tensões:

$$\left[\mathbf{m^T} - \frac{1}{3k_s}\mathbf{m^T D_T}\right]\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \left[\frac{(1-\phi_0)}{k_s} + \frac{\phi_0}{k_f} - \frac{1}{9{k_s}^2}\mathbf{m^T D_T\, m}\right]\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla^T\left(\frac{1}{\mu}k\nabla(p+\rho gh)\right) = 0 \qquad (4.25)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

Para ver um estudo mais detalhado das equações e do método dos elementos finitos aplicados à poroelasticidade, podem-se citar alguns trabalhos na literatura (Frydman, 1996; Ferreira, 1996).

4.3. Equações Governantes do Problema de Tensões

Neste tópico, será analisada a parcela mecânica do problema de poroelásticidade. Combinando as equações de equilíbrio em termos de tensões efetivas e pressão de poros (considerando o principio das tensões efetivas de Terzaghi), relação tensão-deformação, relação deslocamento-deformação, obtém-se a equação de equilíbrio em termos de deslocamento e pressão de poros.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

4.3.1. Equações de Equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial \mathrm{z}} = 0 \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial \mathrm{z}} = 0 \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \mathrm{z}} = 0 \tag{4.28}$$

Não foram consideradas as forças de corpo nas equações de equilíbrio.

4.3.2.
Relações Deformação-Deslocamento

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} \qquad (4.29)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} \qquad (4.30)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}} \qquad (4.31)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\right) \qquad (4.32)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}}\right) \qquad (4.33)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}}\right) \qquad (4.34)$$

Nas equações de equilíbrio 4.26, 4.27 e 4.28 não foram consideradas as forças de corpo bem como efeitos de inércia.

O uso das equações 4.29 a 4.34 implica na aceitação de pequenas deformações. A pressão de fluido p afeta somente as deformações normais e de uma mesma quantidade, isto em virtude da hipótese de isotropia. As deformações cisalhantes são função somente das tensões cisalhantes independendo da pressão de poros p. É mais conveniente expressar-se as tensões em função das deformações (Ferreira, 1996).

Finalmente, com o sistema de equações formado por 4.26 até 4.34 chega-se a:

$$\sigma_x = 2\mathrm{G}\varepsilon_x + \lambda\varepsilon - \alpha\mathrm{p} \qquad (4.35)$$

$$\sigma_y = 2\mathrm{G}\varepsilon_y + \lambda\varepsilon - \alpha\mathrm{p} \qquad (4.36)$$

$$\sigma_z = 2\mathrm{G}\varepsilon_z + \lambda\varepsilon - \alpha\mathrm{p} \qquad (4.37)$$

Onde:

ε_{ij}: Componentes do tensor das deformações.

σ_{ij}: Componentes do tensor das tensões totais

λ: Parâmetro de Lamé.

G: Módulo de cisalhamento.

α: Coeficiente de Biot.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

O parâmetro de Lamé se relaciona com outras constantes elásticas da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{3\mathrm{v}K}{1+\mathrm{v}} = \frac{2\mathrm{v}G}{1-2\mathrm{v}} = K - \frac{2}{3}G \tag{4.38}$$

Onde:

K: Módulo de deformação volumétrica drenado do meio poroso.

Substituindo-se as equações 4.35 a 4.37, nas equações 4.26 a 4.28, chega-se nas equações de equilíbrio em termos do campo de deslocamentos e pressão:

$$G\nabla^2\mathrm{u} + \frac{G}{1-2\lambda}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathrm{x}} - \alpha\frac{\partial\mathrm{p}}{\partial\mathrm{x}} = 0 \tag{4.39}$$

$$G\nabla^2\mathrm{v} + \frac{G}{1-2\lambda}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathrm{y}} - \alpha\frac{\partial\mathrm{p}}{\partial\mathrm{y}} = 0 \tag{4.40}$$

$$G\nabla^2\mathrm{w} + \frac{G}{1-2\lambda}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathrm{z}} - \alpha\frac{\partial\mathrm{p}}{\partial\mathrm{z}} = 0 \tag{4.41}$$

Onde:

u, v, w: Componentes do vetor dos deslocamentos.

4.4. Solução do problema no Abaqus

O problema que será resolvido é um problema complexo, porque tem que resolver simultaneamente as equações governantes do problema de fluxo e tensões (acoplamento hidro-mecânico), como é mostrado nas equações descritas anteriormente.

A complexidade das equações governantes da poroelasticidade torna a geração de soluções analíticas uma tarefa complicada. A técnica numérica é então o meio mais apropriado para a obtenção de resultados. O programa

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA

Abaqus pode resolver muitos problemas de engenharia, e foi selecionado para resolver este problema, no presente caso, um problema acoplado.

O acoplamento hidro–mecânico, consiste na solução de um sistema de equações diferenciais de equilíbrio e balanço de massa de um meio poroso. De acordo com o manual do Abaqus, o meio poroso é constituído por matéria sólida e seus vazios preenchidos por um líquido e um gás. As equações de equilíbrio e continuidade discretizadas são solucionadas através do método de Newton. No problema de fluxo, a lei de transporte governante é a lei de Darcy (Manual do Abaqus-V6.9, 2009).

Segundo o manual do Abaqus as equações governantes do processo de deformação e difusão de fluído são:

Equação de equilíbrio:

$$K'u + L'p = F \tag{4.42}$$

Equação de fluxo:

$$B'\frac{du}{dt} + H'p = Q' \tag{4.43}$$

Onde:

K': Matriz de rigidez

H': Matriz de fluxo

L', B': Matrizes que permitem o acoplamento.

Combinando as equações descritas anteriormente, se tem um conjunto de equações diferenciais ordinárias no tempo e passam a ser resolvidas de forma matricial (MEF). Existem dois tipos de aproximação para resolver este sistema de equações. Uma aproximação seria solucionar primeiro um conjunto de equações, depois com o resultado da primeira equação, resolver a segunda. Com o resultado da segunda equação retorna-se para a primeira e verifica-se a variação de resultados. Se a variação é mínima, a solução por este processo iterativo termina. Caso contrário, o processo iterativo continua até que a variação de resultados seja mínima. O segundo tipo de solução é resolver as duas equações ao mesmo tempo, este modo é o adotado pelo programa (Silvestre, 2004).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921920/CA