

6

Vibrações Estocásticas em Sistemas Contínuos

6.1

Introdução

Este capítulo da dissertação é dedicado ao estudo de vibrações de sistemas contínuos (barras e vigas) submetidos a forçamentos caracterizados como processos estocásticos.

A análise feita é baseada no método de Monte Carlo. Dadas as características estatísticas do forçamento, pretende-se obter aproximações para média e variância da resposta em deslocamento. Para cada realização do forçamento, o sistema é discretizado através do Método dos Elementos Finitos e uma aproximação para solução determinística do problema é obtida utilizando o Método de Galerkin.

Por isso, a primeira parte deste capítulo mostra a modelagem determinística de vigas e barras, introduzindo os conceitos de modos de vibração e frequências naturais. É discutido também como as condições de contorno do problema são incorporadas às equações de movimento.

A seção seguinte trata do método dos elementos finitos, formulação fraca do problema, escolha das funções base e montagem das matrizes globais e elementares.

Na última seção, é mostrado um exemplo de um sistema mecânico (um riser de perfuração) sujeito a carregamentos considerados aleatórios. São considerados dois carregamentos caracterizados como processos estocásticos correlacionados.

Devido a correlação dos forçamentos, as amostras utilizadas no Método de Monte Carlo são geradas através do algoritmo de Metrópolis - Hastings (Monte Carlo com Cadeia de Markov) apresentado no terceiro capítulo.

6.2

Modelagem de Barras e Vigas

Nesta seção do trabalho é apresentado a modelagem matemática dos problemas de barras e vigas.

6.2.1 Barras

Uma barra é uma estrutura mecânica descrita pelo deslocamento longitudinal [28]. Considere um corpo unidimensional no intervalo $[0, L]$, com densidade ρ , área de seção transversal A e módulo de elasticidade E . Seja $u(x, t)$ a posição do ponto x no instante t e $f(x, t)$ a força externa ao sistema. Na figura é mostrado um exemplo de barra (fixa em uma extremidade e livre na outra).

Define-se por:

1. $u(\cdot, t)$ a configuração do corpo no instante t ;
2. $u(x, \cdot)$ como a trajetória do ponto x .

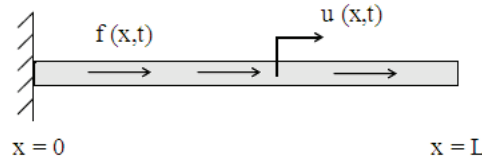


Figura 6.1: Exemplo de Barra fixa-livre

A equação da dinâmica da barra é dada por (6-1) [24]:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x}(E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)) = f(x, t). \quad (6-1)$$

Considerando-se constantes a seção transversal da barra e as propriedades do material, a equação (6-1) reduz-se a:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t). \quad (6-2)$$

Na equação (6-1) ainda devem ser incluídas as informações sobre as condições de contorno (ou seja, extremidades 0 e L) e condições iniciais (posição e velocidade de todos os pontos no início do processo).

Neste trabalho são mostradas as seguintes condições de contorno: livre - livre; fixa-livre; fixa-extremidade direita com mola k_e ; fixa-extremidade direita com massa m_e .

Para resolver a equação diferencial (6-1) no caso em que as forças atuantes na barra são nulas e, poder assim determinar as frequências e modos de vibração, aplica-se o método de Separação de Variáveis. Dessa forma, procura-se uma solução $u(x, t)$ que seja o produto de duas funções, uma dependente apenas da posição x e outra dependente somente do instante t :

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (6-3)$$

Substituindo (6-3) em (6-1) (com $f = 0$) e representando a derivada em relação a t por $\frac{\partial}{\partial t} = \dot{}$ e a derivada em relação a x por $\frac{\partial}{\partial x} = '$, obtém-se:

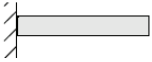
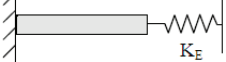
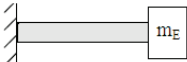
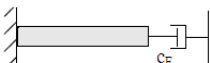
Configuração	$x = 0$	$x = L$
	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$
	$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$
	$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k_E u(L, t)$
	$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -m_E \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2}$
	$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -c_E \frac{\partial u(L, t)}{\partial t}$

Tabela 6.1: Condições de contorno e configurações de barras.

$$X\ddot{T} = \frac{E}{\rho} X''T. \quad (6-4)$$

Observando-se (6-4), verifica-se que a equação pode ser separada em duas equações diferenciais (6-5) e (6-6). Fazendo-se $c^2 = \frac{E}{\rho}$:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (6-5)$$

$$\ddot{T} + c^2 \lambda^2 T = 0. \quad (6-6)$$

Para determinar a solução dessas duas equações deve-se considerar as condições de contorno e condições iniciais do problema. Por exemplo, supondo que a barra é livre-livre, e que $u(x, 0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 &\longrightarrow X'(0)T(t) = 0 \longrightarrow X'(0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 &\longrightarrow X'(L)T(t) = 0 \longrightarrow X'(L) = 0. \end{aligned} \quad (6-7)$$

A partir da equação diferencial (6-5) pode-se determinar as frequências e modos de vibração da barra, ou seja, determinar o par (λ, X) tal que $X \neq 0$. Para isso parte-se da solução geral da primeira equação diferencial (6-5) dada por:

$$X(x) = B_1 \cos \lambda x + B_2 \sin \lambda x \quad (6-8)$$

$$X'(x) = -B_1 \lambda \sin \lambda x + B_2 \lambda \cos \lambda x.$$

Substituindo a condição de contorno $X'(0) = 0$, na equação de X' verifica-se que $B_2 = 0$. Assim, a solução de $X(x)$ reduz-se a:

$$X(x) = B_1 \cos \lambda x. \quad (6-9)$$

Substituindo a segunda condição de contorno $X'(L) = 0$:

$$-B_1 \lambda \sin \lambda L = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin \lambda L = 0. \quad (6-10)$$

Como $B_1 \neq 0$, e $\lambda = 0$ corresponde ao movimento de corpo rígido da barra, é necessário que: $\sin \lambda L = 0$. Existem infinitas possibilidades de λ que atendem a essa condição. Representando cada uma delas pelo índice n :

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6-11)$$

Para cada λ_n define-se uma solução X_n associada (6-12), de forma que a existem infinitas soluções $X_n(x)$.

$$X_n(x) = B_1 \cos \lambda_n x \quad n = 1, 2, \dots \quad (6-12)$$

Para a solução geral da segunda equação diferencial (6-6), também existem infinitas soluções na forma:

$$T_n(t) = C_{1n} \cos \lambda_n ct + C_{2n} \sin \lambda_n ct. \quad (6-13)$$

Assim, cada a solução do problema pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x) T_n(t) \\ u_n(x, t) &= \cos \lambda_n x (D_{1n} \cos \lambda_n ct + D_{2n} \sin \lambda_n ct) \end{aligned} \quad (6-14)$$

onde:

$$D_{1n} = B_{1n} C_{1n} \quad D_{2n} = B_{1n} C_{2n}. \quad (6-15)$$

A solução geral da equação de movimento da barra é dada pela superposição de todas as soluções:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n x) (D_{1n} \cos(\lambda_n ct) + D_{2n} \sin(\lambda_n ct)) \quad (6-16)$$

sendo $\lambda_n c$ a n -ésima frequência natural do sistema e, os coeficientes D_{1n} e D_{2n} calculados pelas condições iniciais de posição e velocidade da viga, como

mostrado a seguir.

Substituindo $u(x, 0) = u_0(x)$ em (6-16), multiplicando a expressão por $\sin(\lambda_m x)$ e posteriormente integrando no domínio de $[0, L]$, chega-se ao seguinte resultado:

$$\int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_m x) dx = \int_0^L u_0(x) \cos(\lambda_m x) dx \quad (6-17)$$

O lado esquerdo de (6-17) vale $L/2$ quando $n = m$ e zero caso contrário. Dessa forma, o coeficiente D_{1n} vale:

$$D_{1n} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos(\lambda_n x) dx \quad (6-18)$$

Substituindo a segunda condição inicial em (6-16), multiplicando a expressão por $\cos(\lambda_m x)$ e integrando no domínio de $[0, L]$, igualmente fez-se anteriormente, pode-se determinar o coeficiente D_{2n}

$$\int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} c \lambda_n \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_m x) dx = \int_0^L v_0(x) \cos(\lambda_m x) dx. \quad (6-19)$$

$$D_{2n} = \frac{2}{L \lambda_n c} \int_0^L v_0(x) \cos(\lambda_n x) dx \quad (6-20)$$

Assim, a solução geral da dinâmica da barra é definida por (6-16), (6-18) e (6-20). As frequências naturais e os modos de vibração deste sistema são:

$$\omega_n = c \lambda_n = c \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6-21)$$

$$\phi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6-22)$$

6.2.2

Vigas

Vigas são estudadas usualmente através de dois modelos: Euler-Bernoulli e Timoshenko [28] [25]. No modelo de Euler-Bernoulli, o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados, ou seja, as seções transversais planas permanecem planas e perpendiculares à linha neutra após a deflexão. Já no modelo de Timoshenko, considera-se que as seções transversais planas permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares à linha neutra.

Nesta dissertação, é utilizado o modelo de Euler-Bernoulli. Considera-se que a viga possui comprimento L , massa por unidade de comprimento $\rho(x)$, área de seção transversal $A(x)$, momento de inércia da área da seção $I(x)$ e módulo de elasticidade $E(x)$. Sobre a viga atua uma força externa $f(x, t)$, e assim como para as barras supõe-se que:

1. $u(\cdot, t)$ é a configuração do corpo no instante t ;
2. $u(x, \cdot)$ é a trajetória do ponto x .

A figura (6.2) mostra uma seção da viga onde atuam forças cortantes (V) e momentos fletores (M). Fazendo-se o balanço de quantidade de movimento na seção e posteriormente fazendo o tamanho dessa seção tender à zero, é possível obter a equação da dinâmica da viga (6-25).

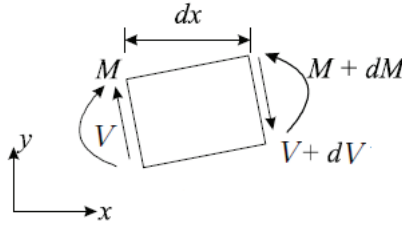


Figura 6.2: Seção de viga : forças cortantes e momentos.

Considera-se as seguintes relações:

$$V = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (6-23)$$

$$M = E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6-24)$$

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) = f(x, t). \quad (6-25)$$

Igualmente ao problema de barras, na equação (6-25) ainda devem ser incluídas as informações sobre as condições de contorno (ou seja, extremidades 0 e L) e condições iniciais (posição e velocidade de todos os pontos no início do processo).

Neste trabalho são mostradas as seguintes condições de contorno:

1. livre-livre;
2. extremidade engastada;
3. extremidade esquerda engastada - extremidade direita com mola k_e ;
4. extremidade esquerda engastada - extremidade direita com massa m_e ;

Para resolver a equação diferencial (6-25) no caso em que as forças atuantes na barra são nulas e poder assim determinar as frequências e modos de vibração, aplica-se o método de Separação de Variáveis. Dessa forma, procura-se uma solução $u(x, t)$ que seja o produto de duas funções, uma dependente apenas da posição x e outra dependente somente do instante t :

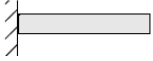
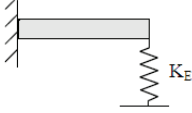
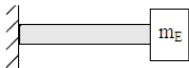
Configuração	$x = 0$	$x = L$
	$V(0, t) = 0 \quad M(0, t) = 0$	$V(0, t) = 0 \quad M(0, t) = 0$
	$u(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$	$V(L, t) = 0 \quad M(L, t) = 0$
	$u(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$	$V(L, t) = k_E u(L, t) \quad M(L, t) = 0$
	$u(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$	$V(L, t) = m_E \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) \quad M(L, t) = 0$

Tabela 6.2: Condições de contorno e configurações de vigas.

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (6-26)$$

Substituindo (6-26) em (6-25) (com $f = 0$, seção transversal da barra e propriedades do material constantes) e representando a derivada em relação a t por $\frac{\partial}{\partial t} = \dot{}$ e, a derivada em relação a x por $\frac{\partial}{\partial x} = ' $, obtém-se:

$$-X\ddot{T} = \frac{EI}{\rho A} X''''T \quad (6-27)$$

Observando-se (6-27), verifica-se que a equação pode ser separada em duas equações diferenciais (6-28) e (6-29). Faz-se: $c^2 = \frac{EI}{\rho A}$ e $\lambda^4 = \omega^2/c^2$, onde ω são as frequências naturais do sistema.

$$X'''' - \lambda^4 X = 0 \quad (6-28)$$

$$\ddot{T} + c^2 \lambda^4 T = 0 \quad (6-29)$$

Para $\lambda \neq 0$, a solução geral da primeira equação diferencial é [25]:

$$X(x) = C_1 \cosh(\lambda x) + C_2 \sinh(\lambda x) + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x). \quad (6-30)$$

Considerando que a viga é engastada-livre, tem-se que:

$$X(0) = X'(0) = X''(0) = X'''(0) = 0. \quad (6-31)$$

Assim, substituindo essas condições em (6-30), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$C_1 + C_3 = 0$$

$$C_2 + C_4 = 0$$

(6-32)

$$C_1 \cosh(\lambda L) + C_2 \sinh(\lambda L) - C_3 \cos(\lambda L) - C_4 \sin(\lambda L) = 0$$

$$C_1 \sinh(\lambda L) + C_2 \cosh(\lambda L) - C_3 \sin(\lambda L) - C_4 \cos(\lambda L) = 0$$

cuja solução é:

$$\cos(\lambda L) \cosh(\lambda L) + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos(\lambda L) = \frac{-1}{\cosh(\lambda L)}. \quad (6-33)$$

Existem infinitas possibilidades de λ que atendem a essa condição (cada uma delas é representada pelo índice n). Observando o gráfico da figura (6.3), verifica-se que a função $-1/\cosh(\lambda L)$ converge rapidamente para zero [25].

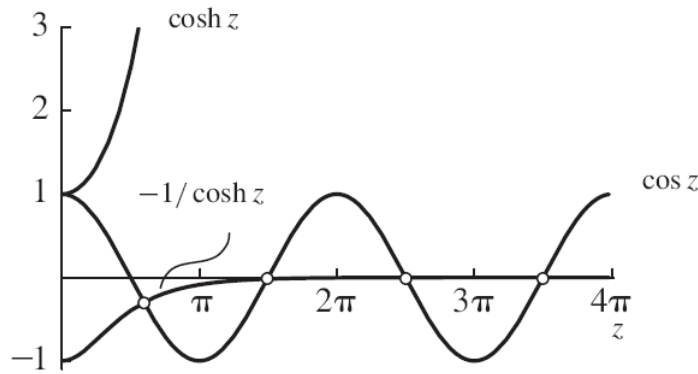


Figura 6.3: Representação gráfica das funções $\cos$, $\cosh$ e $-1/\cosh$

Assim cada λ_n que atende (6-33) pode ser escrito como:

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)}{2} \pi + e_n \right) \frac{1}{L} \quad (6-34)$$

onde e_n é um fator de correção que rapidamente tende à zero, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
e_1 &= 0.3192 \\
e_2 &= -0.0724 \\
e_3 &= -0.0640 \\
e_4 &= 0.0044
\end{aligned} \tag{6-35}$$

Dessa forma, as frequências naturais de vibração são expressas por:

$$\omega_n = \left(\frac{(2n-1)}{2} \pi + e_n \right)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{6-36}$$

Para determinar os modos de vibração associados às frequências, é necessário determinar os valores das constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 e posteriormente substituí-los em (6-30). Arbitrando que $C_2 = 1$:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{\sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L)}{\cosh(\lambda L) + \cos(\lambda L)} \\
C_3 &= \frac{\sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L)}{\cosh(\lambda L) + \cos(\lambda L)} \\
C_4 &= -1.
\end{aligned} \tag{6-37}$$

Assim os modos de vibração da viga são:

$$X_n(x) = \sinh(\lambda_n L) - \sin(\lambda_n L) - \left[\frac{\sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L)}{\cosh(\lambda_n L) + \cos(\lambda_n L)} \right] [\cosh(\lambda_n L) - \cos(\lambda_n L)] \tag{6-38}$$

6.3

O Método dos Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos (MEF) surgiu nas décadas de 50 e 60 como uma ferramenta para análise estrutural [21]. Ele apresenta uma técnica de discretização de um problema descrito na formulação fraca [28] e, a partir dessa discretização, uma aproximação de sua solução possa ser obtida por exemplo através do método de Galerkin.

6.3.1

Formulação Forte e Fraca de um Problema

A Formulação Forte de um problema de valor de contorno pode ser por exemplo definida como:

Determine $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0 \quad (6-39)$$

e que a condição de contorno seja $u(L) = a$ e, a condição inicial seja $du/dx = -b$. Ou seja, a equação diferencial deve ser satisfeita em todos os pontos do domínio.

Para determinar-se a Formulação Fraca equivalente a essa Formulação Forte [24] [26], multiplica-se a equação diferencial por uma função $w \in V$ (6-40) e posteriormente integra-se no domínio $(0, L)$ do problema. Assim, deseja-se determinar $u \in U$, tal que:

$$\int_0^L \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + f \right] w(x) dx = 0 \quad (6-40)$$

$$\int_0^L \left[-\frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + wf \right] dx = 0 \quad (6-41)$$

onde U é o conjunto das funções teste definido como:

$$U = \left\{ u \left| u(L) = a \text{ e } \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx < \infty \right. \right\} \quad (6-42)$$

e V é o conjunto das funções peso definido como:

$$V = \left\{ w \left| u(L) = 0 \text{ e } \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx < \infty \right. \right\} \quad (6-43)$$

6.3.2

Método dos Resíduos Ponderados

Nos métodos variacionais (incluindo Elementos Finitos), o processo de discretização está associado à procura de uma aproximação para a função u . Dessa forma, busca-se em um espaço de dimensão finita $u_N \in U_N \subset U$ ($\dim(U_N) = N$) tal que:

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) \quad (6-44)$$

onde c_i são coeficientes a serem determinados, e ϕ_j são funções base de U_N linearmente independentes e previamente definidas.

Chama-se de resíduo, R , da equação, a medida de quanto u_N aproxima adequadamente o problema, ou seja:

$$R = \frac{d^2 u_N}{dx^2} + f. \quad (6-45)$$

Observe que se $u_N = u$, então o resíduo $R = 0$. Assim, no Método dos Resíduos Ponderados, deseja-se que:

$$\int_0^L R w = 0 \quad (6-46)$$

No Método dos Resíduos Ponderados, a função teste w também é aproximada em um espaço de dimensão finita V_N tal que $\dim(U_N) = \dim(V_N) = N$. Considera-se como base para esse espaço as seguintes funções: $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ linearmente independentes. Substituindo u_N na integral (6-45), obtém-se:

$$\int_0^L \left[-\frac{dw_N}{dx} \frac{du_N}{dx} + w_N f(x) \right] dx = 0. \quad (6-47)$$

Sabe-se ainda que:

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) \quad \rightarrow \quad \frac{du_N}{dx} = \sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_j}{dx}(x). \quad (6-48)$$

A equação (6-47) pode ser expressa como um conjunto de N equações. Para cada uma delas pode-se escrever:

$$\int_0^L \left[-\frac{d\psi_i}{dx} \sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_j}{dx} + \psi_i f \right] dx = 0. \quad (6-49)$$

Assim:

$$\sum_{j=1}^N c_j \int_0^L \left[\frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} \right] dx = \int_0^L \psi_i f dx. \quad (6-50)$$

Representando-se por:

$$a_{ij} = \int_0^L \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad (6-51)$$

$$b_i = \int_0^L \psi_i f dx \quad (6-52)$$

a equação (6-50) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} c_j = b_i. \quad (6-53)$$

Representando-se em forma matricial, tem-se:

$$[a] \{c\} = \{b\} \quad (6-54)$$

onde o vetor $\{c\}$ é composto pelos coeficientes a serem determinados, ou seja, as incógnitas do problema. Ele pode ser calculado por:

$$\{c\} = [a]^{-1} \{b\}. \quad (6-55)$$

Dependendo da escolha feita para as funções ϕ_i e ψ_i , o método dos resíduos ponderados recebe uma denominação diferente. No caso de utilizar-se $\phi_i = \psi_i$, ele é chamado de método de Bubnov-Galerkin [10].

6.3.3

Método de Galerkin: Problemas de Regime Transiente

Nesta parte do trabalho é mostrado como o método de Galerkin é aplicado em problemas de regime transiente (como por exemplo, nos problemas que envolvem a dinâmica de vigas e barras).

Para exemplificar o método, ele será aplicado ao problema da viga engastada-livre discutido no início desse capítulo. A primeira etapa é projetar a equação de movimento (6-25) nas funções testes ϕ_i . Considerando que a área da seção transversal A , massa por unidade de comprimento ρ , momento de inércia da área da seção I e módulo de elasticidade E são constantes:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) = f(x, t). \quad (6-56)$$

Assim:

$$\int_0^L \left[\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - f(x, t) \right] \phi_i dx = 0. \quad (6-57)$$

Integrando por partes duas vezes:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \phi_i dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \\ - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^L + \phi_i EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_0^L = \int_0^L f(x, t) \phi_i dx. \end{aligned} \quad (6-58)$$

Considerando as condições de contorno do problema da viga engastada como mostrado na tabela (6.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} V(L, T) = EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_L = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0 \\ M(L, T) = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_L = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0 \end{array} \right. \quad (6-59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) + \phi_j(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_j(0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(0) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (6-60)$$

a equação (6-58) pode ser reescrita como:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \phi_i dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \int_0^L f(x, t) \phi_i dx = 0. \quad (6-61)$$

Fazendo-se a discretização na posição em u :

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \phi_j(x) \quad (6-62)$$

e substituindo em (6-62):

$$\sum_{j=1}^N \ddot{u}_j \int_0^L \rho A \phi_j \phi_i dx + \sum_{j=1}^N u_j \int_0^L EI \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \phi_i dx. \quad (6-63)$$

Igualmente foi feito anteriormente, pode-se escrever:

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \phi_j \phi_i dx \quad (6-64)$$

$$k_{ij} = \int_0^L EI \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx \quad (6-65)$$

$$f_i = \int_0^L f(x, t) \phi_i dx \quad (6-66)$$

e, assim, (6-63) é expressa em forma matricial por:

$$[m] \{\ddot{u}(t)\} + [k] \{u(t)\} = \{f(t)\}. \quad (6-67)$$

As matrizes $[m]$ e $[k]$ são chamadas de matrizes de massa e rigidez globais do problema e, o vetor $\{f\}$ de vetor de força global.

6.3.4

Funções Elementares

Observando as equações (6-64), (6-65), (6-66) percebe-se que para obter cada elemento das matrizes globais $[m]$ e $[k]$ é necessário integrar as funções base ϕ_i em todo o domínio do problema.

Para simplificar esse cálculo, uma escolha apropriada de funções ϕ_i pode ser feita, de tal forma que as funções e suas derivadas só sejam diferentes de zero em apenas uma pequena parte do domínio. Assim, a integral precisa ser

calculada somente nessa parte do domínio onde a função é diferente de zero e, conseqüentemente as matrizes globais $[m]$ e $[k]$ se tornam matrizes esparsas.

A ideia básica é discretizar domínio do problema em um conjunto de subdomínios, chamados elementos, como mostra a figura (6.4). A fronteira de cada elemento é delimitada por pontos (chamados nós). Cada nó corresponde a uma função base ϕ_i de u_N .

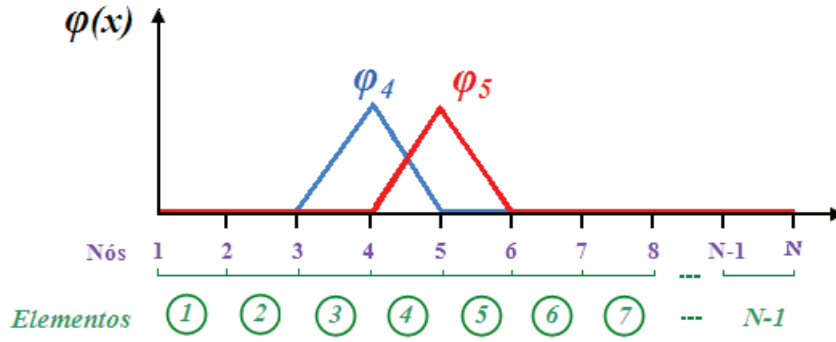


Figura 6.4: Exemplo domínio dividido em elementos lineares: funções de interpolação para os nós 4 e 5

Com a discretização do domínio, a montagem das matrizes globais é feita através de matrizes elementares ($[m]^{(e)}$ e $[k]^{(e)}$) calculadas em cada elemento do problema.

Como a forma das funções base ϕ_i é igual para todos os elementos, faz-se uma mudança das coordenadas globais para coordenadas elementares. Assim, no cálculo das matrizes elementares, as funções ϕ_i são descritas em coordenadas locais. Considera-se que cada elemento se estende de $\xi = -1$ a $\xi = 1$.

Para uma aproximação linear, cada elemento é formado por dois nós, como mostra a figura (6.5). Suas funções elementares são dadas por [11]:

$$\phi_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad \phi_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad (6-68)$$

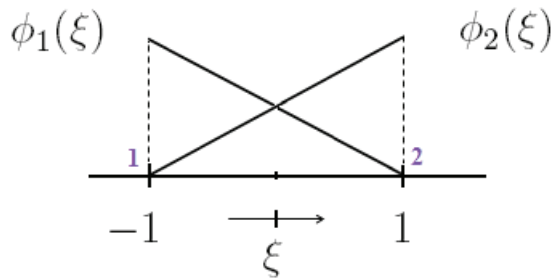


Figura 6.5: Funções base lineares no sistema de coordenadas local.

Na aproximação quadrática, cada elemento é formado por três nós, como mostra a figura (6.6). Suas funções elementares são dadas por:

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi) &= \frac{\xi(\xi-1)}{2} \\
\phi_2(\xi) &= \frac{\xi(\xi+1)}{2} \\
\phi_3(\xi) &= -(\xi+1)(\xi-1)
\end{aligned} \tag{6-69}$$

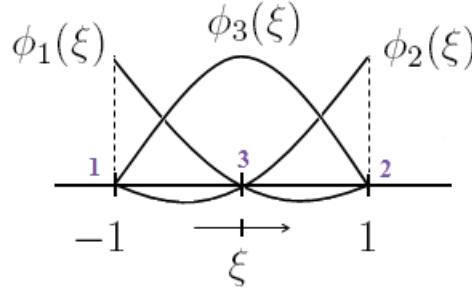


Figura 6.6: Funções base quadráticas no sistema de coordenadas local.

Para aproximar a solução da equação da viga através do Método dos Elementos Finitos, é necessário que cada função base ϕ seja contínua e com segunda derivada diferente de zero [11] [6]. Isso garante a continuidade do deslocamento transversal e rotação entre dois elementos vizinhos. Para isso, costuma-se utilizar funções base de forma Hermitiana.

No elemento de Hermite com dois nós, são considerados quatro graus de liberdade (deslocamento e rotação em cada nó) como mostra a figura (6.7).

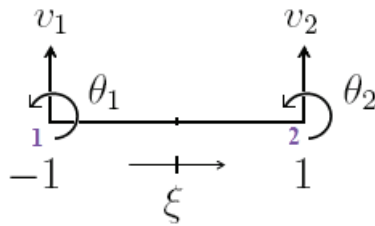


Figura 6.7: Elemento hermitiano com dois nós.

Fazendo uma aproximação para o deslocamento transversal v com um polinômio de interpolação cúbico, e considerando-se a rotação $\theta = dv/d\xi$ tem-se:

$$v(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 \tag{6-70}$$

$$\theta(\xi) = c_1 + 2c_2\xi + 3c_3\xi^2. \tag{6-71}$$

Como os valores de deslocamento e rotação em $\xi = -1$ e $\xi = +1$ são conhecidos:

$$\begin{aligned}
v(-1) &= v_1 & \theta(-1) &= \theta_1 \\
v(+1) &= v_2 & \theta(+1) &= \theta_2
\end{aligned}
\tag{6-72}$$

os coeficientes c_0, c_1, c_2 e c_3 podem ser determinados (6-73) e o deslocamento v pode ser expresso como uma combinação de funções base ϕ :

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}\theta_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{4}\theta_2 \\
c_1 &= -\frac{3}{4}v_1 - \frac{1}{4}\theta_1 + \frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{4}\theta_2 \\
c_2 &= -\frac{1}{4}\theta_1 + \frac{1}{4}\theta_2 \\
c_4 &= \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}\theta_1 - \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}\theta_2
\end{aligned}
\tag{6-73}$$

$$v(\xi) = v_1\phi_1(\xi) + \theta_1\phi_2(\xi) + v_2\phi_3(\xi) + \theta_2\phi_4(\xi). \tag{6-74}$$

Assim, as funções base ϕ são definidas por (6-75) e, seus gráficos obtidos através da rotina MATLAB HERMITE_2NOS são mostrados na figura (6.8).

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 \\
\phi_2(\xi) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \\
\phi_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 \\
\phi_4(\xi) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3
\end{aligned}
\tag{6-75}$$

As derivadas de segunda ordem das funções valem:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\phi_1}{d\xi^2}(\xi) &= \frac{3}{2}\xi \\
\frac{d^2\phi_2}{d\xi^2}(\xi) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi \\
\frac{d^2\phi_3}{d\xi^2}(\xi) &= -\frac{3}{2}\xi \\
\frac{d^2\phi_4}{d\xi^2}(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi
\end{aligned} \tag{6-76}$$

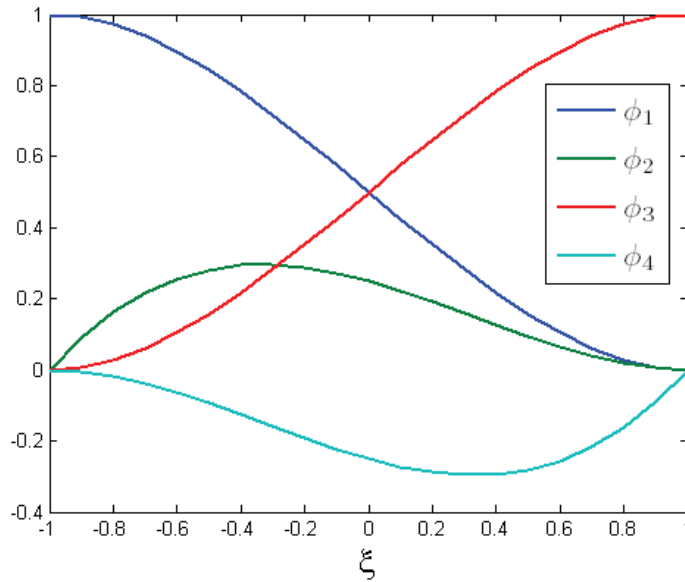


Figura 6.8: Funções base hermitianas: elemento com dois nós.

Cada elemento do sistema pode ser expresso pela equação:

$$[m^{(e)}] \{\ddot{u}^{(e)}\} + [k^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{f^{(e)}\} \tag{6-77}$$

onde o vetor $\{u^{(e)}\}$ representa o deslocamento e rotação dos nós do elemento. Da mesma forma, o vetor de carregamento $\{f^{(e)}\}$ representa a força f e momento m aplicados em cada um dos nós do elemento:

$$\{u^{(e)}\} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \{\ddot{u}^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \{f^{(e)}\} = \begin{bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{bmatrix}. \tag{6-78}$$

Vale observar que apesar de cada elemento ser composto por dois nós,

os vetores $\{u^{(e)}\}$ e $\{f^{(e)}\}$ têm dimensão 4×1 . Consequentemente as matrizes elementares $[m]^{(e)}$ e $[k]^{(e)}$ têm dimensão 4×4 .

Caso utilize-se N elementos hermitianos de dois nós para discretizar o domínio, por exemplo, de uma viga, as matrizes globais de massa e rigidez ($[m]$ e $[k]$) possuirão dimensão $2(N+1) \times 2(N+1)$.

Para uma melhor aproximação da solução obtida com elementos finitos, pode-se introduzir um nó intermediário no elemento de Hermite (em $\xi = 0$). Assim, o elemento é composto de seis graus de liberdade (deslocamento e rotação em cada nó) como mostra a figura (6.9).

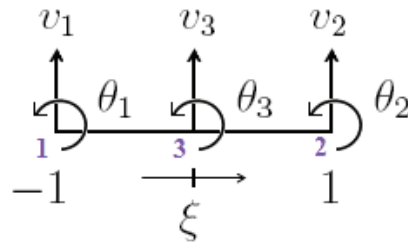


Figura 6.9: Elemento hermitiano com três nós.

Em um procedimento análogo ao feito para o elemento de Hermite com dois nós, faz-se uma aproximação para o deslocamento transversal v com um polinômio de ordem cinco. E considera-se a rotação $\theta = dv/d\xi$.

$$v(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + c_4\xi^2 + c_5\xi^3 \quad (6-79)$$

$$\theta(\xi) = c_1 + 2c_2\xi + 3c_3\xi^2 + 4c_4\xi^3 + 5c_5\xi^4. \quad (6-80)$$

Como os valores de deslocamento e rotação em $\xi = -1$ e $\xi = +1$ são conhecidos (6-81), os coeficientes c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 podem ser determinados e, o deslocamento v pode ser expresso como uma combinação de funções base ϕ (6-82).

$$\begin{aligned} v(-1) &= v_1 & v(0) &= v_3 & v(+1) &= v_2 \\ \theta(-1) &= \theta_1 & \theta(0) &= \theta_3 & \theta(+1) &= \theta_2 \end{aligned} \quad (6-81)$$

$$v(\xi) = v_1\phi_1(\xi) + \theta_1\phi_2(\xi) + v_3\phi_3(\xi) + \theta_3\phi_4(\xi) + v_2\phi_5(\xi) + \theta_2\phi_6(\xi) \quad (6-82)$$

As funções base ϕ mostradas na figura (6.10) (rotina MATLAB HERMITE_3NOS) são:

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi) &= \xi^2 - \frac{5}{4}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{3}{4}\xi^5 \\
\phi_2(\xi) &= \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{4}\xi^5 \\
\phi_3(\xi) &= 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \\
\phi_4(\xi) &= \xi - 2\xi^3 + \xi^5 \\
\phi_5(\xi) &= \xi^2 + \frac{5}{4}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^4 - \frac{3}{4}\xi^5 \\
\phi_6(\xi) &= -\frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{4}\xi^5
\end{aligned} \tag{6-83}$$

e suas derivadas de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\phi_1}{d\xi^2}(\xi) &= 2 - \frac{30}{4}\xi - 6\xi^2 + \frac{60}{4}\xi^3 \\
\frac{d^2\phi_2}{d\xi^2}(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{6}{4}\xi - 3\xi^2 + \frac{20}{4}\xi^3 \\
\frac{d^2\phi_3}{d\xi^2}(\xi) &= -4 + 12\xi^2 \\
\frac{d^2\phi_4}{d\xi^2}(\xi) &= -12\xi + 20\xi^3 \\
\frac{d^2\phi_5}{d\xi^2}(\xi) &= 2 + \frac{30}{4}\xi - 6\xi^2 - \frac{60}{4}\xi^3 \\
\frac{d^2\phi_6}{d\xi^2}(\xi) &= -\frac{1}{2} - \frac{6}{4}\xi - 3\xi^2 + \frac{20}{4}\xi^3
\end{aligned} \tag{6-84}$$

Cada elemento do sistema pode ser expresso pela equação:

$$[m^{(e)}] \{\ddot{u}^{(e)}\} + [k^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{f^{(e)}\} \tag{6-85}$$

onde o vetor $\{u^{(e)}\}$ representa o deslocamento e rotação em nós do elemento. Da mesma forma, o vetor $\{f^{(e)}\}$ representa a força f e momento m aplicados nos nós do elemento:

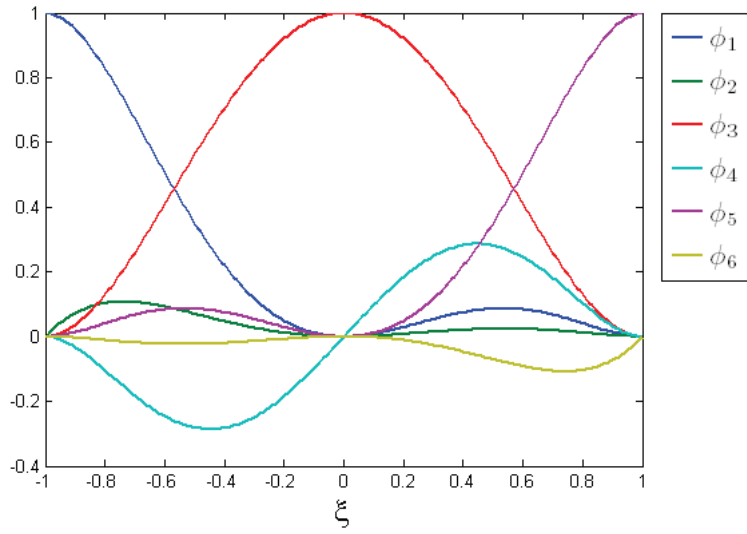


Figura 6.10: Funções base hermitianas: elemento com três nós.

$$\{u^{(e)}\} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \{\ddot{u}^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \{f^{(e)}\} = \begin{bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_3 \\ m_3 \\ f_2 \\ m_2 \end{bmatrix}. \quad (6-86)$$

Vale observar que apesar de cada elemento ser composto por três nós, os vetores $\{u^{(e)}\}$ e $\{f^{(e)}\}$ têm dimensão 6×1 . Consequentemente as matrizes elementares $[m]^{(e)}$ e $[k]^{(e)}$ têm dimensão 6×6 . O procedimento de cálculo de cada uma dos elementos de $m_{ij}^{(e)}$, $k_{ij}^{(e)}$ e $f_i^{(e)}$ é mostrado na próxima seção da dissertação.

Caso utilize-se N elementos hermitianos de três nós para discretizar o domínio, por exemplo, de uma viga, as matrizes globais de massa e rigidez ($[m]$ e $[k]$) possuirão dimensão $2(2N + 1) \times 2(2N + 1)$.

6.3.5

Mudança de Coordenadas

Na descrição elementar do problema, faz-se uma mudança de coordenadas global para coordenadas locais. Dessa forma, para o problema da viga, cada elemento das matrizes globais de massa $[m]$ e rigidez $[k]$ e do vetor de força global $\{f\}$ deve ser reescrito nas novas coordenadas elementares.

É necessário definir as matrizes $[m^{(e)}]$, $[k^{(e)}]$ e o vetor $\{f^{(e)}\}$ em coordenadas locais. Assim, as equações (6-64), (6-65) e (6-66) se tornam:

$$m_{ij}^{(e)} = \rho A \frac{h^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 \phi_i \phi_j d\xi \quad (6-87)$$

$$k_{ij}^{(e)} = EI \left(\frac{2}{h^{(e)}} \right)^3 \int_{-1}^1 \frac{d^2 \phi_j}{d\xi^2} \frac{d^2 \phi_i}{d\xi^2} d\xi \quad (6-88)$$

$$f_i^{(e)} = f^{(e)}(t) \frac{h^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 \phi_i d\xi \quad (6-89)$$

onde $h^{(e)}$ representa o tamanho do elemento. O cálculo dos coeficientes das matrizes elementares requer o cálculo de integrais no elemento, da forma:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad (6-90)$$

Implementando o método dos elementos finitos, essa integral deve ser feita de forma sistemática através do método da **Quadratura Gaussiana** [29] [26]:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{NGP} g(\xi) w_i \quad (6-91)$$

onde NGP é o número de pontos utilizados para a integração e w_i os pesos utilizados para cada ponto. Quanto maior o número de pontos, melhor será a aproximação obtida. A tabela (6.3) mostra os valores de ξ_i e w_i para diferentes NGP .

NGP	ξ_i	w_i
1	0.0	2.0
2	± 0.57735	1.0
3	± 0.77459 0.0	0.555 0.888
4	± 0.86113 ± 0.33998	0.347 0.652
6	± 0.93246 ± 0.66120 ± 0.23861	0.171 0.360 0.467

Tabela 6.3: Quadratura Gaussiana: valores de ξ e w em função do número de pontos utilizados para a integração.

6.4

Cálculo dos Modos e Frequências Naturais através dos Elementos Finitos

Observando a equação de movimento da viga engastada-livre discretizada a partir dos elementos finitos (6-67), verifica-se que a equação (6-25) foi transformada em um sistema de equações diferenciais.

Assim, através do problema de autovalor definido em (5-12) é possível calcular aproximações para os modos e frequências naturais da viga:

$$\det(-\omega^2[m] + [k]) = 0 \quad (6-92)$$

onde $[m]$ e $[k]$ são as matrizes de massa e rigidez globais obtidas a partir do método dos elementos finitos.

Quando maior for o número de elementos utilizados para discretizar o sistema, melhor será a aproximação obtida para os modos e frequências naturais.

A figura (6.11) mostra os quatro primeiros modos calculados a partir da equação analítica (6-38). A figura (6.12) mostra as aproximações desses quatro primeiros modos obtidas com o Método dos Elementos Finitos implementado em MATLAB. Na discretização foram utilizados 50 elementos de Hermite com 2 nós, o que permitiu obter-se boas aproximações.

Foram considerados os seguintes valores de parâmetros da viga: módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, densidade do material de $7850 \text{ Kg}/\text{m}^3$, diâmetro $d = 0.05$ m e comprimento $L = 0.5$ m.

Vale observar que quando trabalha-se com N elementos de hermite, os vetores obtidos para a aproximação dos modos de vibração $\{v\}$ possuem dimensão:

- $2(N + 1) \times 1$, caso o elemento seja composto por dois nós;
- $2(2N + 1) \times 1$, caso o elemento seja composto por três nós.

Isso se deve ao fato de que cada nó está associado a dois graus de liberdade (deslocamento e rotação). Como foi assumido que as componentes do vetor $\{u^{(e)}\}$ representariam o deslocamento e rotação de forma intercalada (6-78) (6-86), cada elemento v_i do vetor de modo de vibração representa:

- o deslocamento de um nó, se i for ímpar;
- a rotação de um nó, se i for par.

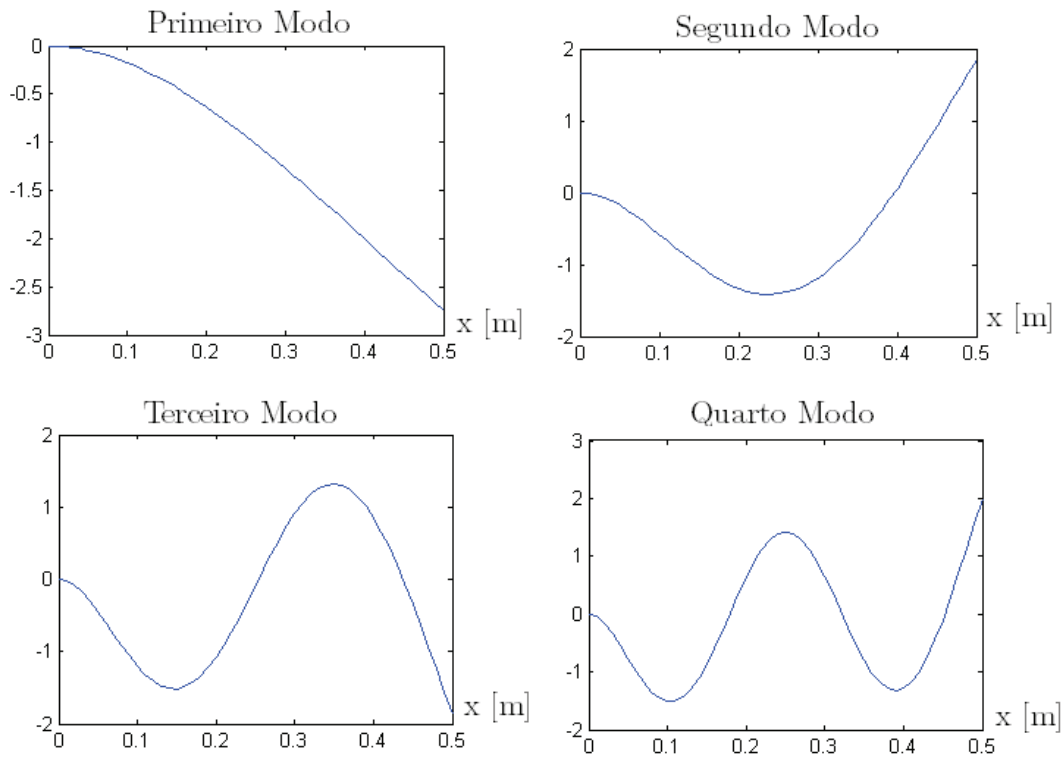


Figura 6.11: Quatro primeiros modos da viga engastada-livre.

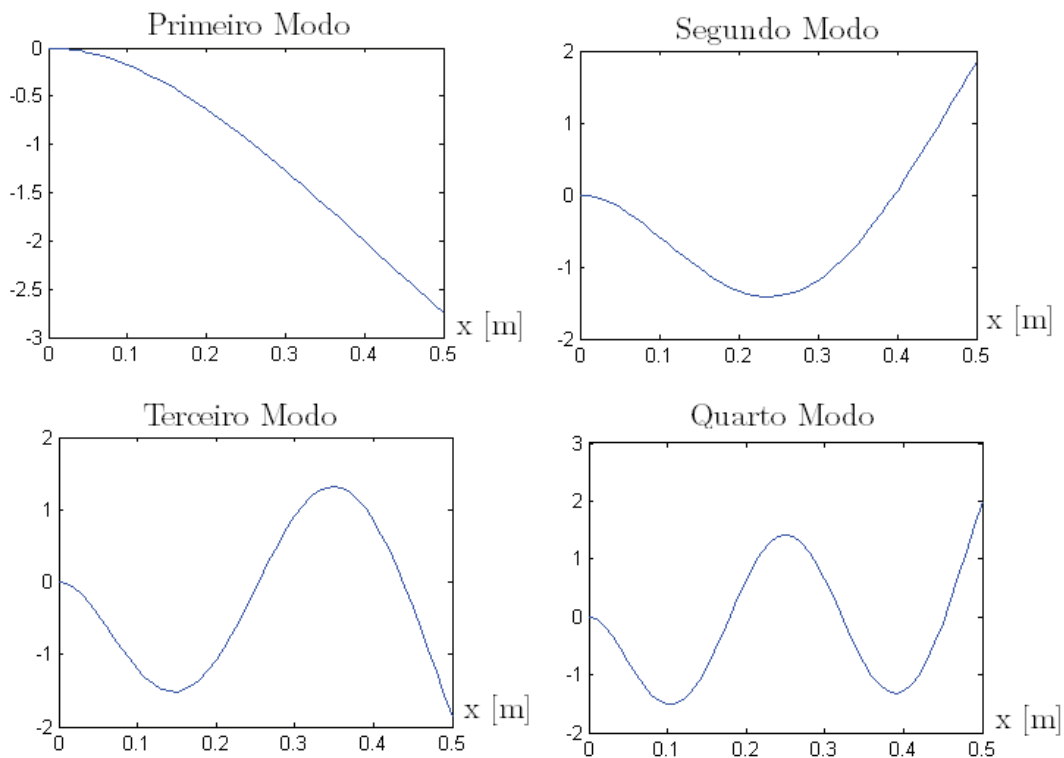


Figura 6.12: Aproximação dos quatro primeiros modos da viga engastada-livre (FEM) obtida com 50 elementos de Hermite de 2 nós.

6.5

Modelo Reduzido

Considerando que a maior contribuição para o movimento da viga está associada aos primeiros modos de vibração da viga [28], é possível reduzir a dimensão do problema através dos modos normais.

Construindo uma matriz $[v]$ composta pelos vetores colunas dos n primeiros modos de vibração calculados pelo método dos elementos finitos:

$$[v] = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \{v\}_1 & \{v\}_2 & \cdots & \{v\}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (6-93)$$

o deslocamento $\{u\}$ pode ser representado através das coordenadas modais $\{y\}$. Para isso, faz-se a mudança de coordenadas:

$$\{u(t)\} = [v] \{y(t)\}. \quad (6-94)$$

Substituindo (6-94) na equação de movimento discretizada pelo método dos elementos finitos (6-67):

$$[m][v] \{\ddot{y}(t)\} + [k][v] \{y(t)\} = \{f(t)\}. \quad (6-95)$$

Multiplicando por $[v]^T$, obtém-se:

$$[v]^T [m][v] \{\ddot{y}(t)\} + [v]^T [k][v] \{y(t)\} = [v]^T \{f(t)\}. \quad (6-96)$$

Pelas definições do capítulo anterior (5-22) e (5-23), em que as matrizes de massa e rigidez foram diagonalizadas por $[v]$, a equação de movimento pode ser transformada em um sistema de equações diferenciais desacopladas (modelo reduzido):

$$[m_d] \{\ddot{y}(t)\} + [k_d] \{y(t)\} = \{q(t)\} \quad (6-97)$$

onde $\{q\}$ representa o vetor de forças escrito nas coordenadas modais:

$$\{q(t)\} = [v]^T \{f(t)\}. \quad (6-98)$$

O modelo reduzido é uma poderosa ferramenta de redução no esforço computacional exigido para o cálculo da resposta de cada um dos graus de liberdade ao longo do tempo. Como exemplo, suponha que o método dos elementos finitos tenha sido aplicado ao problema de uma viga, e tenham sido utilizados $N = 10$ elementos Hermitianos de três nós para fazer a discretização do domínio.

Nesse caso, as matrizes globais de massa e rigidez ($[m]$ e $[k]$) têm dimensão $2(2N + 1) \times 2(2N + 1) = 42 \times 42$ e, o vetor $\{u\}$ 42×1 . Considere também que

Dessa forma, ao invés de ter que ser resolvido um sistema com 42 equações diferenciais acopladas, basta resolver quatro equações desacopladas para y_1, y_2, y_3 e y_4 .

Modelando-se o amortecimento do sistema como uma combinação linear entre as matrizes de massa e rigidez (amortecimento de Rayleigh) [21]:

a matriz $[c]$ pode ser diagonaliza através da relação:

Assim, a equação de movimento do sistema torna-se:

Escrevendo-se como um sistema de equações, obtém-se:

6.6

Para exemplificar o estudo das vibrações aleatórias em sistemas contínuos, foi desenvolvido um exemplo envolvendo um riser hipotético de perfuração de uma plataforma de petróleo, mostrado na figura (6.13). Na modelagem adotada para o riser, considera-se que uma de suas extremidade está engastada

no fundo do mar, e a outra presa a uma plataforma de petróleo que flutua no oceano. Sobre o riser atuam carregamentos devidos à:

1. movimentação da maré, ondas e correntes marítimas;
2. movimentação da plataforma.

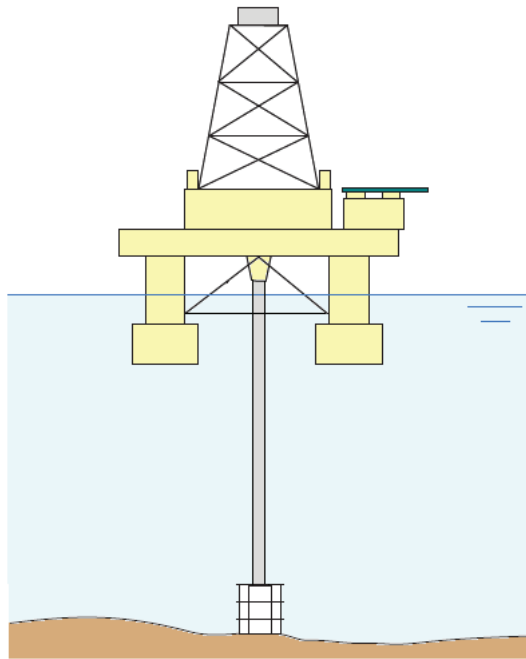


Figura 6.13: Riser de perfuração de uma plataforma de petróleo.

O riser foi modelado como uma viga de Euler-Bernoulli com equação da dinâmica dada por (6-25). Supôs-se como condições de contorno a viga engastada-livre (6.2). O carregamento causado pela movimentação da plataforma foi modelado como uma força concentrada na extremidade superior do riser, caracterizada pelo processo estocástico $F_1(t)$, cujo parâmetro t está associado ao tempo. O forçamento causado pela maré foi modelado como um carregamento uniformemente distribuído ao longo do comprimento do riser. Ele é caracterizado pelo processo estocástico $F_2(t, x)$ de parâmetro t associado ao tempo. A figura (6.14) mostra um esquema do riser e dos dois carregamentos.

As expressões adotadas para $F_1(t)$ e $F_2(t, x)$ são simples e tem como objetivo somente exemplificar a análise de vibrações estocásticas em sistemas contínuos. Modelagens mais realistas para o forçamento causado por correntes marítimas podem ser encontrados em [20], [3] e [2].

Foi considerado que os processos estocásticos $F_1(t)$ e $F_2(t, x)$ são da forma:

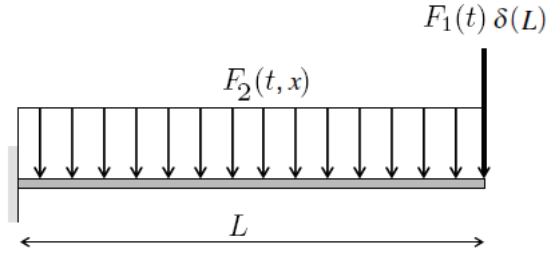


Figura 6.14: Carregamentos aplicados no riser de perfuração.

$$F_1(t) = A_1 \cos(\omega t) \quad (6-105)$$

$$F_2(t, x) = A_2 \cos(\omega t) \quad (6-106)$$

onde A_1 e A_2 são variáveis aleatórias correlacionadas.

Define-se então o vetor aleatório $\{A\} = [A_1 \ A_2]$ e, supõe-se que a distribuição de probabilidade de $\{A\}$ é uma distribuição de probabilidade conjunta de A_1 e A_2 dada por:

$$p_A(a_1, a_2) = \frac{K}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{z(a_1, a_2)}{2(1-\rho^2)}\right] \mathbb{1}_{(0,400)\times(0,200)}(a_1, a_2) \quad (6-107)$$

onde não se conhece o valor de K e, tem-se:

$$z(a_1, a_2) = \frac{(a_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(a_1 - \mu_1)(a_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(a_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \quad (6-108)$$

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}. \quad (6-109)$$

A função densidade de probabilidade foi multiplicada pela função $\mathbb{1}_{(0,400)\times(0,200)}$ para garantir que as variáveis aleatórias A_1 e A_2 possam ter somente valores positivos no intervalo $(0, 400)$ e $(0, 200)$. Como A_1 e A_2 representam a amplitude dos forçamentos $F_1(t)$ e $F_2(t, x)$, essa restrição é importante.

Sabendo-se as características estatísticas de $F_1(t)$ e $F_2(t, x)$, foram determinadas aproximações para média da resposta de deslocamento e rotação da viga. Utilizou-se o método de Monte Carlo com Cadeia de Markov (algoritmo de Metrópolis - Hastings multidimensional) apresentado no capítulo 3 da dissertação.

Através do algoritmo de Metropolis-Hastings foram geradas amostras para as variáveis aleatórias A_1 e A_2 . Para cada uma das amostras, obteve-se uma realização dos forçamentos $F_1(t)$ e $F_2(t, x)$ e, calculou-se o deslocamento e rotação da viga ao longo do tempo pelo método de Galerkin.

O programa em MATLAB (ELEMENTOSFINITOSVIGA) desenvolvido para fazer as simulações é explicado no apêndice B. Como movimento do riser é submerso e, conseqüentemente amortecido pela água, uma matriz de amortecimento foi adicionada à modelagem do riser. Para a construção dessa matriz, foi utilizada a hipótese de amortecimento proporcional.

Assim, a equação da dinâmica da barra discretizada pelos Elementos Finitos utilizada é:

$$[m] \{\ddot{u}(t)\} + [c] \{\dot{u}(t)\} + [k] \{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (6-110)$$

onde $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$. É importante observar que como o vetor de forças globais $\{f\}$ varia no tempo, na simulação por elementos finitos, ele deve ser recalculado a cada instante de tempo.

Para reduzir o custo computacional do cálculo do deslocamento e rotação da viga em cada realização do forçamento, no programa MATLAB foram utilizadas coordenadas modais.

$$[v]^T [m] [v] \{\ddot{y}(t)\} + [v]^T [c] [v] \{\dot{y}(t)\} + [v]^T [k] [v] \{y(t)\} = [v]^T \{f(t)\} \quad (6-111)$$

$$[m_d] \{\ddot{y}(t)\} + [c_d] \{\dot{y}(t)\} + [k_d] \{y(t)\} = \{q(t)\} \quad (6-112)$$

onde a matriz $[v]$ é composta pelos vetores colunas dos primeiros modos de vibração calculados pelo método dos elementos finitos (6-93). As dimensões do riser, propriedades do material, características do forçamento e dos elementos finitos utilizados nas simulações são mostrados na tabela (6.4). Esses valores são hipotéticos e foram escolhidos arbitrariamente a título ilustrativo.

Outros valores de número de elementos N utilizados para discretizar o domínio foram testados. Verificou-se que a partir de $N = 5$, a malha apresentava uma concentração de elementos suficientes para descrever o movimento da viga.

Os valores das frequências naturais associadas aos 4 primeiros modos de vibração do riser de perfuração estão na tabela (6.5).

Nas figuras (6.15), (6.16), (6.17) e (6.18) são mostrados os valores de deslocamento e rotação médios ao longo do tempo para os pontos $x = L$ e $x = L/2$. É possível observar que assim como nos sistemas determinísticos, podem ser identificadas duas fases distintas na resposta em deslocamento e rotação do riser. Uma fase correspondente ao movimento transiente, e outra correspondente a um movimento periódico com frequência ω igual a do forçamento.

Comprimento	$L = 50$	m
Diâmetro externo	$d_e = 0.8$	m
Diâmetro interno	$d_i = 0.5$	m
Módulo de Elasticidade	$E = 200$	GPa
Densidade do Material	7850	Kg/m^3
Amortecimento: α	0.5	
Amortecimento: β	0.0	
Número de Elementos	10	
Elemento hermitiano	2 nós	
Número de modos considerados	4	
Frequência	$\omega = 0.2$	Hz
μ_1	200	$[N]$
μ_2	100	$[N/m]$
σ_1	50	
σ_2	25	
σ_{12}	10	

Tabela 6.4: Valores de parâmetros utilizados na simulação MATLAB: programa de elementos finitos.

Modos	Frequências $[Hz]$
Primeiro Modo	18.06
Segundo Modo	113.21
Terceiro Modo	317.06
Quarto Modo	621.74

Tabela 6.5: Frequências Naturais do riser de perfuração associadas aos 4 primeiros modos de vibração.

Observa-se também que somente há dispersão dos resultados em relação a amplitude do deslocamento e rotação. Essa característica está de acordo com os modelos de carregamentos $F_1(t)$ e $F_2(t, x)$ adotados. Em (6-105) e (6-106), a frequência ω foi considerada determinística, e somente as amplitudes foram modeladas como variáveis aleatórias.

A escolha do número de modos utilizados para escrever a equação da dinâmica de um sistema contínuo em coordenadas modais deve ser feita de forma criteriosa. É necessário garantir que erro da resposta obtida seja menor um erro previamente determinado.

Uma forma de fazer essa validação é obter a resposta do sistema para dois números consecutivos de modos, e verificar se a diferença entre as respostas é aceitável.

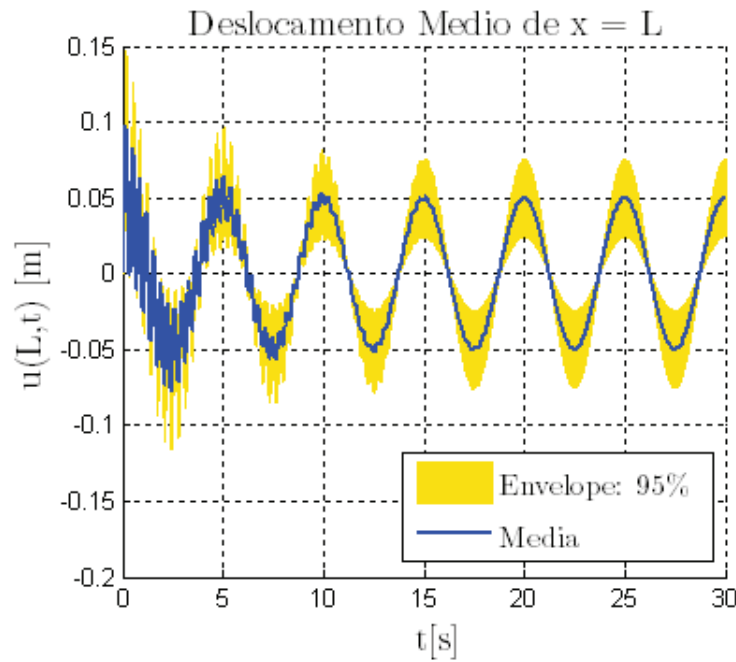


Figura 6.15: Riser: deslocamento ao longo do tempo para $x = L$.

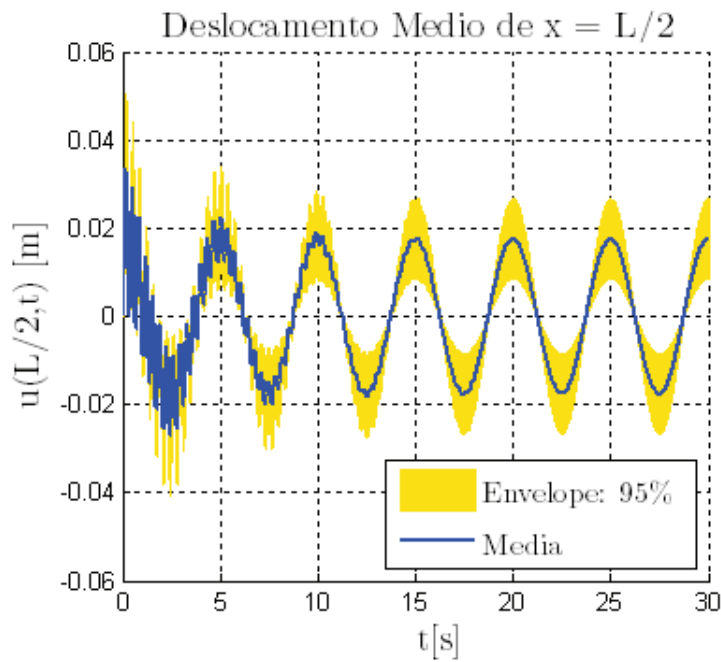


Figura 6.16: Riser: deslocamento ao longo do tempo para $x = L/2$.

No exemplo do riser, para mostrar que os quatro modos utilizados nas simulações foram suficientes para caracterizar as respostas de deslocamento e rotação, traçou-se os gráficos do deslocamento da extremidade da viga ($x = L$) com 1 modo e 2 modos. Verificou-se que os gráficos obtidos (mostrados nas figuras (6.19) e (6.20)) são equivalentes.

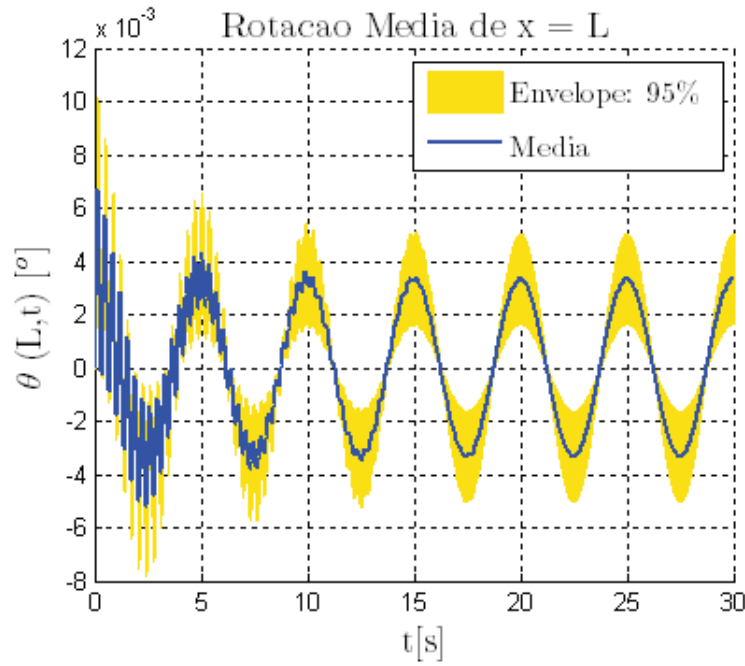


Figura 6.17: Riser: rotação ao longo do tempo para $x = L$.

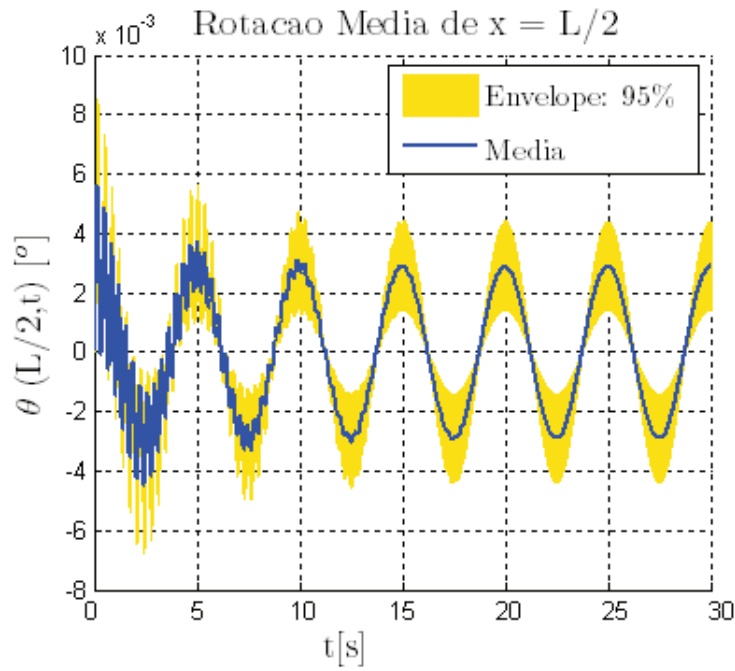


Figura 6.18: Riser: rotação ao longo do tempo para $x = L/2$.

Nessas simulações, as forças $F_1(t)$ e $F_2(t, x)$ foram consideradas determinísticas, valendo cada uma delas 200 N e 100 N/m respectivamente. Os outros valores de parâmetros utilizados nos cálculos são mostrados na tabela (tab6.4).

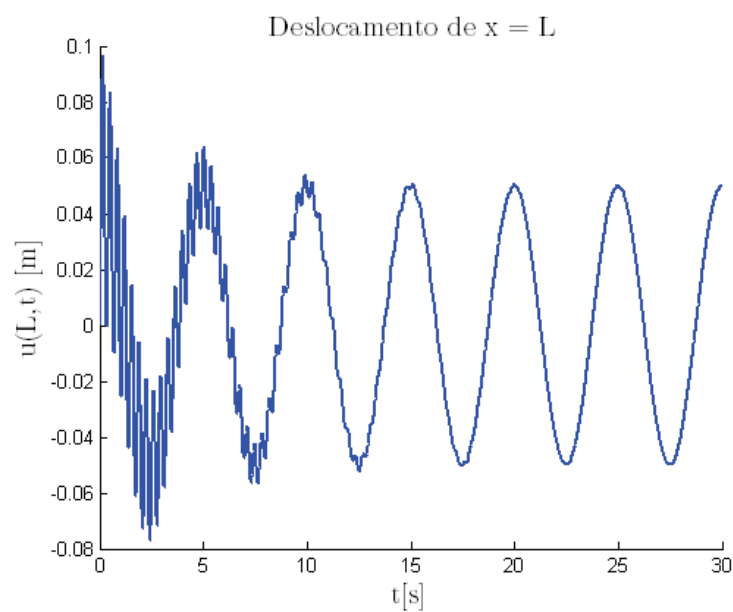


Figura 6.19: Deslocamento da extremidade do riser considerando-se apenas um modo de vibração.

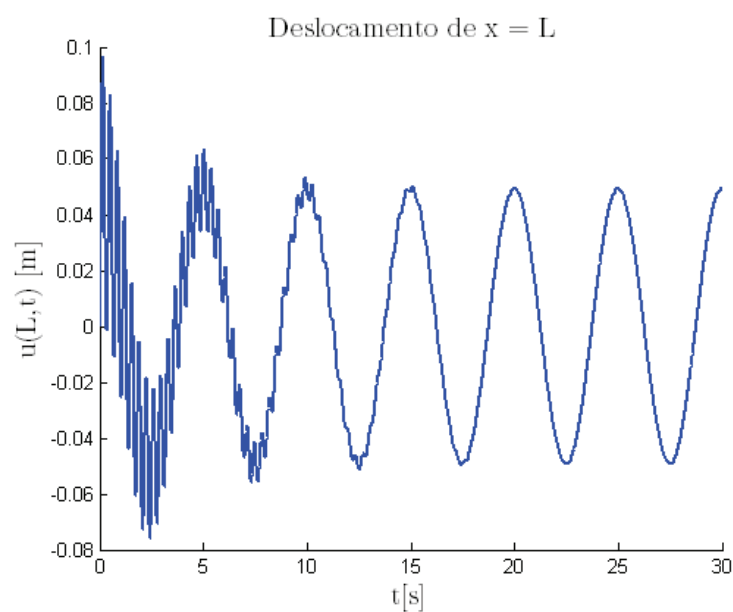


Figura 6.20: Deslocamento da extremidade do riser considerando-se dois modos de vibração.