

5

Vibrações Estocásticas em Sistemas com Mais de Um Grau Liberdade

5.1

Introdução

Neste capítulo da dissertação são tratados sistemas mecânicos mais complexos do que os analisados no capítulo anterior. São sistemas em que dois ou mais graus de liberdade são necessários para descrever seu comportamento e, que estão submetidos a um ou mais forçamentos caracterizados como processos estocásticos.

Para poder analisar esses sistemas, na primeira seção é feita uma introdução à vibração de sistemas com n graus de liberdade sujeitos a carregamentos determinísticos. O objetivo é introduzir os conceitos de modos e frequências de vibração, modos normais e amortecimento proporcional. Somente nas seções seguintes, são mostrados os sistemas com n graus de liberdade sujeitos a carregamentos aleatórios.

Serão apresentados dois métodos distintos para estudar vibrações aleatórias:

1. Método da Resposta ao Impulso: Permite calcular a média de deslocamento, autocorrelação e densidade espectral para cada grau de liberdade do sistema.
2. Método dos Modos Normais: Permite calcular as estatísticas da resposta em deslocamento quando o sistema está escrito em coordenadas modais.

5.2

Vibração Determinística de Sistemas com Mais de Um Grau de Liberdade

Considere um sistema com n graus de liberdade, como mostrado na figura (5.1). A equação de movimento do sistema é dado por:

$$[m] \{\ddot{x}(t)\} + [c] \{\dot{x}(t)\} + [k] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (5-1)$$

onde $[m]$, $[c]$ e $[k]$ são matrizes $(n \times n)$, chamadas respectivamente de matriz de massa, matriz de amortecimento e matriz de rigidez. Cada componente dos vetores $\{x\}$ e $\{f\}$ $(n \times 1)$ representam o deslocamento e a força aplicada em

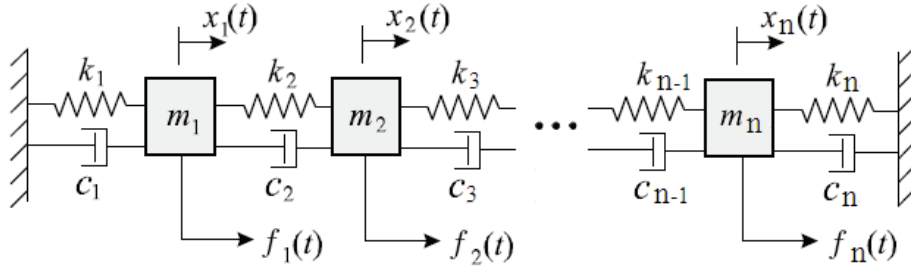


Figura 5.1: Sistema com n graus de liberdade.

cada grau de liberdade. Utilizando as definições da Transformada de Fourier do capítulo anterior e, aplicando-a à equação de movimento (5-1) obtém-se:

$$(-\omega^2[m] + i\omega[c] + [k])\{\chi(\omega)\} = \{f(\omega)\} \quad (5-2)$$

onde $\{\chi\}$ e $\{f\}$ são as transformadas de Fourier de $\{x\}$ e $\{f\}$ respectivamente. A matriz $(-\omega^2[m] + i\omega[c] + [k])$ é chamada de $[z(\omega)]$, de forma que:

$$\{\chi(\omega)\} = [z(\omega)]^{-1} \{f(\omega)\} \quad (5-3)$$

e que $[z(\omega)]^{-1}$ seja idêntica a matriz $[h(\omega)]$:

$$\{\chi(\omega)\} = [h(\omega)] \{f(\omega)\}. \quad (5-4)$$

As funções de transferência para um sistema n -dimensional são definidas por (5-5), e as funções de resposta ao impulso por (5-6):

$$[h(\omega)] = \begin{bmatrix} h_{11}(\omega) & h_{12}(\omega) & \cdots & h_{1n}(\omega) \\ h_{21}(\omega) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{n1}(\omega) & \cdots & \cdots & h_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

$$[g(t)] = \begin{bmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & \cdots & g_{1n}(t) \\ g_{21}(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(t) & \cdots & \cdots & g_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

onde:

- $g_{ij}(t)$ representa a função de resposta ao impulso para a coordenada i devido a força em j ;
- $h_{ij}(\omega)$ representa a função de transferência para a coordenada i devido a força em j ; e

- $h_{ij}(\omega)$ e $g_{ij}(t)$ formam um par de transformadas de Fourier definidos por (4-71) e (4-72).

Tendo definido a matriz $[g]$, a resposta de cada grau de liberdade x_i devido a força f_j é obtida por uma generalização da equação (4-1):

$$x_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(t - \theta) g_{ij}(\theta) d\theta \quad (5-7)$$

e a resposta total de cada grau de liberdade x_i é igual a soma da resposta para cada uma das forças f_j :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f_j(t - \theta) g_{ij}(\theta) d\theta. \quad (5-8)$$

5.2.1

Cálculo de Modos e Frequências Naturais do Sistema

Os modos e frequências naturais estão associados ao sistema conservativo (sem dissipação de energia). São características intrínsecas do sistema. Assim, para calculá-los, considera-se o sistema sem amortecimento e sem forçamento:

$$[m] \{\ddot{x}(t)\} + [k] \{x(t)\} = 0 \quad (5-9)$$

A equação (5-9) admite solução do tipo:

$$\{x(t)\} = \{v\} e^{i\omega t} \quad (5-10)$$

onde cada elemento v_i é um escalar e denota a magnitude da resposta. Substituindo em (5-9):

$$(-\omega^2[m] + [k]) \{v\} = 0 \quad (5-11)$$

e considerando uma solução não trivial:

$$\det(-\omega^2[m] + [k]) = 0. \quad (5-12)$$

Assim, o cálculo das frequências equivale a um problema de autovalor. Cada valor de ω^2 que faz o determinante igual a zero é uma frequência natural do sistema e, para cada um desses valores existe um vetor $\{v\}$ não nulo correspondente que satisfaz (5-12), chamado de autovetor.

$$\{v\}_i = \begin{bmatrix} v_{1_i} \\ \vdots \\ v_{n_i} \end{bmatrix} \quad (5-13)$$

5.2.2

Ortogonalidade dos Modos

Os autovetores podem ser normalizados com respeito a matriz de massa $[m]$. Para tal, toma-se o i -ésimo e o j -ésimo par de autovalor e autovetor:

$$\begin{aligned} -\omega_i^2[m]\{v\}_i + [k]\{v\}_i &= \{0\} \\ -\omega_j^2[m]\{v\}_j + [k]\{v\}_j &= \{0\}. \end{aligned} \quad (5-14)$$

Feito isso, multiplica-se a primeira equação por $\{v\}_j^T$ e a segunda por $\{v\}_i^T$, obtendo-se:

$$\begin{aligned} -\omega_i^2\{v\}_j^T[m]\{v\}_i + \{v\}_j^T[k]\{v\}_i &= 0 \\ -\omega_j^2\{v\}_i^T[m]\{v\}_j + \{v\}_i^T[k]\{v\}_j &= 0. \end{aligned} \quad (5-15)$$

Tomando-se a transposta da segunda equação e lembrando que $[m]$ e $[k]$ são matrizes simétricas:

$$-\omega_j^2\{v\}_j^T[m]\{v\}_i + \{v\}_j^T[k]\{v\}_i = 0. \quad (5-16)$$

A subtração de (5-16) da primeira equação de (5-15) resulta em:

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2)\{v\}_j^T[m]\{v\}_i = 0. \quad (5-17)$$

Assim, tem-se que:

$$\{v\}_j^T[m]\{v\}_i = \begin{cases} m_i & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (5-18)$$

Para determinar uma propriedade análoga para a matriz de rigidez, Reescreve-se a equação (5-16) para $i = j$:

$$\{v\}_j^T[k]\{v\}_i = \omega_i^2 \quad (5-19)$$

de forma que:

$$\{v\}_j^T[k]\{v\}_i = \begin{cases} \omega_i^2 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (5-20)$$

Construindo uma matriz composta por vetores colunas com os modos de vibração:

$$[v] = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \{v\}_1 & \{v\}_2 & \cdots & \{v\}_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

as matrizes de massa $[m]$ e rigidez $[k]$ podem ser diagonalizadas ($[m_d]$ e $[k_d]$) fazendo-se:

$$[m_d] = [v]^T [m] [v] = \begin{bmatrix} m_{d1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & m_{d2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & m_{dn} \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

$$[k_d] = [v]^T [k] [v] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \omega_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (5-23)$$

Observe que $[m_d] = [v]^T [m] [v]$ e $[k_d] = [v]^T [k] [v]$ representam uma mudança de base. Indicam que as matrizes $[m]$ e $[k]$ estão escritas em uma base ortogonal formada pelos autovetores do sistema.

Para normalizar a matriz $[m_d]$, constrói-se uma matriz $[v^{(n)}]$ cujas colunas sejam:

$$\{v\}_i^{(n)} = \frac{1}{m_{d_i}} \{v\}_i \quad (5-24)$$

posteriormente, faz-se a operação:

$$[m_d^{(n)}] = [v^{(n)}]^T [m] [v^{(n)}] = [I] \quad (5-25)$$

onde $[I]$ representa a matriz identidade.

5.2.3

Amortecimento Proporcional

A inclusão de termos dissipativos na modelagem de sistemas dinâmicos não é uma tarefa simples [9] [21]. Por isso, muitas vezes considera-se a matriz de amortecimento $[c]$ como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez (amortecimento de Rayleigh). Assim, sendo α e β duas constantes:

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k]. \quad (5-26)$$

Devido a essa combinação linear entre $[m]$ e $[k]$, a matriz resultante $[c]$ também pode ser diagonalizada através da matriz modal $[v]$.

$$[c_d] = [v]^T [c] [v] = [v]^T (\alpha [m] + \beta [k]) [v] = \alpha [m_d] + \beta [k_d]. \quad (5-27)$$

5.2.4 Modos Normais

Através das matrizes diagonais definidas anteriormente $[m_d]$, $[c_d]$ e $[k_d]$, é possível transformar a equação de movimento do sistema (5-1) em um sistema de n equações diferenciais desacopladas.

Essa transformação representa em uma enorme redução no esforço computacional exigido para o cálculo da resposta de cada um dos graus de liberdade ao longo do tempo. Por isso, quando trabalha-se com sistemas com muitos graus de liberdade, é usual utilizar-se desse artifício.

Para tal é necessário fazer uma mudança de coordenadas. São utilizadas as coordenadas modais $\{y\}$:

$$\{x(t)\} = [v] \{y(t)\}. \quad (5-28)$$

Substituindo (5-28) na equação de movimento (5-1):

$$[m][v] \{\ddot{y}\} + [c][v] \{\dot{y}\} + [k][v] \{y\} = \{f(t)\}. \quad (5-29)$$

e multiplicando-se por $[v]^T$:

$$[v]^T [m][v] \{\ddot{y}\} + [v]^T [c][v] \{\dot{y}\} + [v]^T [k][v] \{y\} = [v]^T \{f(t)\} \quad (5-30)$$

a equação de movimento do sistema se torna:

$$[m_d] \{\ddot{y}\} + [c_d] \{\dot{y}\} + [k_d] \{y\} = \{q\} \quad (5-31)$$

onde $\{q\}$ representa o vetor de forças escrito nas coordenadas modais:

$$\{q(t)\} = [v]^T \{f(t)\}. \quad (5-32)$$

5.3 Método da Resposta ao Impulso

Nesta seção é apresentado o método da resposta ao impulso. Ele permite calcular a média de deslocamento, autocorrelação e densidade espectral de um sistema n -dimensional submetido a forçamentos caracterizados como processos estocásticos.

Na notação utilizada, o deslocamento e força são representados pelos vetores $\{X(t)\}$ e $\{F(t)\}$ ($n \times 1$). Cada componente está associada a um grau de liberdade, e representa um processo estocástico de parâmetro t associado ao tempo.

$$\{X(t)\} = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix} \quad \{F(t)\} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix} \quad (5-33)$$

Para cada realização de $\{F(t)\}$, ou seja $\{f\}$, a resposta de um determinado grau de liberdade i é igual a somatório do deslocamento de i causado por cada componente f_j da força, ou seja:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n x_{ij}(t) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f_j(t - \tau) g_{ij}(\tau) d\tau. \quad (5-34)$$

Supõe-se que todas as componentes de $\{F(t)\}$ são processos estocásticos estacionários, ou seja, tem média constante μ_{F_i} e função de correlação cruzada $R_{F_i F_j}$ dependente apenas da diferença entre dois valores do parâmetro t , ou seja $\tau = t_2 - t_1$.

Para calcular-se a média do processo estocástico de cada grau de liberdade $X_i(t)$, parte-se da equação (5-34) com um procedimento semelhante ao mostrado no capítulo anterior:

$$E[X_i(t)] = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^t E[F_j(t - \tau)] g_{ij}(\tau) d\tau \quad (5-35)$$

$$\mu_{X_i}(t) = \sum_{j=1}^n \mu_{F_j} \int_{-\infty}^t g_{ij}(\tau) d\tau.$$

Tomando-se o limite quando $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_{X_i}(t) = \sum_{j=1}^n \mu_{F_j} h_{ij}(0) \quad (5-36)$$

onde a integral $\int_{-\infty}^{\infty} g_{ij}(\tau) d\tau$ foi calculada a partir de (4-71). Em forma matricial, a média de $\{X(t)\}$ é expressa por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\mu_X(t)\} = [h(0)] \{\mu_F\}. \quad (5-37)$$

com:

$$\{\mu_X(t)\} = \begin{bmatrix} \mu_{X_1}(t) \\ \vdots \\ \mu_{X_n}(t) \end{bmatrix} \quad \{\mu_F(t)\} = \begin{bmatrix} \mu_{F_1} \\ \vdots \\ \mu_{F_n} \end{bmatrix}. \quad (5-38)$$

A seguir é mostrado as expressões da função de correlação e densidade espectral.

Para calcular-se a correlação cruzada entre os dois processos estocásticos que caracterizam o deslocamento dos graus de liberdade i e j , ou seja X_i e X_j , faz-se:

$$\begin{aligned} R_{X_i X_j}(\tau) &= E[X_i(t)X_j(t+\tau)] \\ &= E \left[\sum_{a=1}^n X_{ia}(t) \cdot \sum_{b=1}^n X_{jb}(t+\tau) \right] \\ &= E \left[\sum_{a=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} g_{ia}(\alpha) F_a(t-\alpha) d\alpha \cdot \sum_{b=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} g_{jb}(\beta) F_b(t+\tau-\beta) d\beta \right] \quad (5-39) \\ &= \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{ia}(\alpha) g_{jb}(\beta) E[F_a(t-\alpha) F_b(t+\tau-\beta)] d\alpha d\beta \\ &= \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{ia}(\alpha) g_{jb}(\beta) R_{F_a F_b}(\tau - \beta + \alpha) d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

onde $R_{F_a F_b}$ representa correlação cruzada entre os dois processos estocásticos do forçamento nos graus de liberdade a e b , ou seja, $F_a(t)$ e $F_b(t)$.

A partir, de $R_{X_i X_j}$, a densidade espectral cruzada de $X_i(t)$ e $X_j(t)$ é definida por:

$$S_{X_i X_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{X_i X_j}(\tau) \exp -i\omega\tau d\tau \quad (5-40)$$

Tendo as expressões (5-39) e (5-40), pode-se definir as matrizes de correlação e densidade espectral para o deslocamento $\{X(t)\}$:

$$[R_{XX}(\tau)] = \begin{bmatrix} R_{X_1 X_1}(\tau) & \cdots & R_{X_1 X_n}(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{X_n X_1}(\tau) & \cdots & R_{X_n X_n}(\tau) \end{bmatrix} \quad (5-41)$$

$$[S_{XX}(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{X_1X_1}(\omega) & \cdots & R_{X_1X_n}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{X_nX_1}(\omega) & \cdots & R_{X_nX_n}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5-42)$$

De forma análoga, as matrizes de correlação e densidade espectral para o forçamento $\{F(t)\}$ são:

$$[R_{FF}(\tau)] = \begin{bmatrix} R_{F_1F_1}(\tau) & \cdots & R_{F_1F_n}(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{F_nF_1}(\tau) & \cdots & R_{F_nF_n}(\tau) \end{bmatrix} \quad (5-43)$$

$$[S_{FF}(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{F_1F_1}(\omega) & \cdots & S_{F_1F_n}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{F_nF_1}(\omega) & \cdots & S_{F_nF_n}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5-44)$$

No caso do sistema com n graus de liberdade, é possível definir uma relação entre a matriz de densidade espectral de $\{X(t)\}$ e $\{F(t)\}$ semelhante com definida no capítulo anterior (4-93). Para encontrá-la substitui-se (5-39) em (5-40). Após feitas algumas manipulações algébricas, obtém-se o seguinte resultado:

$$S_{X_iX_j}(\omega) = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \bar{h}_{ia}(\omega) h_{jb}(\omega) S_{F_aF_b}(\omega). \quad (5-45)$$

onde \bar{h}_{ia} representa o complexo conjugado de h_{ia} . Em forma matricial, (5-45) é expressa por:

$$S_{X_iX_j}(\omega) = \{\bar{h}_i\} [S_{FF}(\omega)] \{h_j\}^T. \quad (5-46)$$

Nessa notação, o termo $\{\bar{h}_i\}$ é um vetor linha de dimensão $(1 \times n)$:

$$\{\bar{h}_i\} = [\bar{h}_{i1} \cdots \bar{h}_{in}] \quad (5-47)$$

e o termo $\{h_j\}^T$ é um vetor coluna de dimensão $(n \times 1)$:

$$\{h_j\}^T = \begin{bmatrix} h_{j1}(\omega) \\ \vdots \\ h_{jn}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (5-48)$$

Dessa forma, a equação (5-46) pode ser generalizada por:

$$[S_{XX}(\omega)] = [\bar{h}(\omega)][S_{FF}(\omega)][h(\omega)]^T. \quad (5-49)$$

Exemplo 5.3.1 (Método da resposta ao impulso). Suponha que deseja-se determinar a matriz de densidade espectral $[S_{XX}]$ da resposta em deslocamento de um sistema de dois graus de liberdade como mostra a figura (5.2). A força que atua em m_1 é caracterizada como um ruído branco com densidade espectral S_0 .

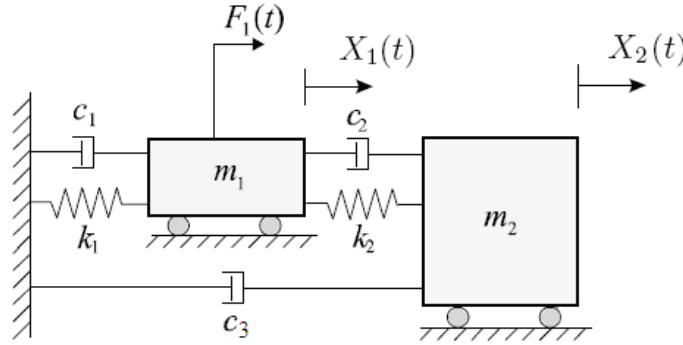


Figura 5.2: Sistema massa-mola-amortecedor com 2 graus de liberdade.

A equação de movimento determinística do sistema é dada por:

$$[m] \{\ddot{x}(t)\} + [c] \{\dot{x}(t)\} + [k] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (5-50)$$

onde:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (5-51)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad \{f(t)\} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-52)$$

A matriz com as funções de transferências $[\mathcal{H}(\omega)]$ é determinada através do inverso da matriz $[Z(\omega)]$ (5-3):

$$[Z(\omega)] = -\omega^2[m] + i\omega[c] + [k] \quad (5-53)$$

$$[\mathcal{H}(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\det[Z]} \begin{bmatrix} -m_2\omega^2 + i\omega(c_2 + c_3) + k_2 & i\omega c_2 + k_2 \\ i\omega c_2 + k_2 & -m_1\omega^2 + i\omega(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2) \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{Z}] &= \omega^4(m_1 m_2) - i\omega^3(m_2 c_1 + m_2 c_2 + m_1 c_2 + m_1 c_3) + \\ &- \omega^2(m_2 k_1 + m_2 k_2 + c_2 c_1 + c_3 c_1 + c_3 c_2 + k_2 m_1) + \\ &+ i\omega(c_2 k_1 + c_3 k_1 + c_3 k_2 + k_2 c_1) + k_2 k_1 \end{aligned} \quad (5-54)$$

Como no sistema só há força atuando em m_1 (um ruído branco), a matriz de densidade espectral de F vale:

$$[S_{FF}(\omega)] = \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5-55)$$

Assim, pela expressão (5-49) cada elemento da matriz de densidade espectral da resposta do sistema X é:

$$\begin{aligned} S_{X_1 X_1}(\omega) &= \overline{\mathcal{H}_{11}}(\omega) S_0 \mathcal{H}_{11}(\omega) \\ S_{X_1 X_2}(\omega) &= \overline{\mathcal{H}_{11}}(\omega) S_0 \mathcal{H}_{21}(\omega) \\ S_{X_2 X_1}(\omega) &= \overline{\mathcal{H}_{21}}(\omega) S_0 \mathcal{H}_{11}(\omega) \\ S_{X_2 X_2}(\omega) &= \overline{\mathcal{H}_{21}}(\omega) S_0 \mathcal{H}_{21}(\omega). \end{aligned} \quad (5-56)$$

A figura (5.3) mostra os gráficos traçados em MATLAB através da rotina DENESPEC_RESPOSTAIMPULSO para $S_{X_1 X_1}$ e $S_{X_2 X_2}$ em função da frequência. Foram utilizados os seguintes valores de constantes: $m_1 = 0.99$ [Kg], $m_2 = 1.00$ [Kg], $k_1 = 3.00$ [N/m], $k_2 = 5.00$ [N/m], $c_1 = 0.10$ [Kg/s], $c_2 = 1.00 \cdot 10^{-4}$ [Kg/s] e $c_3 = 0.10$ [Kg/s].

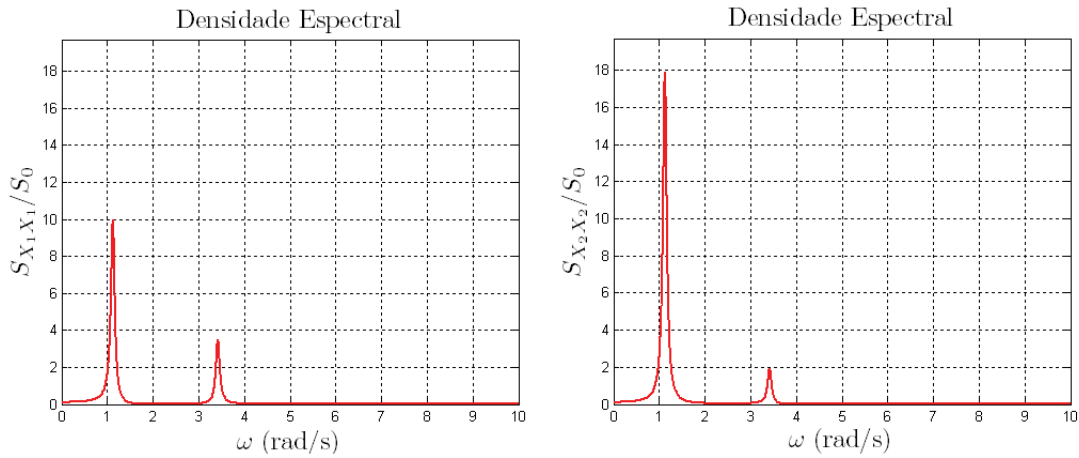


Figura 5.3: Densidade Espectral de $S_{X_1 X_1}$ e $S_{X_2 X_2}$ - Método da Resposta ao Impulso

5.4

Método dos Modos Normais

Nesta seção é apresentado o método dos modos normais. Ele permite calcular a média de deslocamento, autocorrelação e densidade espectral de um sistema com n graus de liberdade submetido a forçamentos caracterizados como processos estocásticos ergódicos.

Como dito na introdução do capítulo, aplica-se esse método quando o sistema está escrito em coordenadas modais (5-31). Assim, na notação utilizada, o deslocamento e força (coordenadas modais) são representados pelos vetores $\{Y(t)\}$ e $\{Q(t)\}$ ($n \times 1$). Cada componente está associada a um grau de liberdade, e representa um processo estocástico.

$$\{Y(t)\} = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_n(t) \end{bmatrix} \quad \{Q(t)\} = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{bmatrix} \quad (5-57)$$

A cada realização de $\{Q(t)\}$, a resposta determinística $\{y\}$ pode ser escrita em coordenadas $\{x\}$ bastando aplicar a relação de transformação de coordenadas (5-28). Assim, para um determinado grau de liberdade i , pode-se escrever:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n v_{ij} y_j(t). \quad (5-58)$$

Substituindo (5-58) na expressão da correlação:

$$\begin{aligned} R_{X_i X_j}(\tau) &= E[X_i(t)X_j(t + \tau)] \\ &= E \left[\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n v_{ia} v_{jb} Y_a(t) Y_b(t + \tau) \right]. \end{aligned} \quad (5-59)$$

No Método da Resposta ao Impulso apresentado na seção anterior, para calcular-se a correlação entre dois graus de liberdade i e j foi utilizada a expressão (5-34) e, posteriormente utilizados os termos da matriz $[g]$ de funções de resposta ao impulso (5-6).

Nesta seção, um procedimento muito semelhante é feito. Porém, como utiliza-se as coordenadas modais, um importante detalhe deve ser ressaltado: a matriz de funções de resposta ao impulso escrita em coordenadas modais, $[g^*]$, é diferente de $[g]$.

Lembrando que a equação de movimento foi transformada em um sistema de n equações desacopladas (5-31), $[g^*]$ é uma matriz diagonal. Cada termo diferente de zero equivale à resposta ao impulso de um sistema de 1 grau de liberdade e, portanto:

$$[h^*(\omega)] = \begin{bmatrix} h_1^*(\omega) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_n^*(\omega) \end{bmatrix} \quad [g^*(t)] = \begin{bmatrix} g_1^*(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_n^*(t) \end{bmatrix} \quad (5-60)$$

onde:

$$h_i^*(\omega) = \frac{1}{-m_{d_i}\omega^2 - ic_{d_i}\omega + k_{d_i}}. \quad (5-61)$$

Conhecendo-se os termos da matriz $[g^*]$, para cada realização do forçamento $\{Q(t)\}$, a resposta de cada coordenada modal y_i é expressa por:

$$y_i = \int_0^t q_i(\tau) g_i^*(t - \tau) d\tau. \quad (5-62)$$

Substituindo (5-62) em (5-59) e fazendo a Transformada de Fourier de $R_{X_i X_j}$, chega-se ao seguinte resultando após algumas manipulações algébricas:

$$S_{X_i X_j}(\omega) = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n v_{ia} v_{jb} h_a^*(\omega) h_b^*(\omega) S_{Q_a Q_b}. \quad (5-63)$$

Em notação matricial:

$$[S_{XX}(\omega)] = [v][\bar{h}^*(\omega)][S_{QQ}(\omega)][h^*(\omega)][v]^T \quad (5-64)$$

onde $[S_{QQ}]$ é a matriz de densidade espectral das forças em coordenadas modais. Ela se relaciona com $[S_{FF}]$ através da seguinte expressão:

$$[S_{QQ}(\omega)] = [v]^T [S_{FF}(\omega)] [v] \quad (5-65)$$

Exemplo 5.4.1 (Método dos modos normais). Na figura (5.3) do exemplo anterior 5.3.1 são mostrados os gráficos de $S_{X_1 X_1}$ e $S_{X_2 X_2}$ referentes ao sistema (5.2) calculados pela expressão analítica do Método da Resposta ao Impulso. Suponha agora que se deseja:

1. comparar esses resultados com $S_{X_1 X_1}$ e $S_{X_2 X_2}$ calculados pelo Método dos Modos Normais;
2. fazer uma estimação de $S_{X_1 X_1}$ e $S_{X_2 X_2}$ pelo método de Monte Carlo, com 10^4 realizações do deslocamento de $\{X(t)\}$.

Igualmente ao exemplo da seção anterior, considera-se a força atuante em m_1 um ruído branco S_0 . Assim, as expressões analíticas utilizadas para

calcular a matriz de densidade espectral estão definidas nas equações (5-64) e (5-65), onde cada coluna da matriz $[v]$ é um modo de vibração do sistema, e $[S_{FF}]$ é dada por (5-55). Dessa forma:

$$[S_{XX}(\omega)] = [v][\bar{h}^*(\omega)][v]^T[S_{FF}(\omega)][v][h^*(\omega)][v]^T. \quad (5-66)$$

As matrizes de massa $[m]$, rigidez $[k]$ e amortecimento $[c]$ são obtidas por (5-51) (5-52) considerando-se os mesmos valores de $m_1, m_2, k_1, k_2, c_1, c_2$ e c_3 do exemplo da seção anterior. Esses valores permitem considerar $[c]$ proporcional às matrizes de massa e rigidez (no caso com $\alpha = 0.10$ e $\beta = 2.00 \times 10^5$).

A equação de movimento determinística do sistema escrito em coordenadas modais é mostrada em (5-67), onde as matrizes diagonais $[m_d]$, $[k_d]$, e $[c_d]$ são calculadas respectivamente por (5-22) (5-23) e (5-26).

$$[m_d] \{\ddot{y}(t)\} + [c_d] \{\dot{y}(t)\} + [k_d] \{y(t)\} = \{q(t)\}. \quad (5-67)$$

Em coordenadas modais, cada realização da força $\{f\}$ é expressa por:

$$\{q(t)\} = [v]^T \{f(t)\} \quad (5-68)$$

o deslocamento y_i por (5-69), e o deslocamento x_i por (5-70):

$$y_i(t) = \int_0^t q_i(\tau) g_i^*(t - \tau) d\tau \quad (5-69)$$

$$g_i^*(t) = \frac{1}{m_{d_i} \omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t$$

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^2 v_{ij} y_j(t). \quad (5-70)$$

Vale observar que a utilização de coordenadas modais simplifica muito o cálculo de cada realização de $\{X(t)\}$. Pois, caso essa transformação não seja feita, as expressões de (5-69) não podem ser utilizadas e o deslocamento deve ser calculado através de (5-34) (onde cada função g_{ij} é obtida pela Transformada de Fourier dos termos de $[h]$).

As estimativas de $S_{X_1 X_1}$ e $S_{X_2 X_2}$, obtidas a partir de realizações do deslocamento $\{X(t)\}$, são feitas através da equação (4-61).

A rotina `DENESPEC_MODOSNORMAIS` implementada em MATLAB faz o cálculo dessas estimativas de $S_{X_1 X_1}$ e $S_{X_2 X_2}$. No código desenvolvido, para cada simulação do sistema mecânico, uma realização do forçamento $\{f\}$ é obtida através da rotina `GERADOR_RUIDOBRANCO` e, o deslocamento

correspondente, $\{x(t)\}$, é calculado por (5-60).

A figura (5.4) mostra os gráficos de $S_{X_1X_1}$ e $S_{X_2X_2}$ obtidos. Como esperado, o resultado da expressão analítica coincide com o estimado através das realizações de $\{X(t)\}$.

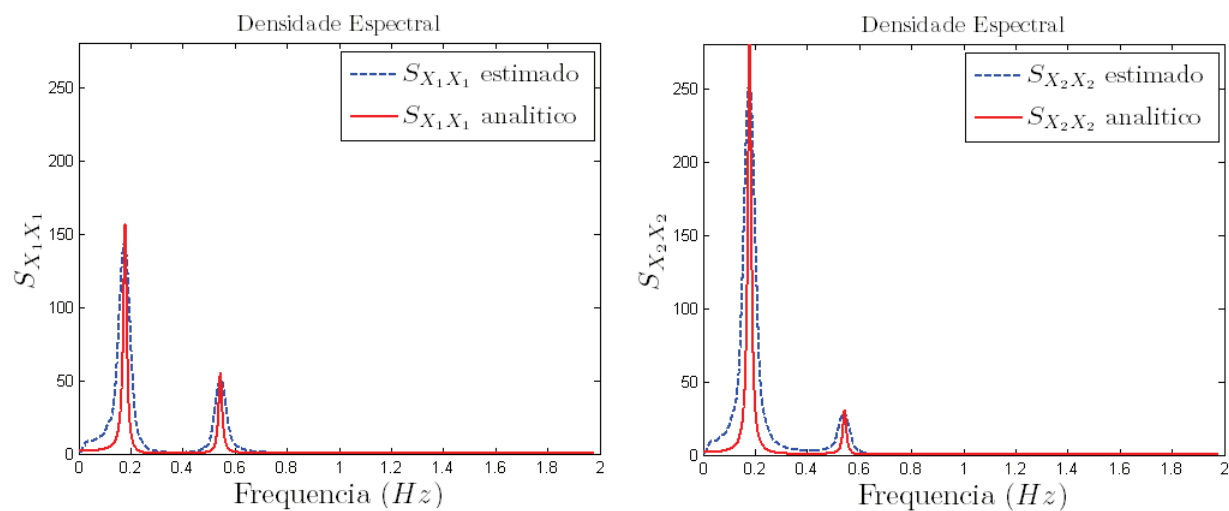


Figura 5.4: Densidade Espectral de $S_{X_1X_1}$ e $S_{X_2X_2}$ - Método dos Modos Normais