7
Referências Bibliográficas

1 ABOUDI, J. **Mechanics of Composite Materials: A Unified Micromechanical Approach**. Amsterdam: Elsevier, 1991.

2 ABOUDI, J.; PINDERA, M.-J.; ARNOLD, S.M. Higher-order theory for functionally graded materials. **Composites (Part B)**, v.30, p. 777-832, 1999.

3 AFSAR, A.M.; SEKINE, H. Optimum material distributions for prescribed apparent fracture toughness in thick-walled FGM circular pipes. **Intnl. J. Pressure Vessel Piping**, v.78, p. 471-484, 2001.

4 ALMEIDA, C.A.; ALBINO, J.C.R.; MENEZES, I.F.M.; PAULINO, G.H. Geometric Nonlinear analyses of functionally graded beams using a tailored Lagrangian formulation. **Mechanics Research Commun.**, v.38, p. 553-559, 2011.

5 ALMEIDA, C.A.; ALBINO, J.C.R.; MENEZES, I.F.M.; PAULINO, G.H. On The of Structural Dynamics of Risers Composed of Functionally Graded Materials. **Proceedings of the XIV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics – DINAME 2011**. SP: ABCM, 2011, p. 97-100.

6 American Petroleum Institute. **API 17B**: Recommended Practice for Flexible Pipes. Washington, D.C., 2002.

7 American Petroleum Institute. **API 17J**: Specification for Unbounded Flexible Pipes. Washington, D.C., 1999.

8 ANATYCHUK, L.I.; VIKHOR, L.N. Functionally Graded Materials and New Prospects for Thermoelectricity Use. **Proceedings of the XVI International Conference on Thermoelectrics**. Dresden, Germany, 1997, p. 588-591.

9 ANDREWS, A.T. **Análise Bidimensional da Dinâmica de Linhas Flexíveis Incluindo os Efeitos do Contato com o Fundo Marinho.** RJ. Dissertação de Mestrado – Engenharia Mecânica, PUC-Rio, 2004.

10 ARCHER, G.C.; WHALEN T.M. Development of Rotationally Consistent Diagonal Mass Matrices for Plate and Beam Elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.194, p. 675-689, 2005.

11 ARGYRIS, J. An Excursion into Large Rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.32, p. 85-155, 1982.

12 ARICINIEGA, R.A.; REDDY, J.N. Large deformation analysis of functionally graded shells. **Intnl. J. Solids and Structures**, v.44, p. 2036-2052, 2007.

13 BATHE, K-J; RAMM, E.; WILSON, E. Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis. **Intnl. J. Numer. Meth. Engng**, v.9, p. 353-386, 1975.

14 BATHE, K-J; BOLOURCHI, S. Large Displacement Analysis of Three-dimensional Beam Structures. **Intnl. J. Numer. Meth. Engng**, v.14, p. 961-986, 1979.

15 BATHE, K-J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

16 BATTINI, J-M. Co-rotational Beam Elements in Instability Problems. **Technical Report (Royal Institute of Technology)**, jan. 2002.

17 BENJAMIN, A.C. **Análise Não-Linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais pelo Métodos dos Elementos Finitos**. RJ. Dissertação de Mestrado - Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 1982.

18 BHANGALE, R. K.; GANESAN, N. Thermoelastic Buckling and Vibration Behavior of a Functionally Graded Sandwich Beam With Constrained Viscoelastic Core. **J. Sound Vib.**, v.295, p. 294-316, 2006.

19 BIRMAN, V.; BYRD, W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials Structures. **Appl. Mech. Reviews (ASME)**, v.60, p. 195–216, 2007.

20 CHAKRABARTI, S.K. **Hydrodynamics of Offshore Structures**. New York: Springer-Verlag, 1987.

21 CHAKRABORTY, A.; GOPALAKRISHNAN, S.; REDDY, J.N. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. **Int. J. Mech. Science**, v.45, p. 519-539, 2003.

22 CHAN, S.L. Large Deflection Dynamic Analysis of Space Frames. **Computers and Structures**, v58(2), p. 381-387, 1996.

23 CHEN, B.; TONG, L. Sensitivity Analysis of Heat Conduction for Functionally Graded Materials. **Material Design**, v.25, p. 663-672, 2004.

24 CHO, J.R.; PARK, H.J. High Strength FGM Cutting Tools: Finite Element Analysis on Thermoelastic Characteristics. **Journal of Materials Processing Technology**, v.130-131, p. 351-356, 2002.

25 COOLEY, W.G. **Application of Functionally Graded Materials in Aircraft Structures**. Ohio. M. S. Thesis – Department of Aeronautics and Astronautics, Air University, 2005.

26 CORREA, F.N. **Aplicação de Metodologias Híbridas em Estudos Paramétricos sobre o Comportamento de Sistemas Offshore**. RJ. Dissertação de Mestrado - Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 2003.

27 COSTA, C.H.O. **Correlação Analítico–Experimental de Risers Flexíveis submetidos a Cargas Radiais**. RJ. Dissertação de Mestrado - Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 2003.

28 ESHELBY, J.D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems. **Proceeding Royal Society London**, **Ser. A**, v.241, p. 376-396, 1957.

29 GERE, J.M.; WEAVER JR., W. **Análise de Estruturas Reticuladas**. RJ: Editora Guanabara, 1987.

30 GONZALES, E.C. **Análise Estrutural de Risers para Águas Profundas**. RJ. Dissertação de Mestrado - Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 1990.

31 GU, Y.X.; CHEN, B.S.; ZHANG, H.W.; GRANDHI R.V. A Sensitivity Analysis Method for Linear and Nonlinear Transient Heat Conduction with Precise Time Integration. **Struct. Multidiscip. Optimization**, v.24, p. 23–37, 2002.

32 HOSSEINI KORDKHEILI, S.A.; BAHAI, H.; MIRTAHERI, M. An Updated Lagrangian Finite Element Formulation for Large Displacement Dynamic Analysis of Three-dimensional Flexible Riser Structures. **Ocean Engineering**, v.38, p. 793-803, 2011.

33 IRANI, M.B. **Some Aspects of Marine Riser Analysis**. Vancouver, Canada. PhD. Thesis – Department of Mechanical Engineering, University of British Columbia, 1989.

34 ISAACSON, M. **The Forces on Circular Cylinders in Waves**. Cambridge, U.K. PhD. Thesis – Department of Engineering, University of Cambridge, 1974.

35 JACOB B.; EBECKEN N.; GOMES M. Numerical Simulation of the 'pull-in' Operation in Submarine Pipelines. **Engineering Structures**, v.19(10), p.868-876, 1997.

36 JIN, Z.-H. An Asymptotic Solution of Temperature Field in a Strip of a Functionally Graded Material. **Intnl. Comm. Heat Mass Transfer**, v.29, p. 887-895, 2002.

37 JIN, Z.-H.; NODA, N. Crack-tip Singular Fields in Nonhomogeneous Materials. **J. Applied Mechanics, Trans. ASME**, v.61, p. 738–740, 1994.

38 KAYSER JUNIOR, D.L. **Análise Dinâmica de Linhas Flexíveis com Elemento de Pórtico Não Linear Geométrico Hibrido**. RJ. Dissertação de Mestrado - Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 2003.

39 KAYSSER, W.A.; ILSCHNER, B., FGM Research Activities in Europe. **MRS Bull.**, v.20, p. 22-26, 1995.

40 KHOR, K.A.; GU, Y.W.; DONG, Z.L. Mechanical Behavior of Plasma Sprayed Functionally Graded YSZ/NiCoCrAlY Composite Coatings. **Surface and Coatings Technology**, v.139, p. 200-206, 2001.

41 KIM, J-H.; PAULINO, G.H. Isoparametric Graded Finite Elements for Nonhomogeneous Isotropic and Orthotropic Materials. **ASME. J. Applied Mechanics**, v.69, p. 502-514, 2002.

42 KOIKE, Y; ISHIGURE, T. Functionally Graded Materials (FGM). Graded Refractive Index Polymer Optical Fiber. **Materials Integration**, v.12(10), p. 33-38, 1999.

43 KOIZUMI, M. FGM Activities in Japan. **Composites (Part B)**, v.28, p. 1-4, 1997.

44 KOIZUMI, M. The Concept of FGM. **Ceramic Transactions**, **Functionally Gradient Materials**, v.34, p. 3–10, 1993.

45 LAGES, E.N., PAULINO G.H.; MENEZES, I.F.M.; SILVA, R.R. Nonlinear Finite Element Analysis Using an Object-Oriented Phlosophy – Application to Beam Elements and to the Cosserat Continuum. **Engng. with Computers**, v.15, p. 73-89, 1999.

46 LEE, S-L.; MANUEL, F.S.; ROSSOW, E.C. Large Deflections and Stability of Elastic Frames. **J. Engng. Mech. Div.** (ASCE), v.94 (EM2), p. 521-547, 1968.

47 LEE, W.Y.; STINTON, D.P.; BERNDT, C.C.; ERDOGAN, F.; LEE, Y.D.; MUTASIM, Z.Z. Concept of Functionally Graded Materials for Advanced Thermal Barrier Coating Applications. **Journal of the American Ceramic Society**, v.79(12), p. 3003-3012, 1996.

48 LUSTOSA, E.M. **Dinâmica de Linhas Marítimas pelo Método dos Elementos Finitos**. RJ. Dissertação de Mestrado – Engenharia Mecânica, PUC-Rio, 2000.

49 MCNAMARA, J.F.; O'BRIEN, P.J.; GILROY, S.G. Nonlinear Analysis of Flexible Risers Using Hybrid Finite Elements. **J. Offshore Mech. Arct.**, v.110, p. 197-204, 1988.

50 MALVERN, L.E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. New Jersey: Prentice-Hall, 1969.

51 MATHISEN, K.M. **Large Displacement Analysis of Flexible and Rigid Systems Considering Displacement-Dependent Loads and Nonlinear Constrains**. Trondheim, Norway. D.Sc. Thesis – Division of Structural Engineering, The Norwegian Institute of Technology, 1990.

52 MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis**. McGraw-Hill International Editions, 1986.

53 MICHALOPOULOS, C.D. Nonlinear Random Response of Marine Pipelines in Contact with the Seabed. In: **Proc. Fifth Int. Offshore Mechanics and Artic Engineering (OMAE) Symp.** v.3, p. 639-646, 1986.

54 MORISON, J.R.; O'BRIEN, M.P.; JOHNSON, J.W.; SCHAFF, S.A. The Force Exerted by Surface Waves and Piles. **Petroleum Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers**, v.189, p. 149-154, 1950.

55 MOURELLE, M.M. **Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Constituídos por Linhas Marítimas**. RJ. Tese de Doutorado - Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 1993.

56 MOURELLE, M.M.; GONZALEZ, E.C.; SIQUEIRA, M.Q.; SAGRILO, L.V.S.; DANTAS C.M.S. **Manual Teórico do Programa Anflex**. RJ: CENPES, 2001.

57 MURA, T. **Micromechanics of Defects in Solids**. The Netherlands: Kluwer, 1982.

58 NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. **Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials**. 2.ed. Amsterdam: North-Holland, 1999.

59 NODA, N.; JIN, Z.-H. Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Strip of a Functionally Gradient Material. **Intnl. J. Solids Structures**, v.30, p. 1039-1056, 1993.

60 NUNES, C.C.; SORIANO, H.L.; VENANCIO FILHO, F. Geometric Non-linear Analysis of Space Frame with Rotation Greater than 90°, with Euler Angles and Quasi-fixed Local Axes System. **Intnl. J. Non-linear Mech.**, v.38, p. 1195-1204, 2003.

61 PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. Beam Elements in Instability Problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engng.**, v.144, p. 163-197, 1997.

62 PAZ, M. **Structural Dynamics, Theory and Computation**. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1980.

63 PEREIRA, R.M. **Monitoração de Inclinação Dinâmica de Risers Rígidos em Catenária Utilizando Sensores Inerciais**. RJ. Dissertação de Mestrado – Engenharia Oceânica, COPPE/UFRJ, 2008.

64 PETROBRAS. 2011. Disponível em: <http://www.petrobras.com.br/pt/energia-e-tecnologia/fontes-de-energia/petroleo/presal/>. Acesso em: 8 ago. 2011.

65 PINHO, A.L.S. **Redução de Tensões em Risers Rígidos de Plataformas TLP**. RJ. Dissertação de Mestrado – Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 2001.

66 PIOVAN, M.T.; SAMPAIO, R. Vibrations of Axially Moving Flexible Beams made of Functionally Graded Materials. **Thin-Walled Structures**, 2007.

67 POMPE, W.; WORCH, H.; EPPLE, M.; FRIESS, W.; GELINSKY, M.; GREIL, P.; HEMPEL, U.; SCHARNWEBER, D.; SCHULTE, K. Functionally Graded Materials for Biomedical Applications. **Materials Science and Engineering A**, v.362, p. 40-60, 2003.

68 PRAVEEN, G.N.; REDDY, J.N. Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-metal Plates. **Intnl. J. Solids Struct.**, v.35, p. 4457-4476, 1998.

69 RAMM, E. A Plate/Shell Element for Large Deflections and Rotations. In: **U.S.-Germany Symp. on ‘Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis’**, 1976.

70 REDDY, J.N.; CHIN, C.D. Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates. **J. Thermal Stress**, v.21, p. 593-626, 1998.

71 ROSA, V.R. **Otimização em Localização de Plataformas de Produção**. RJ. Dissertação de Mestrado – Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, 2006.

72 RUSTAD, A.M. **Modeling and Control of Top Tensioned Risers**. Norway. PhD. Thesis – Department of Marine Technology, Norwegian University of Science and Technology, 2007.

73 SAMPATH, S.; HERMAN, H.; SHIMODA, N.; SAITO, T. Thermal Spray Processing of FGMs. **MRS Bulletin**, v.20, p. 27-31, 1995.

74 SANKAR, B. V. An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams. **Composites in Science and Tech.**, v.61, p. 689-696, 2001.

75 SARPKAYA, T.; ISAACSON, M. **Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1981.

76 SENRA, S.F. **Metodologias de Análise e Projeto Integrado de Sistemas Flutuantes para Explotação de Petróleo Offshore**. RJ. Tese de Doutorado - Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 2004.

77 SERTÃ, O.B.; MOURELLE M.M.; GREALISH F.W.; HARBERT S.J.; SOUZA, L.F.A. Steel Catenary Riser for the Marlim Field FPS P-XVIII. In: **Offshore Technology Conference**, (OTC 8069), 1996.

78 SILVA, A.P. **Análise da Influência da Temperatura na Rigidez à Flexão de Linhas Flexíveis**. RJ. Monografia – Engenharia Naval e Oceânica. UFRJ, 2006.

79 SILVA, D.M.L. **Ferramentas Computacionais para Análise e Projeto de Instalação de Dutos Submarinos**. RJ. Tese de Doutorado - Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 2009.

80 SOUZA, R.M. **Force-based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames**. Berkeley. PhD. Thesis Dissertation - University of California, 2000.

81 SPARKS, C.P. The Influence of Tension, Pressure and Weight on Pipe and Riser deformations and Stresses. **ASME J. Energy Res. Tech.**, v.106, p. 46-54, 1984.

82 STEHFEST, H. Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transform, **Commun. Assoc. Comput. Mach.**, v.13, p. 19–47, 1970.

83 SUTRADHAR, A.; PAULINO, G.H. The Simple Boundary Element Method for Transient Heat Conduction in Functionally Graded Materials. **Computer Methods Applied Mechanics Engng.**, v.193, p. 4511-4539, 2004.

84 TAKAFUJI, F.C.M. **Dinâmica Tridimensional de Risers**. SP. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, USP, 2010.

85 TANAKA, R.L. **Otimização da Configuração de Risers Rígidos**. SP. Tese de Doutorado – Engenharia de Controle e Automação Mecânica, USP, 2009.

86 TIMOSHENKO, S.; GERE, J. **Theory of Elastic Stability**, McGraw-Hill, 1961.

87 TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D.H.; WEAVER Jr., W. **Vibration Problems in Engineering**, J. Wiley & Sons, Inc., 1974.

88 TRIANTAFYLLOU, M.S. Cable Dynamics for Offshore Applications. In: **Developments in Offshore Engineering: Wave Phenomena and Offshore Topic**s. Texas: Gulf Publishing Company. p. 256-294, 1999.

89 TUTUNCU, N.; OZTURK, M. Exact Solutions for Stresses in Functionally Graded Pressure Vessels. **Composites (Part B)**, v.32, p. 683-686, 2001.

90 URTHALER, Y.; REDDY, J.N. A Corotational Finite Element Formulation for the Analysis of Planar Beams. **Communications Numerical Meth. Engng.**, v.21, p. 553-570, 2005.

91 VEL, S.S.; BATRA, R.C. Exact Solution for Thermoelastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates. **AIAA J.**, v.40, p. 1421-1433, 2002.

92 VIEIRA, L.C.L.M. **Estudo de algoritmos de integração elemento por elemento para análise dinâmica não linear de estruturas**. Maceió. Dissertação de Mestrado – Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, 2004.

93 WILSON, J.F. **Dynamics of Offshore Structures**. New Jersey: J. Wiley & Sons, Inc., 2003.

94 YAMANOUCHI, M.; KOIZUMI, M.; HIRAI, T., SHIOTA, I. **Proceedings of the First International Symposium on Functionally Graded Materials**, 1990.

95 YAZDCHI, M.; CRISFIELD, M.A. Buoyancy Forces and the 2D Finite Element Analysis of Flexible Offshore Pipes and Risers. **Intnl. J. Numerical Meth. Engng**, v.54, p. 61-88, 2002.

96 YAZDCHI, M.; CRISFIELD, M.A. Non-linear Dynamic Behavior of Flexible Marine Pipes and Risers. **Intnl. J. Numerical Meth. Engng**, v.54, p. 1265-1308, 2002.

97 YIN, H.M.; PAULINO, G.H.; BUTTLAR, W.G.; SUN, L.Z. Effective Thermal Conductivity of Two-Phase Functionally Graded Particulate Composites. **J. Applied Physics**, v.98(6), p. 063704, 2005.

98 YIN, H.M.; SUN, L.Z.; AND PAULINO, G.H. Micromechanics-Based Elastic Model for Functionally Graded Materials with Particle Interactions. **Acta Materials**, v.52, p. 3535-3543, 2004.

99 ZHANG, H.W.; CHEN, B.S.; GU, Y.X. An Adaptive Algorithm of Precise Integration for Transient Analysis. **Acta Mechanica Solida Sinica**, v.14, p. 215–24, 2001.

100 WOO, J.; MEGUID, S.A. Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells. **Intnl. J. Solid Struct.**, v.38, p. 7409-7421, 2001.

Apêndices

Apêndice A – Medidas de deformação de Green-Lagrange

Nesta seção detalhes da dedução das equações (3.39), na seção 3.7, referente às componentes das medidas de deformação de Green-Lagrange do modelo de viga 3D com seção reta tubular. A definição de cada um dos vetores e matrizes utilizados nas deduções apresentadas neste Apêndice está mostrada na seção 3.7 deste trabalho de tese.

Referindo-se à Fig. 3.6, o vetor incremento de deslocamento de um P sobre a seção tubular entre dois instantes sucessivos t e t+Δt pode ser expresso como

$$\mathbf{u}_P = \begin{bmatrix} u_{P_1} & u_{P_2} & u_{P_3} \end{bmatrix}^T = \mathbf{X}_P - \mathbf{X}_P^0 \tag{A.1}$$

onde os correspondentes vetores posição são definidos como

$$\mathbf{X}_P^0 = \mathbf{X}_G^0 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3 \tag{A.2}$$

$$\mathbf{X}_P = \mathbf{X}_G + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 \tag{A.3}$$

Substituindo-se (A.2) e (A.3) em (A.1), tem-se

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_G + x_2\left(\mathbf{a}_2 - \mathbf{r}_2\right) + x_3\left(\mathbf{a}_3 - \mathbf{r}_3\right) \tag{A.4}$$

onde $\mathbf{u}_G = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T = \mathbf{X}_G - \mathbf{X}_G^0$ é o vetor deslocamento do centróide da seção reta do elemento. Pode-se observar que para a definição da eq.(A.4) é necessário estabelecer a relação entre as tríades de vetores orto-normais $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{r}_i$, sendo isto obtido mediante a matriz de rotação $\mathbf{R}$, assim

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{R}\mathbf{r}_2 \tag{A.5}$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{R}\mathbf{r}_3 \tag{A.6}$$

Substituindo (A.5) e (A.6) em (A.4) resulta

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_G + x_2\left(\mathbf{R} - \mathbf{I}\right)\mathbf{r}_2 + x_3\left(\mathbf{R} - \mathbf{I}\right)\mathbf{r}_3 \tag{A.7}$$

onde referidos ao sistema móvel co-rotacionado, podem-se expressar os vetores $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$ como

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{A.8}$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{A.9}$$

Uma aproximação, até segunda ordem, para **R** está mostrada na seção (3.7) e é definida como

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\Psi}) + \frac{1}{2}\mathbf{S}(\boldsymbol{\Psi})\mathbf{S}(\boldsymbol{\Psi}) \tag{A.10}$$

onde $\mathbf{S}(\boldsymbol{\Psi})$ é uma matriz anti-simétrica definida em função das componentes de um pseudo-vetor rotacional como

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\Psi}) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

Substituindo o resultado de (A.11) em (A.10), tem-se

$$\mathbf{R} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

que, depois das correspondentes operações algébricas, resulta na equação

$$\mathbf{R} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\dfrac{v_2^2 + v_3^2}{2} & -v_3 + \dfrac{v_1 v_2}{2} & v_2 + \dfrac{v_1 v_3}{2} \\ v_3 + \dfrac{v_1 v_2}{2} & -\dfrac{v_1^2 + v_3^2}{2} & -v_1 + \dfrac{v_2 v_3}{2} \\ -v_2 + \dfrac{v_1 v_3}{2} & v_1 + \dfrac{v_2 v_3}{2} & -\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{2} \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

Levando-se os resultados de (A.8), (A.9) e (A.12) em (A.7), obtem-se

$$\begin{bmatrix} u_{P_1} \\ u_{P_2} \\ u_{P_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -v_3 + \dfrac{v_1 v_2}{2} \\ -\dfrac{v_1^2 + v_3^2}{2} \\ v_1 + \dfrac{v_2 v_3}{2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} v_2 + \dfrac{v_1 v_3}{2} \\ -v_1 + \dfrac{v_2 v_3}{2} \\ -\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{2} \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

Que pode ser decomposta em duas parcelas (linear e não-linear) na forma:

$$\begin{aligned} u_{P_1} &= u_1 - x_2 v_3 + x_3 v_2 + \frac{1}{2} x_2 v_1 v_2 + \frac{1}{2} x_3 v_1 v_3 \\ u_{P_2} &= u_2 \qquad\quad - x_3 v_1 - \frac{1}{2} x_2 \left(v_1^2 + v_3^2\right) + \frac{1}{2} x_3 v_2 v_3 \\ u_{P_3} &= \underbrace{u_3 + x_2 v_1}_{\text{linear}} \quad \underbrace{+ \frac{1}{2} x_2 v_2 v_3 - \frac{1}{2} x_3 \left(v_1^2 + v_2^2\right)}_{\text{não-linear}} \end{aligned} \tag{A.14}$$

As componentes de deformação de Green-Lagrange são então expressas em função das componentes do vetor incremento de deslocamentos do ponto apresentadas nas eqs.(A.14) e resultam na forma seguinte:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_{P_{1,1}} + \frac{1}{2}\left(u_{P_{1,1}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u_{P_{2,1}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u_{P_{3,1}}\right)^2 \\
\gamma_{12} &= u_{P_{1,2}} + u_{P_{2,1}} + u_{P_{1,1}} u_{P_{1,2}} + u_{P_{2,1}} u_{P_{2,2}} + u_{P_{3,1}} u_{P_{3,2}} \\
\gamma_{13} &= u_{P_{1,3}} + u_{P_{3,1}} + u_{P_{1,1}} u_{P_{1,3}} + u_{P_{2,1}} u_{P_{2,3}} + u_{P_{3,1}} u_{P_{3,3}}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Na equação acima a vírgula seguida de um índice indica a diferenciação da componente do incremento de deslocamento em relação à coordenada correspondente. No elemento de pórtico, as componentes do vetor incremento de deslocamento variam apenas na direção longitudinal (coordenada ξ, na Fig.3.6) e somente as derivadas $u_{P_{1,1}}, u_{P_{2,1}}$ e $u_{P_{3,1}}$ na eq.(A.15) são não nulas. Assim, tem-se as medidas deformação no elemento de pórtico referidas ao sistema coordenado local

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_{P_{1,1}} + \frac{1}{2}\left(u_{P_{1,1}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u_{P_{2,1}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u_{P_{3,1}}\right)^2 \\
\gamma_{12} &= u_{P_{2,1}} \\
\gamma_{13} &= u_{P_{3,1}}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

onde

$$\begin{aligned}
u_{P_{1,1}} &= u_{1,1} - x_2 v_{3,1} + x_3 v_{2,1} + \frac{1}{2} x_2 \left(v_{1,1} v_2 + v_1 v_{2,1}\right) + \frac{1}{2} x_3 \left(v_{1,1} v_3 + v_1 v_{3,1}\right) \\
u_{P_{2,1}} &= u_{2,1} - x_3 v_{1,1} - x_2 \left(v_1 v_{1,1} + v_3 v_{3,1}\right) + \frac{1}{2} x_3 \left(v_{2,1} v_3 + v_2 v_{3,1}\right) \\
u_{P_{3,1}} &= u_{3,1} + x_2 v_{1,1} + \frac{1}{2} x_2 \left(v_{2,1} v_3 + v_2 v_{3,1}\right) - x_3 \left(v_1 v_{1,1} + v_2 v_{2,1}\right)
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Substituindo-se (A.17) em (A.16), as componentes de deformação expressas com termos até 2a. ordem resultam em

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_{1,1}\left(1 + \frac{u_{1,1}}{2}\right) - x_2 v_{3,1}\left(1 + u_{1,1}\right) + x_3 v_{2,1}\left(1 + u_{1,1}\right) + \frac{1}{2}\left(u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2\right) \\
&+ x_2\left[\frac{1}{2}\left(v_{1,1} v_2 + v_1 v_{2,1}\right) + u_{3,1} v_{1,1}\right] + x_3\left[\frac{1}{2}\left(v_{1,1} v_3 + v_1 v_{3,1}\right) - u_{2,1} v_{1,1}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2\right) v_{1,1}^2 + \frac{1}{2}\left(x_2^2 v_{3,1}^2 + x_3^2 v_{2,1}^2\right) - \left(x_2 x_3\right) v_{3,1} v_{2,1} \\
\gamma_{12} &= u_{2,1} - v_3\left(1 + u_{1,1}\right) - x_3 v_{1,1} + \frac{1}{2} v_1 v_2 + u_{3,1} v_1 - \frac{1}{2} x_3\left(v_{2,1} v_3 - v_2 v_{3,1}\right) \\
\gamma_{13} &= u_{3,1} + v_2\left(1 + u_{1,1}\right) + x_2 v_{1,1} + \frac{1}{2} v_1 v_3 - u_{2,1} v_1 + \frac{1}{2} x_2\left(v_{2,1} v_3 - v_2 v_{3,1}\right)
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Assumindo-se desprezível a variação do comprimento do elemento de *riser* comparada com o seu comprimento original, i.e. $1+u_{1,1}\approx 1$ e $1+u_{1,1}/2\approx 1$, as equações em (A.18) reduzem-se a

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_{1,1} - x_2 v_{3,1} + x_3 v_{2,1} + \frac{1}{2}\left(u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2\right) + x_2\left[\frac{1}{2}\left(v_{1,1}v_2 + v_1 v_{2,1}\right) + u_{3,1}v_{1,1}\right] \\
&\qquad + x_3\left[\frac{1}{2}\left(v_{1,1}v_3 + v_1 v_{3,1}\right) - u_{2,1}v_{1,1}\right] + \frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2\right)v_{1,1}^2 \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(x_2^2 v_{3,1}^2 + x_3^2 v_{2,1}^2\right) - \left(x_2 x_3\right)v_{3,1}v_{2,1} \qquad \text{(A.19)} \\
\gamma_{12} &= u_{2,1} - v_3 - x_3 v_{1,1} \quad + \quad \frac{1}{2}v_1 v_2 + u_{3,1}v_1 - \frac{1}{2}x_3\left(v_{2,1}v_3 - v_2 v_{3,1}\right) \\
\gamma_{13} &= \underbrace{u_{3,1} + v_2 + x_2 v_{1,1}}_{\text{linear }\left(\mathrm{e}_{ij}\right)} \quad + \underbrace{\quad \frac{1}{2}v_1 v_3 - u_{2,1}v_1 + \frac{1}{2}x_2\left(v_{2,1}v_3 - v_2 v_{3,1}\right)}_{\text{não-linear }\left(\eta_{ij}\right)}
\end{aligned}
$$

e que foram utilizadas na dedução das equações de equilíbrio resultantes da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Apêndice B – Formulação Lagrangeana Total

Na Fig. B.1 é mostrada a configuração deformada de uma viga no plano x-y sob grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações. A configuração de referencia corresponde à linha central I-J de um elemento de viga de comprimento L, estendendo-se sobre o eixo local x.

Cada ponto sobre o eixo da viga esta submetido a deslocamentos axiais $u(x)$ e transversais $v(x)$, e está associado a uma seção transversal genérica S, na qual a sua vez pode experimentar rotações finitas $\theta(x)$, onde a abscissa $x \in [0.L]$ é medida sobre a configuração de referencia. A linha central da viga I'-J', na configuração deformada pode ser descrita por meio do vetor de posição $\mathbf{r}(x)$, definido como

$$\mathbf{r}(x) = [x + u(x)]\mathbf{i} + v(x)\mathbf{j} \tag{B.1}$$

onde **i** e **j** são vetores unitários nos eixos fixos x e y, respectivamente.

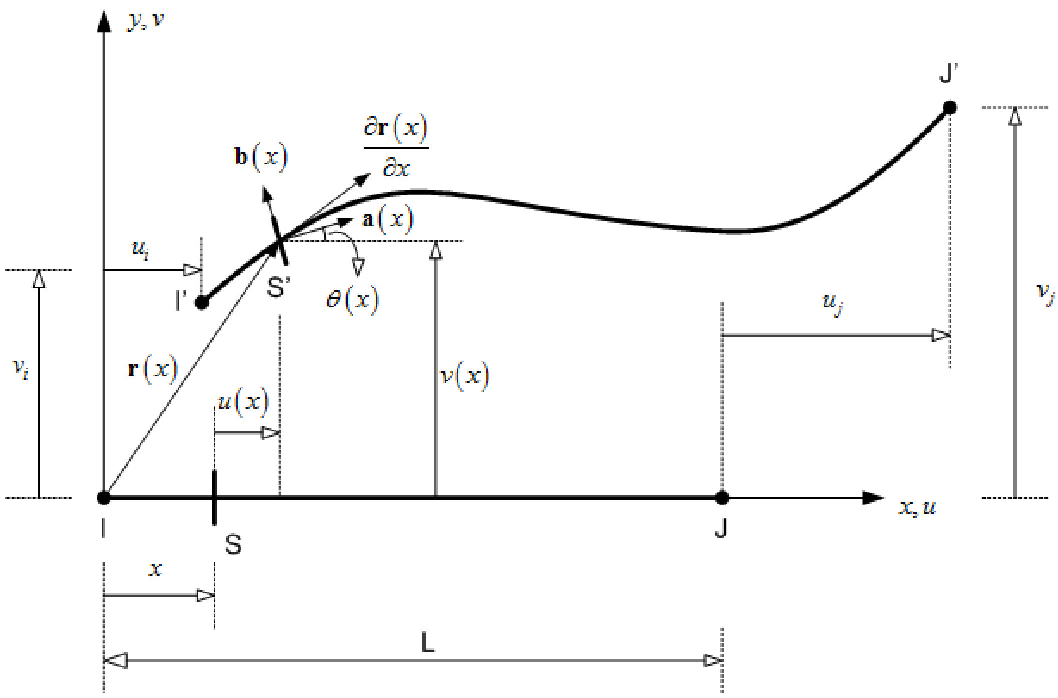

Figura B.1 – Configurações inicial e deformada da viga no plano.

O vetor tangente à linha central da viga I'-J' $\partial\mathbf{r}(x)/\partial x$ relativo à base ortogonal $(\mathbf{a},\mathbf{b})$, pode ser escrito em termos das medidas de deformação como

$$\frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x} = \left[1 + \varepsilon(x)\right]\mathbf{a} + \gamma(x)\mathbf{b}, \qquad \kappa(x) = \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \tag{B.2}$$

onde $\varepsilon(x), \gamma(x)$ e $\kappa(x)$ são as deformações linear, angular e curvatura, respectivamente, e

$$\mathbf{a}(\mathrm{x}) = \cos\theta(\mathrm{x})\mathbf{i} + \mathrm{sen}\theta(\mathrm{x})\mathbf{j}, \quad \mathbf{b}(\mathrm{x}) = -\mathrm{sen}\theta(\mathrm{x})\mathbf{i} + \cos\theta(\mathrm{x})\mathbf{j} \tag{B.3}$$

são vetores unitários ortogonal e paralelo à seção transversal deformada S'. Em geral, os vetores $\partial\mathbf{r}(x)/\partial x$ e **a** não estão alinhados (ver Fig. B.2). No entanto, o alinhamento é conservado se a deformação angular $\gamma(x)$ é desprezada, como ocorre em vigas descritas pelas hipóteses de Euler-Bernoulli.

Combinando as eqs.(B.1), (B.2) e (B.3) são obtidas as medidas de deformação, em termos dos deslocamentos da viga, como

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \left[1 + \frac{\partial u(x)}{\partial x}\right]\cos\theta(x) + \frac{\partial v(x)}{\partial x} sen\theta(x) - 1 \\ \gamma(x) &= -\left[1 + \frac{\partial u(x)}{\partial x}\right] sen\theta(x) + \frac{\partial v(x)}{\partial x}\cos\theta(x) \\ \kappa(x) &= \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \end{aligned} \tag{B.4}$$

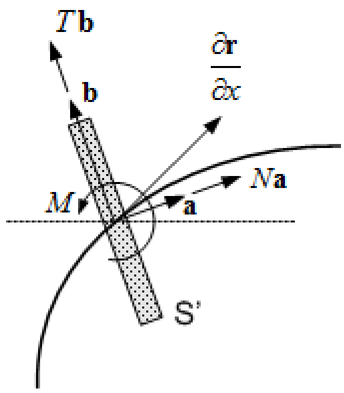

Figura B.2 – Forças internas e momento fletor sobre a seção transversal da viga.

De acordo com a Fig. B.2, N e T são, respectivamente, as componentes normal e transversal da força interna **F** atuante sobre uma seção genérica S', e M é o momento fletor. Na forma vetorial, estes são expressos como

$$\mathbf{F} = N\mathbf{a} + T\mathbf{b}, \qquad \mathbf{M} = M\mathbf{a} \times \mathbf{b} \tag{B.5}$$

onde “x” denota a operação do produto vetorial. Impondo as condições de equilíbrio sobre as tensões resultantes e assumindo uma relação constitutiva linear de um material homogêneo, pode-se escrever

$$\begin{gathered} N = \left(\int_A E \, dA \right) \varepsilon = EA\varepsilon, \quad T = \left(\int_A G \, dA \right) \gamma = GA\gamma, \\ M = \left(\int_A E y^2 \, dA \right) \kappa = EI_z \kappa \end{gathered} \tag{B.6}$$

onde EA, GA e EI_z são as rigidezes resultantes da seção transversal da viga axial, ao cisalhamento e à flexão, respectivamente. Para materiais com gradação funcional como mostrado nos exemplos seguintes, a gradação do material é incorporada na formulação na avaliação das propriedades da seção transversal. A energia de deformação do elemento U é dada como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EA\varepsilon^2 + GA\gamma^2 + EI\kappa^2 \right) dx \tag{B.7}$$

onde $\varepsilon(x), \gamma(x)$ e $\kappa(x)$ foram definidos na eq.(B.4). Para evitar o problema de travamento (*locking*), a integral na eq.(B.7) é numericamente avaliada usando um ponto de quadratura de Gaussiano no ponto médio do elemento (Pacoste e Ericksson [61]). Também, o campo de deslocamentos $u(x)$, $v(x)$ e $\theta(x)$ são linearmente interpolados ao longo do comprimento relativo aos graus de liberdade nodais $\mathbf{u}_e^T = [u_I, v_I, \theta_I; u_J, v_J, \theta_J]$. Uma vez que as funções de interpolação e as estratégias de integração são definidas, pode-se usar

$$\begin{gathered} \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{(u_J - u_I)}{L}, \quad \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{(v_J - v_I)}{L} \\ \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = \frac{(\theta_J - \theta_I)}{L}, \quad \theta(x) = \theta_I \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \theta_J \left(\frac{x}{L} \right) \end{gathered} \tag{B.8}$$

para avaliar a eq.(B.7). As componentes do vetor de forças internas elementar $\mathbf{f}_e^T = [N_I, T_I, M_I; N_J, T_J, M_J]$ e a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_e$ são obtidas de diferenciações sucessivas de U relativo ao vetor de componentes $\mathbf{u}_e$ (Pacoste e Ericksson [61]), na forma

$$f_{e_i} = \frac{\partial U}{\partial u_{e_i}}, \qquad K_{e_{ij}} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_{e_i} \partial u_{e_j}} \qquad i, j = 1 \ldots 6 \tag{B.9}$$