

## 5 Testes Numéricos

Neste capítulo são apresentadas algumas análises numéricas reproduzindo situações práticas do comportamento dinâmico de linhas marítimas e os resultados discutidos, enfatizando-se as diferenças de comportamento estrutural dos modelos de viga com MGF e com material homogêneo. Uma extensão do programa de elementos finitos ANFLEX para aplicações em linhas marítimas de MGF, cuja implementação numérica está apresentada no capítulo 4, é usado na obtenção dos resultados numéricos que são comparados com outros previamente publicados na literatura. Os testes numéricos neste capítulo são classificados em estáticos e dinâmicos; nos primeiros, resultados com modelos utilizando a formulação Lagrangeana Total (Pacoste e Eriksson [61]), são utilizados para comparação assim como aqueles disponíveis na literatura. Nestes casos a solução numérica da equação de equilíbrio é obtida empregando-se a técnica iterativa de Newton-Raphson e, quando necessário o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados [45]. Alguns dos exemplos estáticos apresentados estão também publicados em [4], relativos ao presente trabalho. Nas análises dinâmicas foram considerados modelos com a formulação co-rotacionada. Neste caso a integração temporal das equações de equilíbrio é obtida utilizando-se o algoritmo HHT, juntamente com a técnica iterativa de Newton-Raphson para a solução das equações não-lineares resultantes. Face à ausência de soluções disponíveis na literatura, em vários dos exemplos considerados o desempenho do elemento de pórtico para *risers* de MGF, proposto neste trabalho, foi avaliado simplesmente comparando-se os resultados numéricos obtidos para MGF com os fornecidos por outros autores para vigas com material homogêneo. Esta comparação resulta do fato da formulação para o elemento de pórtico para *risers* de material homogêneo ser caso particular da formulação para MGF, em que os parâmetros de não homogeneidade referentes ao módulo de elasticidade e à massa específica do material (ver capítulo 4) serem nulos.

## 5.1. Análise Estática

### 5.1.1. Análises Estáticas usando à Formulação Lagrangeana Total

Nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos utilizando-se a Formulação Lagrangeana Total (descrita no Apêndice B e nos trabalhos de Pacoste e Eriksson [61] e de Lages et. al. [45]) na modelagem de estruturas em grandes deslocamentos com seção transversal de MGF. O objetivo aqui é demonstrar a aplicabilidade do modelo não linear de viga com seção reta equivalente na representação numérica de estruturas esbeltas não tubulares.

#### 5.1.1.1. Viga em balanço de seção reta composta submetida à carga transversal na extremidade em pequenos deslocamentos

Neste primeiro exemplo proposto por Chakraborty et. al. [21], uma viga em balanço está submetida à carga transversal  $P$  aplicada na extremidade livre, conforme mostrado na Fig. 5.1. A viga possui uma seção transversal composta, com dois materiais – Aço e Alumina ( $Al_2O_3$ ) – onde uma transição suave entre os materiais é garantida por uma fina camada de MGF. Os valores numéricos, incluindo dimensões e propriedades dos materiais usados na análise, foram extraídos de [21] e estão apresentados na figura 5.1. O módulo de elasticidade do MGF varia na espessura da seção reta segundo a seguinte relação exponencial

$$E(z^*) = E_S \exp \left[ \left( \frac{z^*}{a_2} - \frac{1}{2} \right) \ln \left( \frac{E_S}{E_a} \right) \right] = A \cdot B^{(z^*/a_2)}, \quad (5.1)$$

onde  $z^* \in [-a_2/2, a_2/2]$ ,  $A = E_S (E_S/E_a)^{-1/2}$  e  $B = E_S/E_a$ .

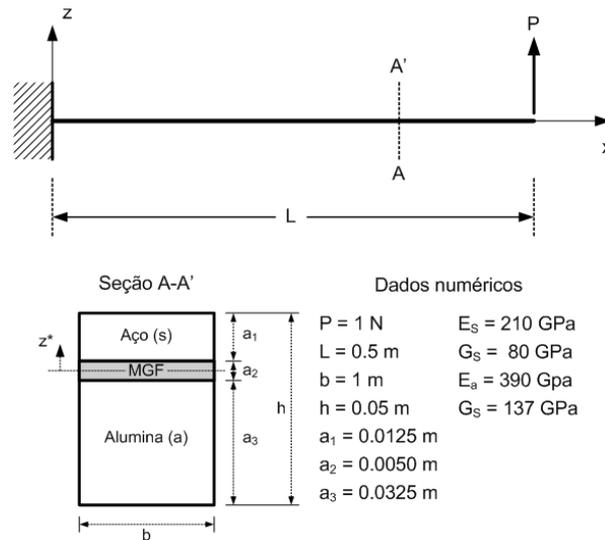


Figura 5.1 – Viga em balanço de seção transversal composta.

A coordenada  $z_1$  da linha neutra da viga, medida a partir do centro da camada de MGF, é obtida impondo-se a condição de equilíbrio

$$\begin{aligned}
 N = 0 &\quad \Rightarrow \quad \int_A \sigma_x dA = \int_A E(z) kz dA = 0 \\
 &\quad \Rightarrow \quad \int_z E(z) z dz = 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

De acordo a Fig. 5.2 e considerando  $z^* = z - z_1$  na eq.(5.1), a eq.(5.2) resulta na forma

$$\int_{-(a_3+(a_2/2)-z_1)}^{(z_1-(a_2/2))} E_a z dz + \int_{(z_1-(a_2/2))}^{(z_1+(a_2/2))} AB^{(z-z_1)/a_2} z dz + \int_{(z_1+(a_2/2))}^{(z_1+(a_2/2)+a_1)} E_S z dz = 0 \tag{5.3}$$

Resolvendo a equação acima obtém-se  $z_1 = 0.0128 \text{ m}$ .

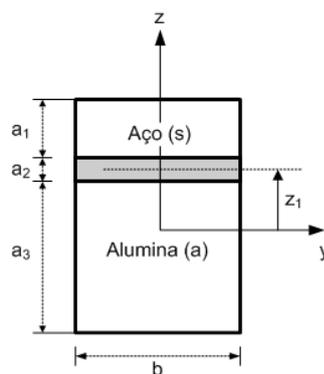


Figura 5.2 – Dimensões e sistema coordenado na seção transversal da viga composta.

Com os valores numéricos da Fig. 5.1, as rigezas estruturais equivalentes com a lei de graduação do material são obtidas da integração ao longo da área da

seção transversal da viga, mostrada na Fig. 5.2. Ressalte-se que, a distribuição exponencial usada para  $E(z^*)$  na eq.(5.1) é também empregada para  $G(z^*)$ , com  $z^* = z - z_1$ . Sendo assim, as rigezas equivalentes são:

a) Rigidez Axial ( $\overline{EA}$ )

$$\begin{aligned}\overline{EA} &= \int_A E dA = E_S A_S + \int_{(z_1 - (a_2/2))}^{(z_1 + (a_2/2))} AB^{(z-z_1)/a_2} b dz + E_a A_a \\ \overline{EA} &= 16.754 \times 10^9 \text{ N}\end{aligned}\quad (5.4)$$

onde  $A_S = ba_1$  e  $A_a = ba_3$

b) Rigidez ao cisalhamento ( $\overline{GA}$ )

$$\begin{aligned}\overline{GA} &= \int_A G dA = G_S A_S + \int_{(z_1 - (a_2/2))}^{(z_1 + (a_2/2))} A' B^{(z-z_1)/a_2} b dz + G_a A_a \\ \overline{GA} &= 5.982 \times 10^9 \text{ N}\end{aligned}\quad (5.5)$$

onde  $A' = G_S (G_S / G_a)^{-1/2}$  e  $B' = G_S / G_a$

c) Rigidez à flexão ( $\overline{EI}_y$ )

$$\begin{aligned}\overline{EI}_y &= \int_A E z^2 dA = E_S I_S + \int_{(z_1 - (a_2/2))}^{(z_1 + (a_2/2))} AB^{(z-z_1)/a_2} z^2 b dz + E_a I_a \\ \overline{EI}_y &= 3.044 \times 10^6 \text{ N.m}^2\end{aligned}\quad (5.6)$$

onde  $I_S = ba_1^3/12 + A_S d_S^2$  e  $I_a = ba_3^3/12 + A_a d_a^2$ , com  $d_S = z_1 + (a_1 + a_2)/2$  e  $d_a = (a_2 + a_3)/2 - z_1$ , respectivamente.

Dos resultados nas eqs.(5.1)-(5.6), o procedimento usual de elementos finitos é empregado para obter-se os deslocamentos nodais usando-se a eq.(B.9) do (apêndice B). Estes resultados são usados para obter-se as medidas de deformação da viga definidas nas eqs.(B.4) - (apêndice B), e as correspondentes componentes de tensão. As soluções analíticas para as componentes de tensão axial e de cisalhamento, na seção engastada da viga em balanço com carga vertical (Fig.5.1), são obtidas de acordo com as expressões mostradas na Tabela 5.1. A Fig. 5.3 ilustra a distribuição destas tensões analíticas e sua comparação com os valores numéricos obtidos usando um modelo de viga de um elemento, uma muito boa concordância nos resultados é observada. A linha tracejada na Fig.5.3 mostra os resultados obtidos para a viga de seção transversal feita inteiramente de MGF. Da

Fig. 5.3 é também observado que as tensões de cisalhamento nos contornos superior e inferior da viga não são nulas, isto devido a que foi assumida uma tensão média de cisalhamento ao longo da seção transversal como mostrado nas expressões da Tabela 5.1. Observe-se que para o carregamento aplicado, geometria e propriedades dos materiais considerados neste exemplo, a resposta da viga está ainda no regime linear de pequenos deslocamentos. No entanto, foi utilizada nesta análise a formulação não-linear geométrica. Também deve ser ressaltado neste exemplo que os resultados numéricos foram obtidos utilizando-se o modelo com um único elemento em apenas um passo de carregamento, sem qualquer iteração numérica e os resultados numéricos para as tensões estão em muito boa concordância com os obtidos por Chakraborty et al. [21], conforme é mostrado na Figura 5.3.

Tabela 5.1 – Resultados analíticos para as tensões na seção engastada da viga em balanço.

Componentes de tensão	Expressão	Limites
$\sigma_{xx}$ (Alumina)	$-E_a \left[ PLz / \overline{EI}_y \right]$	$-0.0222 < z < 0.0103$
$\sigma_{xx}$ (MGF)	$-E_{MGF}(z^*) \left[ PLz / \overline{EI}_y \right]$	$0.0103 < z < 0.0153$
$\sigma_{xx}$ (Aço)	$-E_s \left[ PLz / \overline{EI}_y \right]$	$0.0153 < z < 0.0278$
$\sigma_{xz}$ (Alumina)	$G_a \left[ P / \overline{GA} \right]$	$-0.0222 < z < 0.0103$
$\sigma_{xz}$ (MGF)	$G_{MGF}(z^*) \left[ P / \overline{GA} \right]$	$0.0103 < z < 0.0153$
$\sigma_{xz}$ (Aço)	$G_s \left[ P / \overline{GA} \right]$	$0.0153 < z < 0.0278$

De acordo com as eqs.(5.1)-(5.3)  $z^* = z - z_1$ , onde  $z_1 = 0.0128$  m

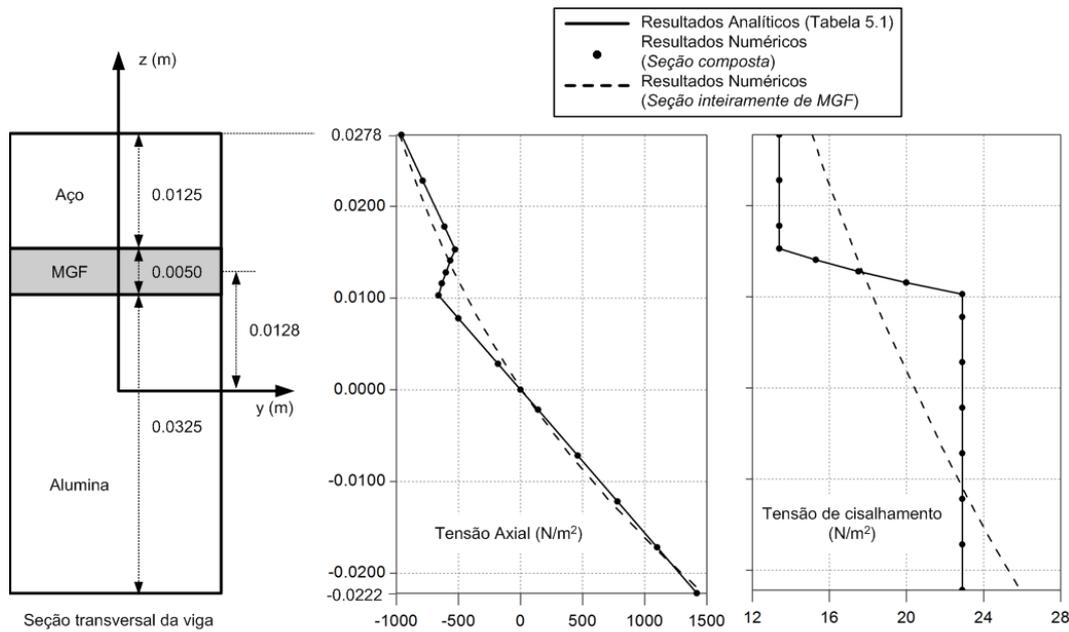


Figura 5.3 – Tensões axiais e cisalhantes ao longo da espessura na seção engastada da viga em balanço.

#### 5.1.1.2.

#### Viga em balanço submetida à carga axial excêntrica em pequenos deslocamentos

Neste exemplo, também proposto por Chakraborty et. al. [21], a viga considerada tem propriedades geométricas da seção reta e do material idênticas à considerada na seção anterior, agora submetida a uma carga axial aplicada no ponto médio da camada de MGF (mostrada na Fig. 5.4). Segundo a posição da linha neutra obtida na eq.(5.3) esta representa uma excentricidade de  $e = 0.0128\text{m}$ . A tabela 5.2 ilustra a expressão analítica para as tensões axiais na viga. Não há tensões cisalhantes.

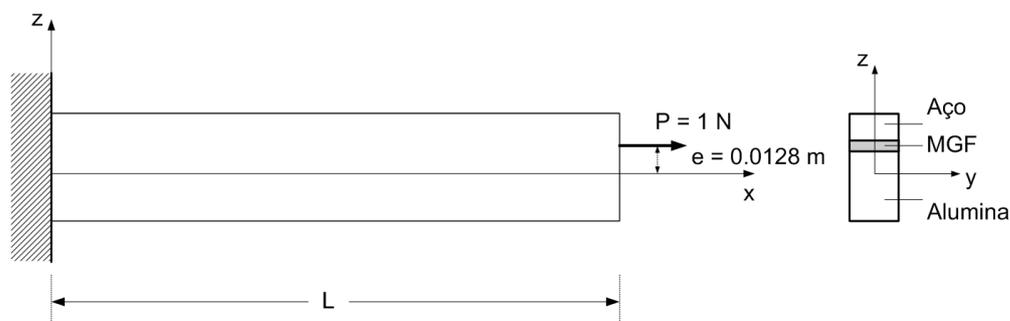


Figura 5.4 – Viga engastada com carga axial excêntrica.

Tabela 5.2 – Resultados analíticos para as tensões axiais da viga em balanço com carga excêntrica.

Componentes de tensão	Expressão	Limites
$\sigma_{xx}$ (Alumina)	$E_a \left[ P/\overline{EA} + Pez/\overline{EI}_y \right]$	$-0.0222 < z < 0.0103$
$\sigma_{xx}$ (MGF)	$E_{MGF}(z^*) \left[ P/\overline{EA} + Pez/\overline{EI}_y \right]$	$0.0103 < z < 0.0153$
$\sigma_{xx}$ (Aço)	$E_s \left[ P/\overline{EA} + Pez/\overline{EI}_y \right]$	$0.0153 < z < 0.0278$

De acordo com as eqs.(5.1)-(5.3)  $z^* = z - z_1$ , onde  $z_1 = 0.0128$  m

A Fig. 5.5 mostra a distribuição das tensões axiais analíticas ao longo da espessura da viga comparadas com os resultados numéricos correspondentes usando um modelo de viga de um elemento. Uma muito boa concordância nos resultados é observada. Destes pode-se também observar que a pequena camada de MGF entre as fases de aço e de alumina suaviza o salto nas tensões de  $20 \text{ N/m}^2$  que ocorre entre as camadas. Esta figura também apresenta a distribuição da tensão axial considerando-se a seção reta inteiramente de MGF, caracterizada por uma curva suave, quase reta, ao longo da espessura da seção transversal.

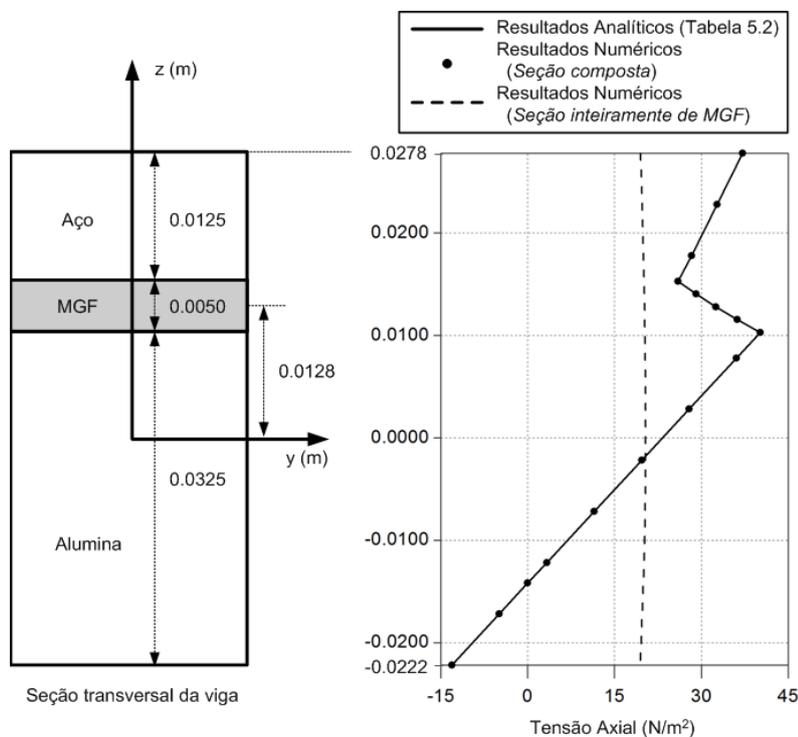


Figura 5.5 – Tensões axiais ao longo da espessura para a viga em balanço com carga axial excêntrica.

## 5.1.2. Análises Estáticas Usando a Formulação Co-Rotacionada

Nas análises consideradas nesta seção os modelos de elementos finitos considerados possuem seção transversal tubular conforme formulação implementada no programa ANFLEX.

### 5.1.2.1. Pórtico de Lee

O presente exemplo tem por objetivo ilustrar o uso das Formulações Lagrangeana Total [4] (ver apêndice B) e Lagrangeana Co-rotacionada (implementada no presente trabalho e descrita nos capítulos 2 e 3), na análise não-linear geométrica de estruturas tipo pórtico de MGF usando rigezas equivalentes como parâmetros de entrada da análise para representar o comportamento do material. O pórtico plano a ser analisado é formado pela união de duas vigas e submetido a uma carga vertical  $P$ , cada membro estrutural tem comprimento de 1.2m e seção tubular, os parâmetros da geometria e do material são mostrados na Fig. 5.6. O pórtico é feito de MGF do tipo TiC-Ni<sub>3</sub>Al, com módulo de elasticidade variando na forma de lei de potência, cujas fases de TiC e Ni<sub>3</sub>Al estão nos raios interno e externo, respectivamente. Este exemplo (comumente apresentado para material homogêneo) foi originalmente apresentado por Lee et al. [46], e utilizado por diversos pesquisadores, tais como Lages et al. [45], Pacoste e Eriksson [61] e Souza [80], é sem dúvida, uma das principais *benchmarks* ao se tratar de validação de formulações não-lineares com grandes deslocamentos e rotações devido a que exhibe uma trajetória de equilíbrio complexa pois apresenta os fenômenos de *snap-back* (salto dinâmico sob controle de deslocamento) e *snap-through*. (salto dinâmico sob controle de carga).

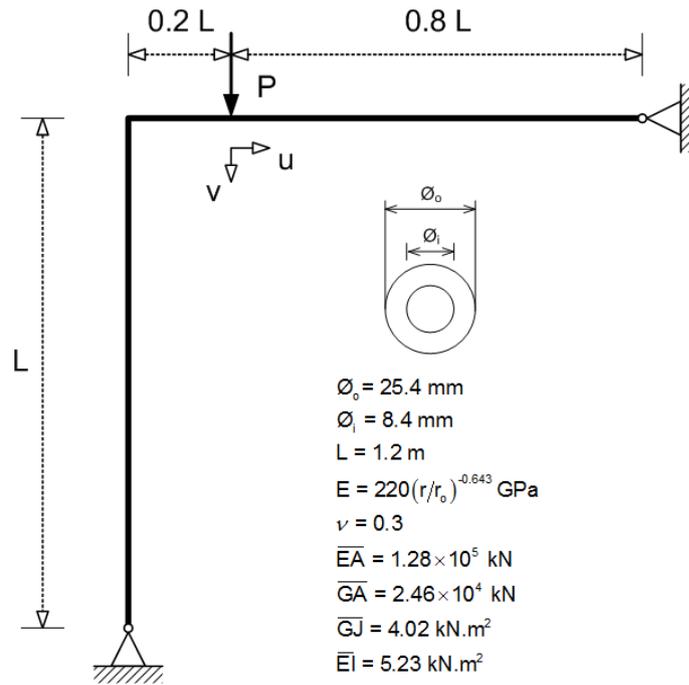


Figura 5.6 – Dados de entrada para o Pórtico de Lee.

O pórtico foi modelado utilizando-se 20 elementos iguais de viga, num total de 21 nós. Devido à presença do fenômeno de *snap-back*, conforme está mostrado na relação força-deslocamento da Fig. 5.7 a solução numérica da equação de equilíbrio estático foi obtida empregando-se a Formulação Lagrangeana Total [4] juntamente com o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados [45]. Neste utilizou-se o procedimento incremental iterativo com 590 passos, obtendo-se um número máximo de três iterações por passo para uma tolerância do erro nos deslocamentos igual a  $10^{-3}$ . Na Fig. 5.7 estão apresentados os deslocamentos  $u$  e  $v$  nas direções horizontal e vertical, respectivamente, referentes ao ponto de aplicação do carregamento.

Na Fig. 5.8 são mostrados os resultados usando a Formulação Co-rotacionada juntamente com a técnica iterativa de Newton-Raphson, utilizou-se na análise 67 passos iguais de carregamento, obtendo-se um número máximo de 5 iterações por passo para uma tolerância de deslocamento igual a  $10^{-3}$ . Observa-se uma boa concordância com os resultados obtidos com a Formulação Lagrangeana Total [4]. No entanto, a trajetória de equilíbrio obtida foi interrompida no primeiro ponto limite, em função da impossibilidade de se ultrapassar este ponto utilizando-se o Método de Newton-Raphson.

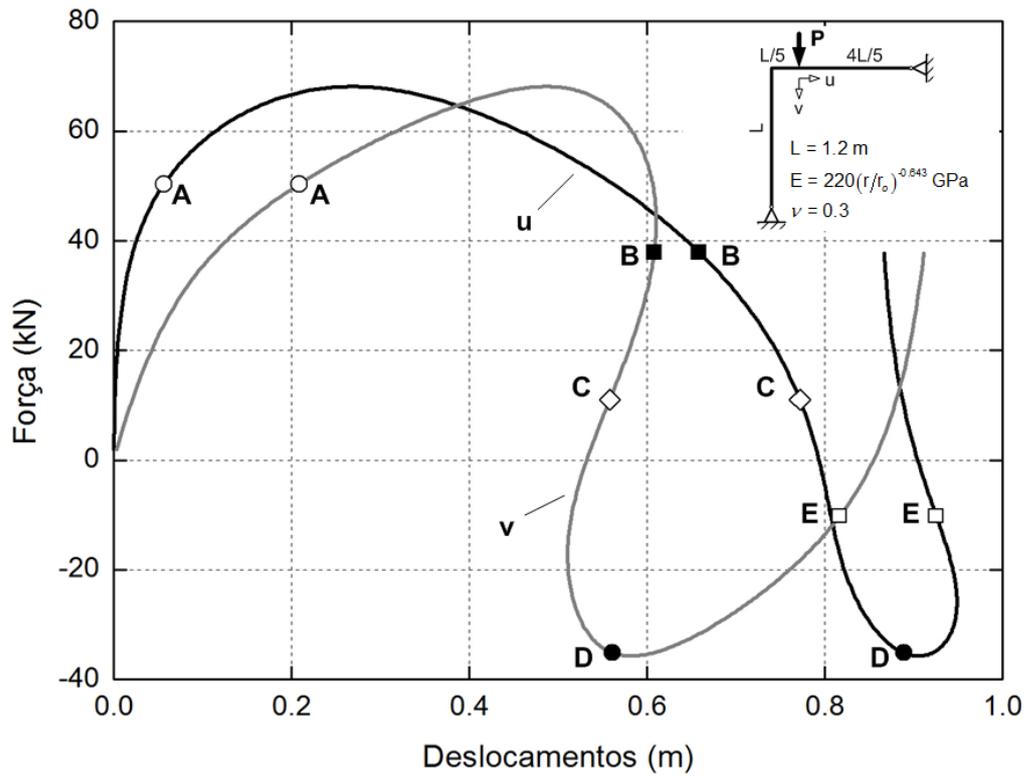


Figura 5.7 – Relações Força-Deslocamentos horizontal e vertical do ponto de aplicação da carga  $P$ , empregando a Formulação Lagrangeana Total com controle de carga.

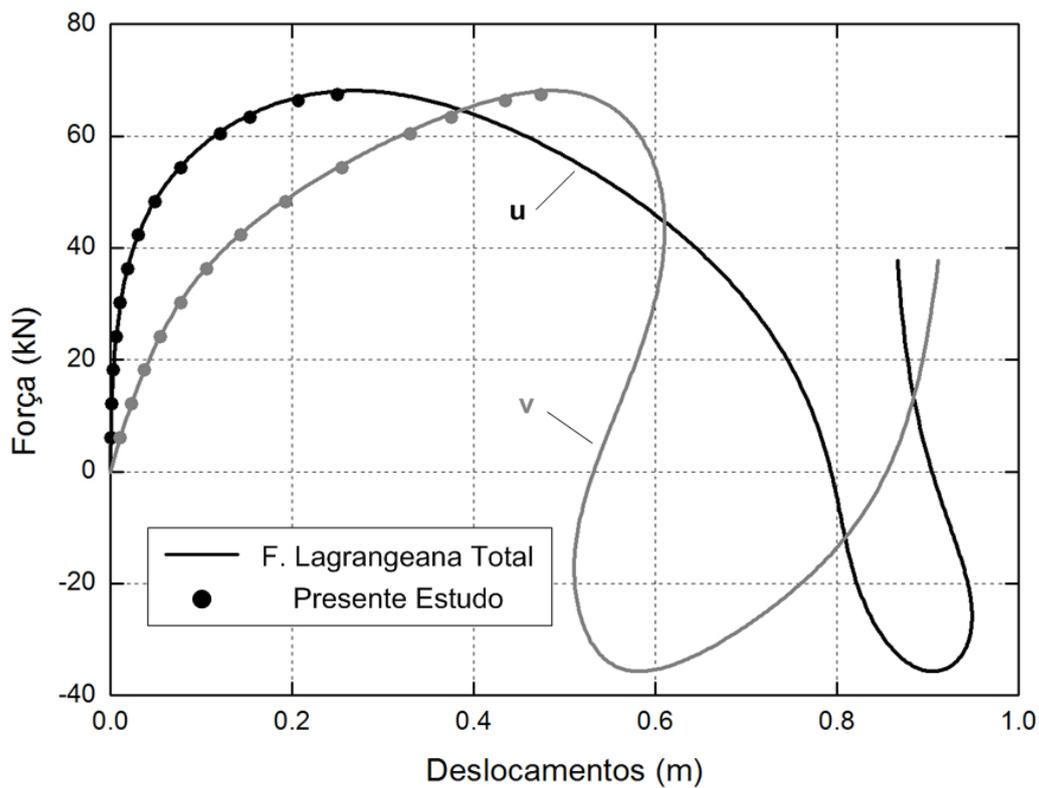


Figura 5.8 – Comparação dos resultados fornecidos pelas Formulações Lagrangeana Total e Co-rotacionada (presente estudo).

As letras maiúsculas indicadas na Fig. 5.7 correspondem às configurações de equilíbrio, conforme está mostrado na Fig. 5.9 para cada nível do carregamento. Observe-se que o fenômeno *snap-back* mostra-se representado na passagem das configurações deformadas C para D, em que faz um movimento contrário. As figuras (5.10) e (5.11) apresentam as configurações deformadas de equilíbrio B, C, D e E. Nestas, percebe-se que as reações nos apoios numericamente obtidas equilibram exatamente o carregamento aplicado P.

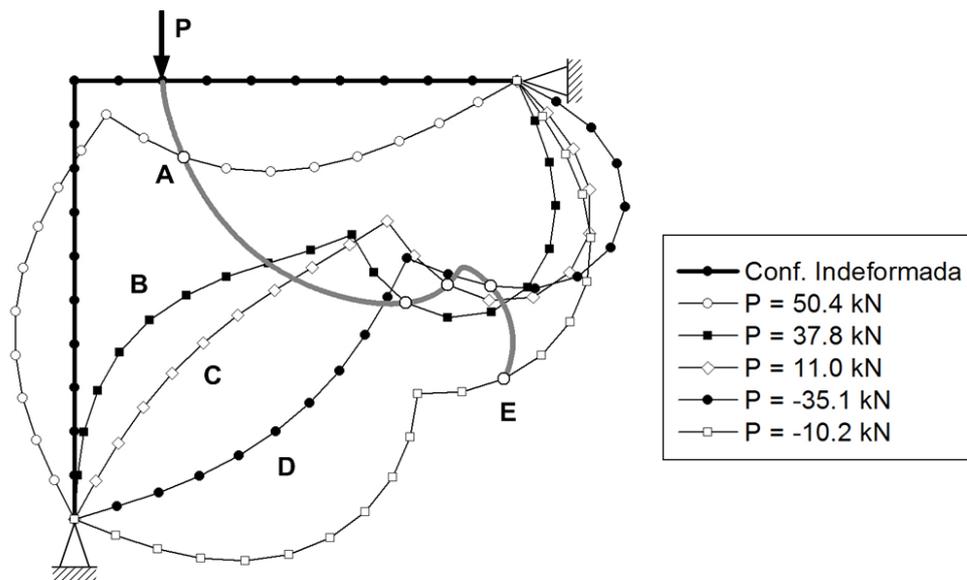


Figura 5.9 – Configurações deformadas do Pórtico de Lee.

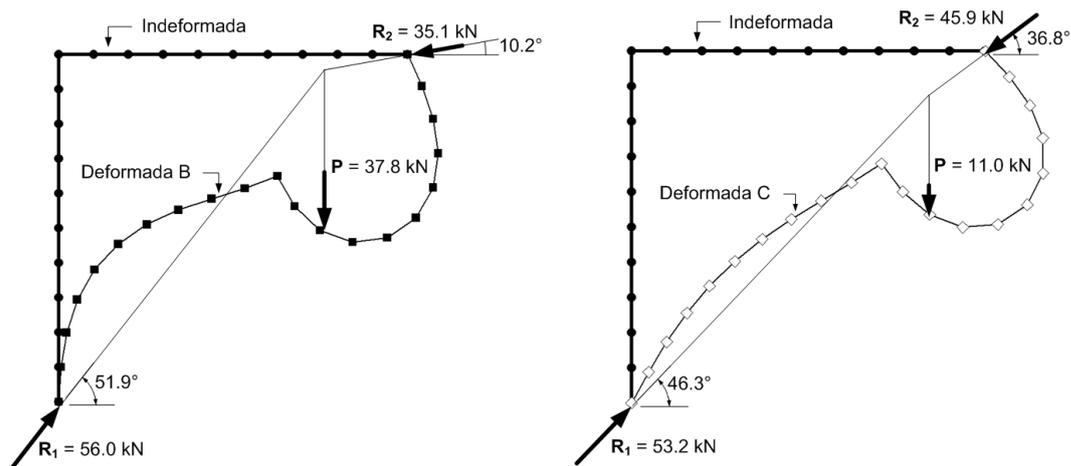


Figura 5.10 – Equilíbrio de forças para as configurações deformadas B e C.

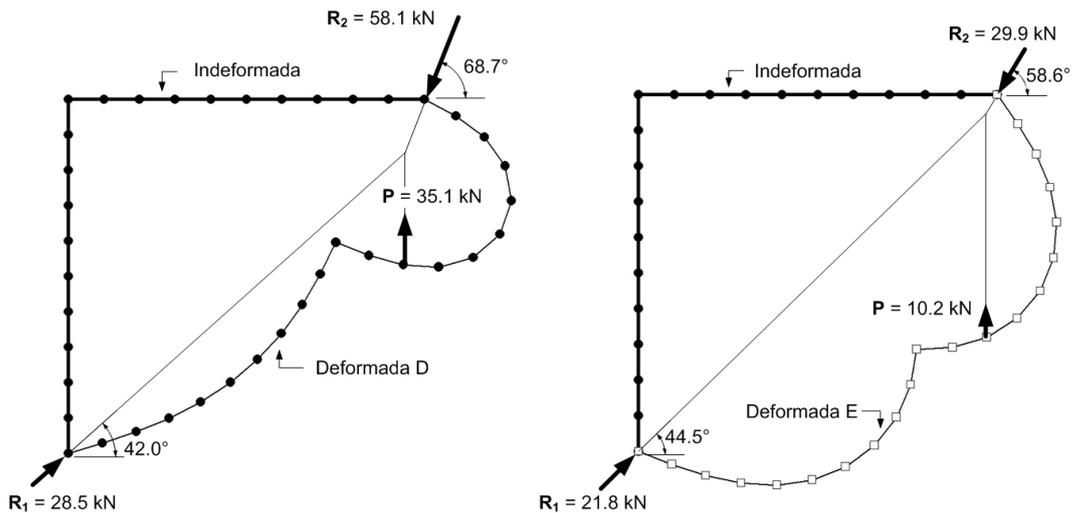


Figura 5.11 – Equilíbrio de forças para as configurações deformadas D e E.

A Fig. 5.12 mostra uma vista em corte da seção transversal no ponto médio do elemento 13 referente à configuração deformada ‘A’ ( $P = 50.4$  kN) na qual são avaliadas as tensões. Os valores numéricos para as tensões axiais e cisalhantes estão representados nas Figuras (5.13) e (5.14) considerando-se dois planos diferentes sobre a seção transversal. Observe-se que a distribuição de tensões é caracterizada por uma curva suave, similar à obtida nas análises anteriores de pequenos deslocamentos.

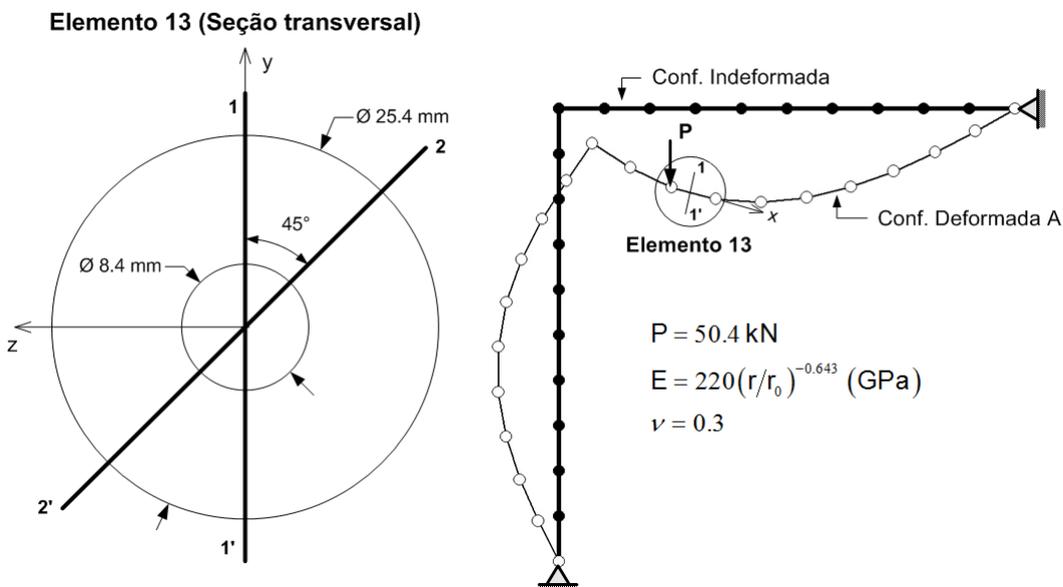


Figura 5.12 – Configuração deformada A e elemento de calculo das tensões.

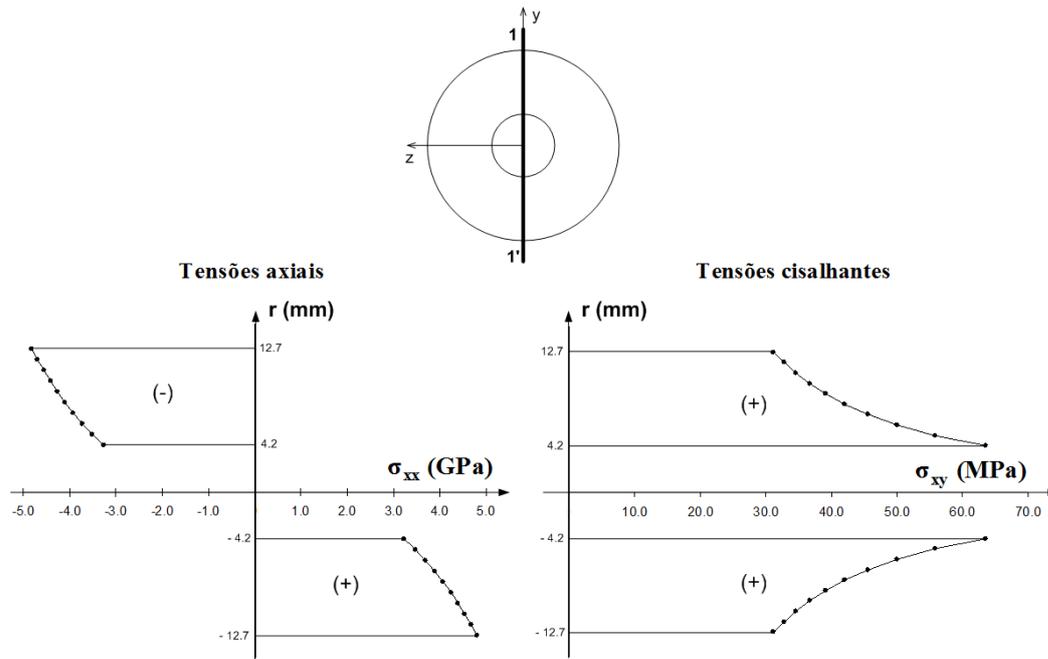


Figura 5.13 – Distribuição de tensões agindo no plano 1 – 1' sobre a seção transversal.

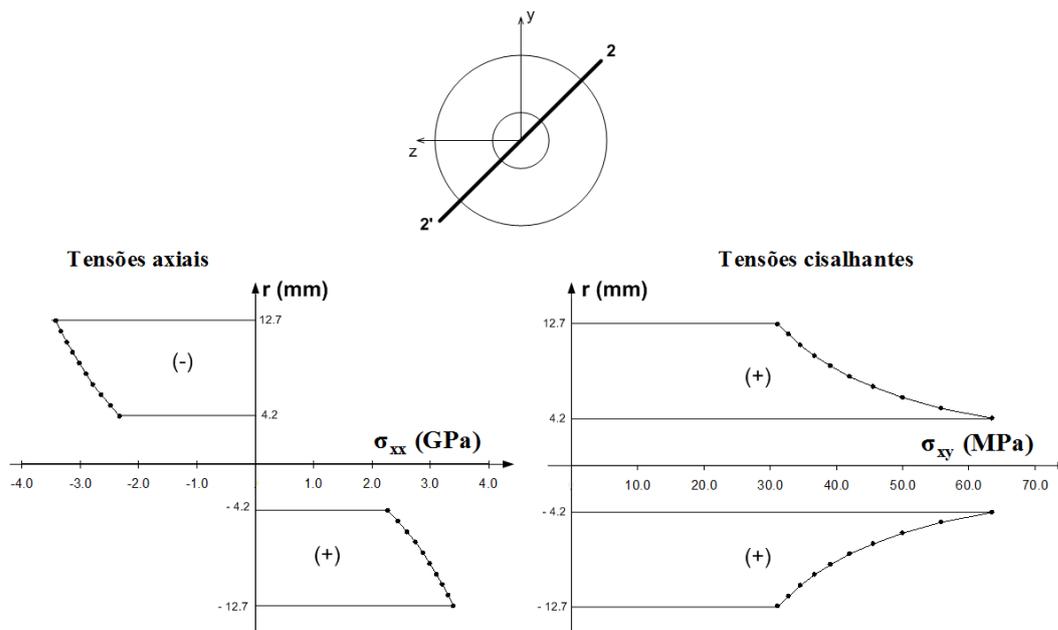


Figura 5.14 – Distribuição de tensões agindo no plano 2 – 2' sobre a seção transversal.

### 5.1.2.2.

#### Viga em balanço de seção tubular submetida a momento fletor constante

Neste exemplo, uma viga de MGF de seção transversal tubular, inicialmente reta e engastada na extremidade à esquerda está submetida a um carregamento de momento aplicado na extremidade livre, em uma análise não-linear geométrica. Os parâmetros geométricos e do material, estão apresentados na Fig. 5.15. Nesta análise numérica utilizou-se a distribuição do módulo de elasticidade, ao longo da espessura da parede do tubo, conforme está mostrado na Fig. 2.10, com as fases de TiC e Ni<sub>3</sub>Al nos raios externo e interno, respectivamente.

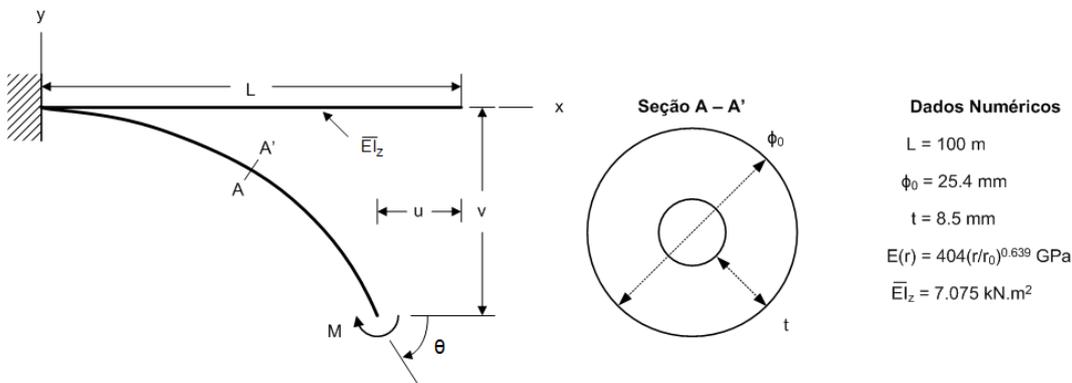


Figura 5.15 – Viga em balanço considerada na análise.

Por estar submetida a momento fletor constante ao longo do comprimento, a solução da curva elástica da viga resulta em um arco de círculo de curvatura  $\kappa$  que relaciona-se com o momento aplicado  $M$  na forma

$$\kappa = \frac{M}{EI_z}, \quad (5.7)$$

fornecendo o seguinte valor analítico do ângulo de rotação da seção livre

$$\theta = \kappa L = \frac{ML}{EI_z} \quad \text{ou} \quad \theta = 2\pi \left( \frac{M}{M^*} \right) \quad (5.8)$$

onde  $M^*$  é o momento fletor requerido para  $\theta = 2\pi \text{ rad}$ . De considerações geométricas, os deslocamentos da extremidade livre resultam em

$$u = L - R \sin\theta \quad \text{e} \quad v = R - R \cos\theta \quad (5.9)$$

onde  $R = 1/\kappa = L/\theta$ . Assim, os deslocamentos na eq.(5.9) podem ser escritos na forma normalizada como

$$\frac{u}{L} = \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) \quad \text{e} \quad \frac{v}{L} = \frac{1 - \cos\theta}{\theta} \quad (5.10)$$

Na análise numérica considerada, foram utilizados 10 elementos igualmente espaçados para representar a geometria da viga. As configurações estáticas da viga para diferentes valores do momento aplicado na extremidade livre estão mostradas na Fig. 5.16, numa forma qualitativa.

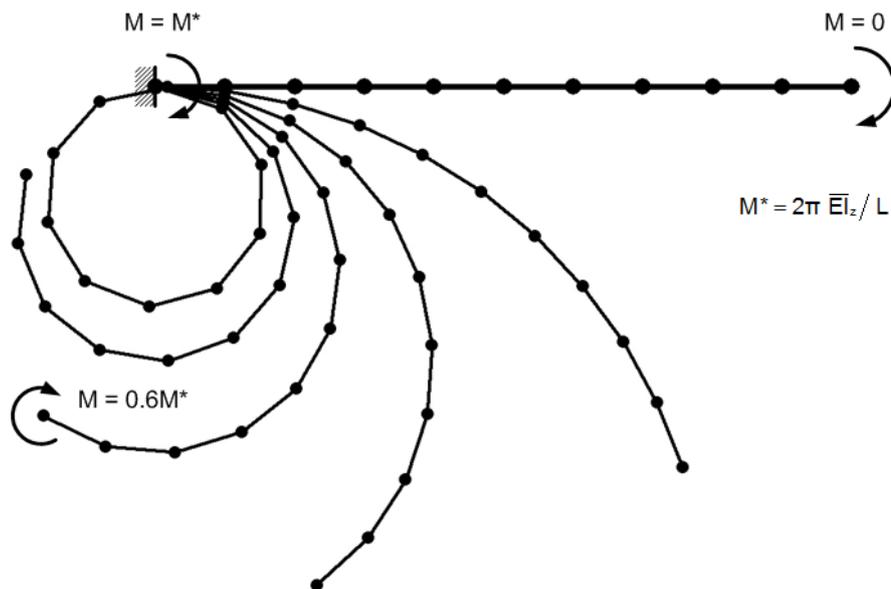


Figura 5.16 – Configurações de equilíbrio estáticas para distintos carregamentos de flexão.

A Fig. 5.17 apresenta comparações de resultados numéricos obtidos para os deslocamentos e rotações na extremidade livre da viga com soluções analíticas expressas nas eqs.(5.8) e (5.10), para  $0 \leq M/M^* \leq 1$ . Estes resultados foram obtidos com 400 passos iguais de carregamento, usando-se o processo incremental iterativo de Newton-Raphson e admitindo uma tolerância em deslocamentos igual a  $10^{-3}$ . Em todos os passos de carregamento, a convergência da solução numérica foi alcançada com, no máximo, 4 iterações de equilíbrio. Observa-se uma muito boa concordância das soluções obtidas para toda a faixa de carregamento considerada.

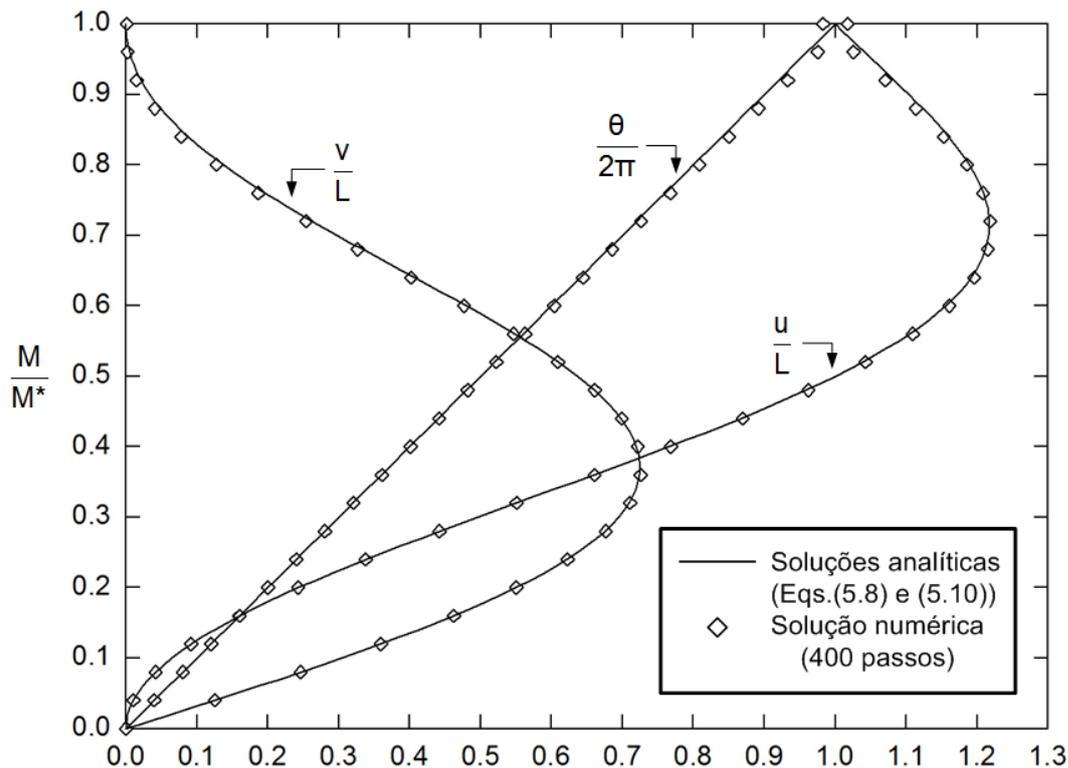


Figura 5.17 – Deslocamentos e rotações na extremidade da viga em balanço, em função do momento aplicado – Resultados Parametrizados.

Finalmente, resultados para a distribuição da tensão normal ao longo da seção transversal tubular da viga considerando-se  $M = 0.6M^*$  (ver Fig. 5.16) são mostrados. Estas tensões foram avaliadas analiticamente usando a expressão

$$\sigma_{xx} = E(r) \varepsilon_{xx} = E(r) \left( \frac{My}{EI_z} \right) = E(r) 2\pi \left( \frac{M}{M^*} \right) \left( \frac{y}{L} \right) \quad (5.11)$$

e as distribuições fornecidas pela análise numérica e analiticamente pela eq.(5.11) estão mostradas nas Figs.5.18 a) e b). Nestas dois diferentes planos de corte da seção transversal são considerados: um vertical e outro afastado  $45^\circ$  a partir desta posição, e uma boa concordância entre estas distribuições é observada. Também, estes resultados são comparados com as tensões normais na seção transversal para uma viga de material homogêneo e com a mesma rigidez equivalente que a de MGF. Para este carregamento em particular, os gráficos mostram uma redistribuição das tensões no MGF com um incremento de 15% no valor da máxima tensão normal e uma redução de 43% no valor mínimo desta, quando comparadas com a distribuição linear das tensões mostrada na viga de material homogêneo.

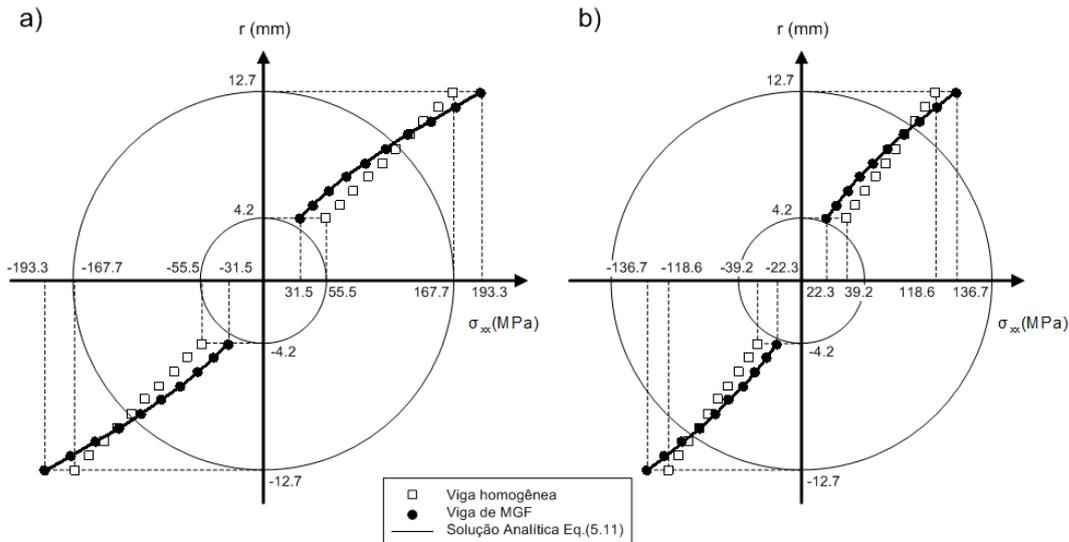


Figura 5.18 – Tensões normais em dois planos de corte na seção transversal: (a) vertical e (b) inclinado  $45^\circ$  ( $M = 0.6M^*$ ,  $E(r)=404(r/r_0)^{0.639}$  GPa).

As distribuições de tensões obtidas acima, as quais são dependentes do módulo de elasticidade ao longo da espessura da viga tubular, podem variar se a mesma análise com grandes deslocamentos é feita com uma viga de MGF de seção tubular com TiC no raio interno e  $Ni_3Al$  no raio externo. Neste caso  $E(r) = 220(r/r_0)^{-0.643}$ , com as distribuições das tensões resultantes mostradas nas Fig.5.19 a) e b). Em contraste com as soluções numéricas mostradas nas Fig.5.18a) e b), observe-se novas distribuições para as tensões, que comparadas com as soluções para vigas de material homogêneo resulta numa redução dos valores das tensões máximas e um aumento das mínimas.

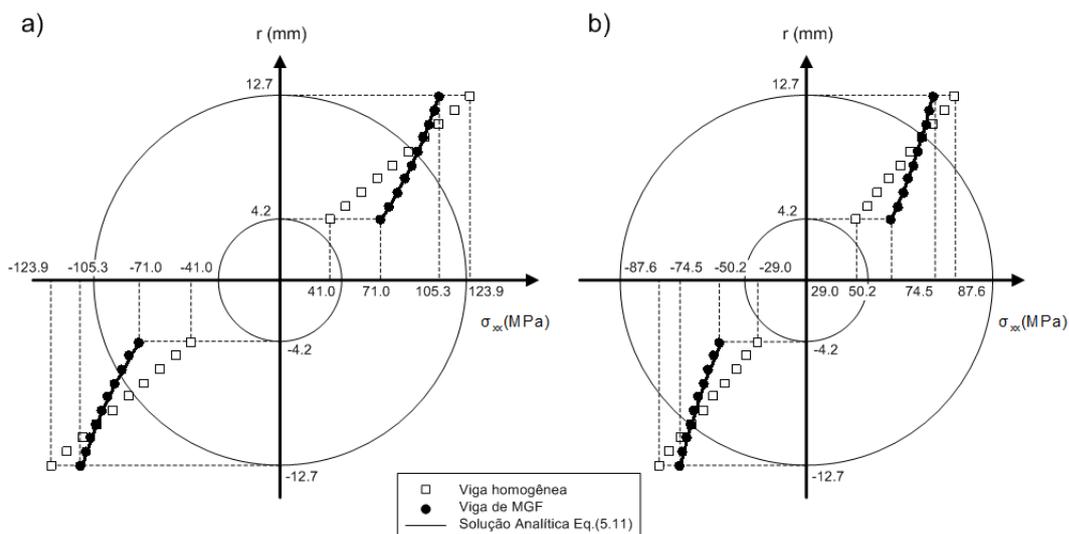


Figura 5.19 – Tensões normais em dois planos de corte na seção transversal: (a) vertical e (b) inclinado  $45^\circ$  ( $M = 0.6M^*$ ,  $E(r)=220(r/r_0)^{-0.643}$  GPa).

### 5.1.2.3.

#### Coluna composta submetida a uma carga axial excêntrica

Neste exemplo proposto por Nunes et al. [60], a coluna composta de seção tubular da Fig. 5.20 e carga axial excêntrica é analisada. O objetivo desta análise numérica é verificar a correlação dos deslocamentos axial- $v$ , transversal- $u$  e da rotação- $\theta$  na extremidade da coluna composta em relação à carga aplicada  $P$  durante todo o intervalo da análise correspondente a grandes deslocamentos. Para a análise a coluna composta foi dividida em 22 elementos, sendo dois deles associados às ligações rígidas e 10 elementos igualmente espaçados ao longo de cada coluna. No modelo das ligações rígidas utilizou-se o modelo de viga com módulo de elasticidade três ordens de magnitude maior do que o usado nas colunas. As soluções numéricas foram obtidas com 400 passos e uma tolerância nos deslocamentos de  $10^{-5}$ , com o processo iterativo de Newton-Raphson. Em todos os passos de carregamento, a convergência numérica foi alcançada após um máximo de 5 iterações de equilíbrio.

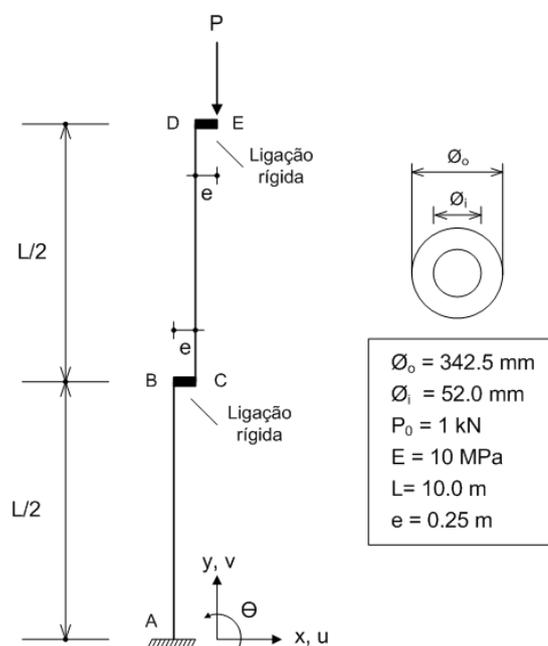


Figura 5.20 – Coluna composta com carga axial excêntrica.

As soluções numéricas para o modelo de pórtico usado no presente estudo foram comparadas com aquelas fornecidas pela análise numérica de Nunes et al. [60]. É importante ressaltar que, no trabalho de Nunes [60] a coluna composta é representada por elementos de vigas de 2 nós, com base nas hipóteses do modelo

para vigas de Timoshenko, também um sistema de eixos locais “semi-fixos” é usado como referencial Lagrangeano atualizado e na solução da equação de equilíbrio é usada a técnica de Controle por Deslocamentos Generalizados [45]. Na Fig. 5.21, observa-se uma muito boa concordância entre as soluções obtidas, para a faixa de carregamentos considerada (note-se que  $P = \lambda P_0$ ), especialmente no deslocamento axial- $v$  e na rotação- $\theta$ . Para a faixa de carregamento considerada ( $0 < \lambda < 1$ ) pode-se observar, no entanto, um erro máximo de 8% para o deslocamento transversal- $u$ . A Fig. 5.22 apresenta as configurações de equilíbrio da coluna composta para diversos valores deste carregamento.

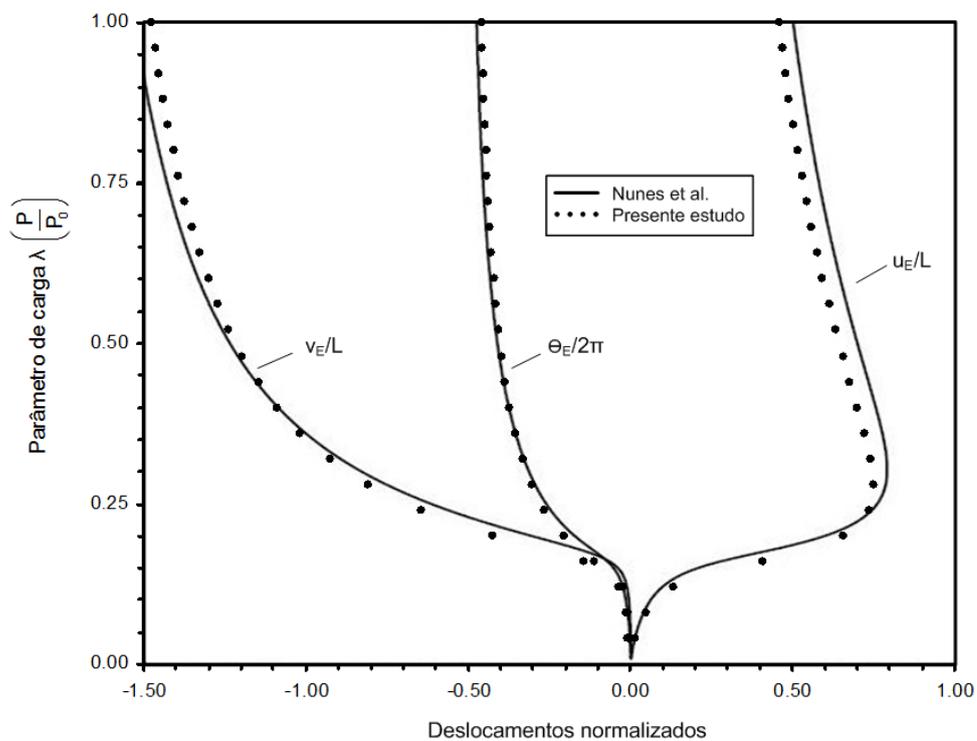


Figura 5.21 – Deslocamentos normalizados do ponto de aplicação da carga.

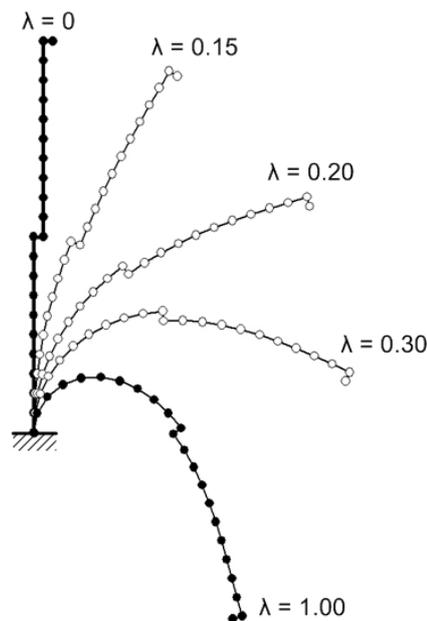


Figura 5.22 – Configurações deformadas da coluna composta para diferentes parâmetros de carga  $\lambda$ .

#### 5.1.2.4.

#### Coluna esbelta de MGF submetida a uma carga compressiva (Condição Engastada-Livre)

Uma coluna de MGF, engastada na base, de seção reta tubular com parâmetros do material e da geometria mostrados na Fig. 5.23, está submetida a um carregamento compressivo incremental na extremidade livre sendo  $P = 1.4 \times 10^{-2}$  kN. O objetivo nesta análise numérica é avaliar a resposta do elemento de pórtico de MGF quanto à resposta à força compressiva - deslocamentos transversal e lateral da coluna e a sua correspondente forma deformada – em uma condição pós crítica de flambagem. O modelo numérico utilizado empregou 10 elementos igualmente espaçados ao longo do comprimento da coluna, e a carga foi aplicada em 400 passos iguais com uma tolerância em deslocamentos de  $10^{-3}$ , usando o processo iterativo de Newton-Raphson. Em cada passo a convergência numérica foi alcançada após um máximo de 5 iterações de equilíbrio. Para excitar a solução correspondente ao primeiro modo de flambagem - cuja carga crítica é  $P_{\text{crit}} = (\pi^2/4)(\overline{EI}_z/L^2) = 1.745 \times 10^{-3}$  kN, ref. [86] -, aplicou-se na extremidade livre da coluna uma força transversal  $Q$  correspondente a 0.1% do valor da carga compressiva crítica.

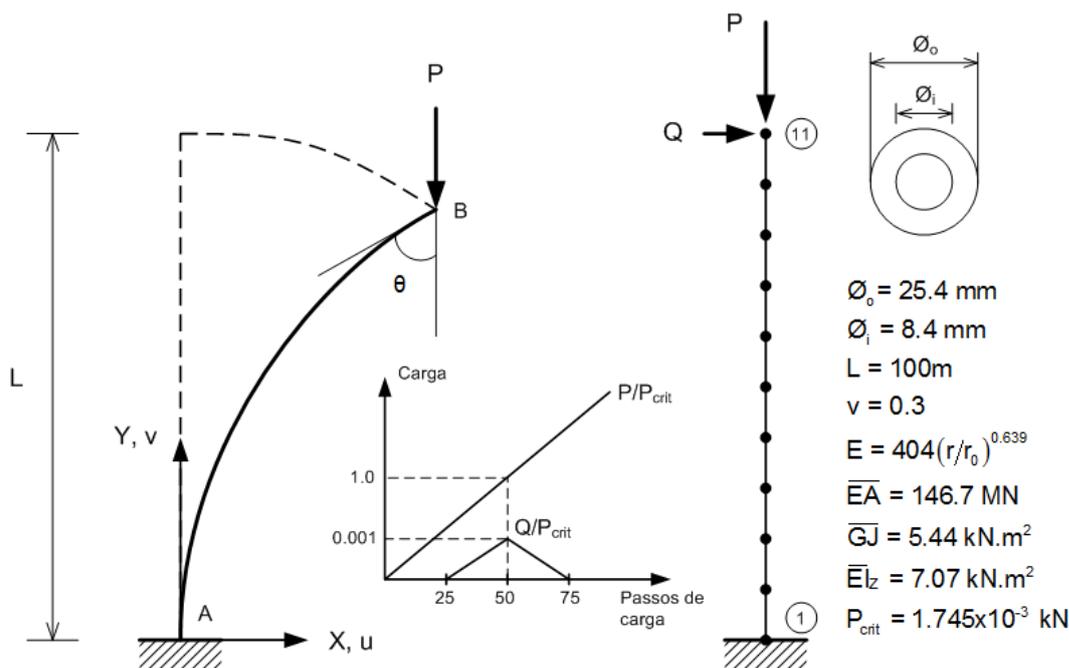


Figura 5.23 – Coluna Engastada-Livre de MGF considerada na análise.

Soluções para os diversos valores dos deslocamentos, na forma parametrizada, na extremidade livre para a coluna sob flambagem (Cond. Engastada-Livre) são apresentados na Fig. 5.24. Os valores obtidos com o modelo de elemento de pórtico de MGF estão comparados com a linha contínua, representativa da solução analítica da equação diferencial para uma coluna de material homogêneo, com propriedades equivalentes a de MGF apresentada por Timoshenko [86]. Observe-se a excelente concordância para os parâmetros comparados, para a faixa de carregamento considerada.

Configurações deformadas da coluna para diferentes valores da carga compressiva  $P$  estão mostrados na Fig. 5.25. Nestas, o parâmetro  $\lambda$  indica a razão entre  $P$  e a carga crítica. Para verificar as tensões normais numéricas obtidas na seção engastada foi selecionada a configuração de equilíbrio correspondente a  $\lambda = 2.19$  (passo de carga 109 na análise), isto devido a que nesta configuração sobre a seção engastada atuam uma força vertical  $P$  e um momento  $M_Z$  que depende apenas da posição  $u_B$  (obtida da análise numérica), assim as tensões normais na seção engastada podem ser analiticamente obtidas

$$\sigma_{YY} = E(r) \varepsilon_{YY} = E(r) \left( -\frac{P}{A} + \frac{M_Z x}{EI} \right) \quad (5.12)$$

onde  $P = 2.19 P_{crit}$  e  $M_Z = -P \cdot u_B$

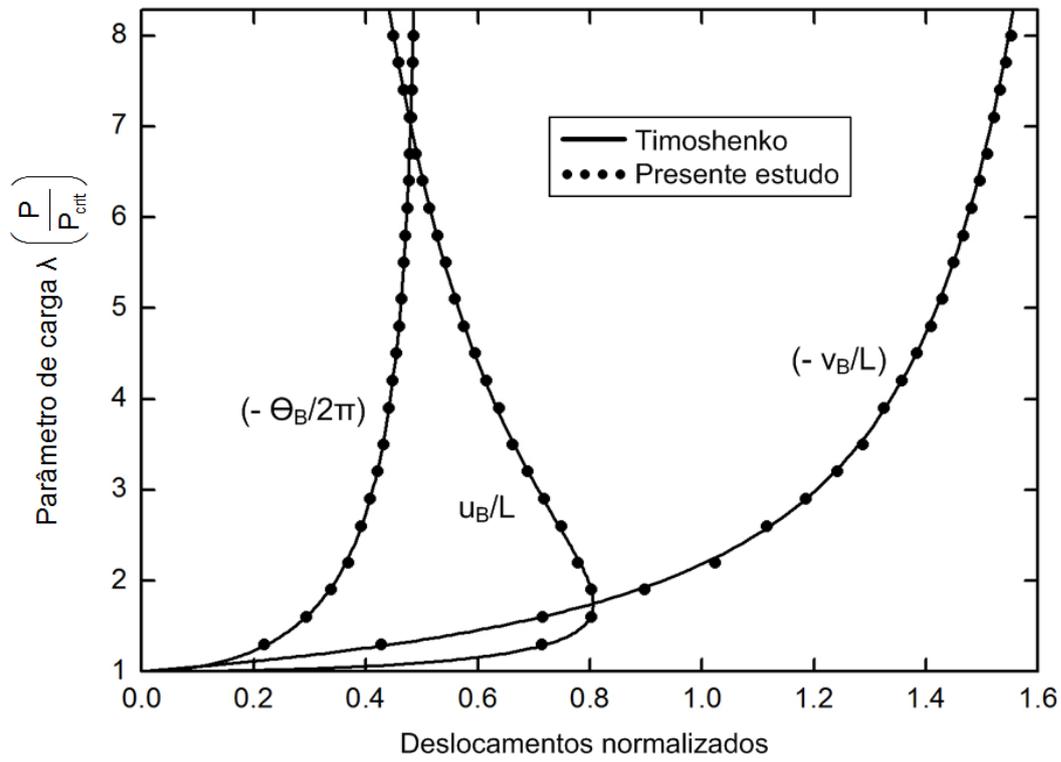


Figura 5.24 – Deslocamentos e rotações na extremidade da coluna Engastada-Livre, em função da carga aplicada – Resultados Parametrizados.

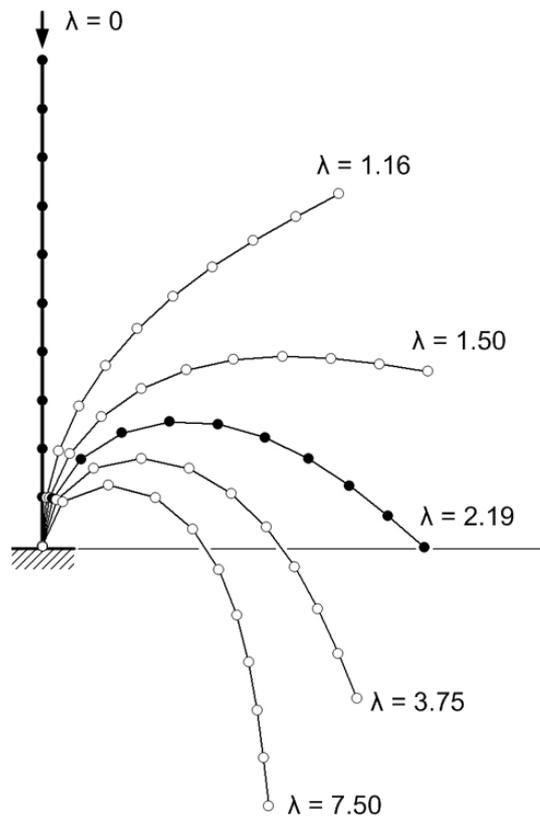


Figura 5.25 – Configurações deformadas da coluna de MGF para diferentes valores da carga P aplicada.

As Figs. 5.26a) e b), apresentam as tensões normais na seção reta do engastamento. Por estes resultados observa-se que o efeito da força normal na tensão normal é desprezível comparado ao efeito do momento fletor. Uma boa concordância entre as tensões calculadas analiticamente pela eq.(5.12) e as tensões numéricas é observada. Também são mostradas comparações entre as tensões normais para a coluna de MGF e para a coluna homogênea, com a mesma rigidez equivalente.

Considerando-se uma coluna de MGF de seção tubular com TiC no raio interno e Ni<sub>3</sub>Al no raio externo e lei de potência  $E(r) = 220(r/r_0)^{-0.643}$  uma nova distribuição das tensões no engastamento é conforme mostrado nas Figs. 5.27a) e b). Observa-se neste caso uma redução dos valores das tensões máximas e um aumento dos valores mínimos, quando comparadas com uma coluna de material homogêneo com rigidez equivalente a uma de MGF.

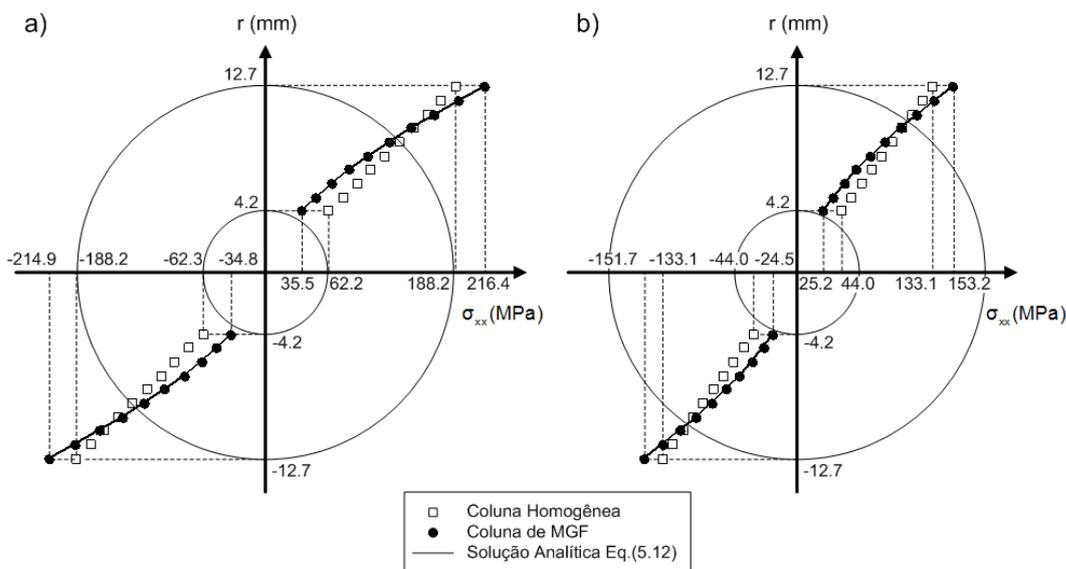


Figura 5.26 – Tensões normais no engastamento em dois planos de corte na seção transversal: (a) vertical e (b) inclinado  $45^\circ$  ( $\lambda = 2.19$ ,  $E(r) = 404(r/r_0)^{0.639}$  GPa).

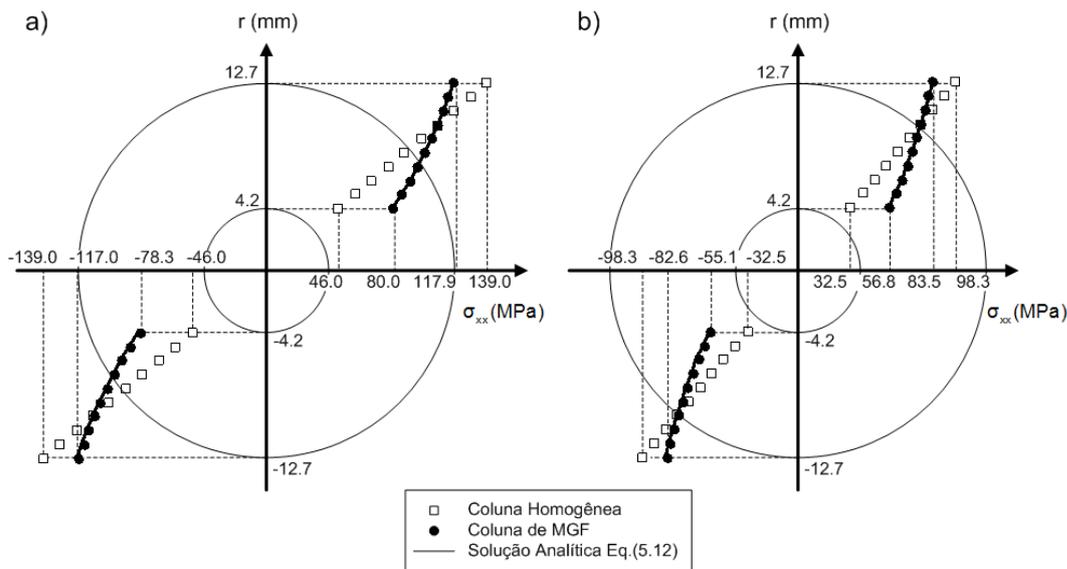


Figura 5.27 – Tensões normais no engastamento em dois planos de corte na seção transversal: (a) vertical e (b) inclinado  $45^\circ$  ( $\lambda = 2.19$ ,  $E(r)=220(r/r_0)^{-0.643}$  GPa).

### 5.1.2.5.

#### Viga curva em balanço submetida à carga concentrada fora do plano

Neste exemplo proposto por Bathe e Bolourchi [14], uma viga engastada de material homogêneo inicialmente com curvatura constante e com seção transversal tubular é submetida ao efeito de um carregamento concentrado  $P$  na sua extremidade livre. A viga tem raio de curvatura de 100 in e se estende sobre o plano  $X$ - $Y$  e, a carga concentrada é aplicada na direção  $Z$ . As propriedades mecânicas e geométricas da viga analisada estão mostradas na Fig. 5.28.

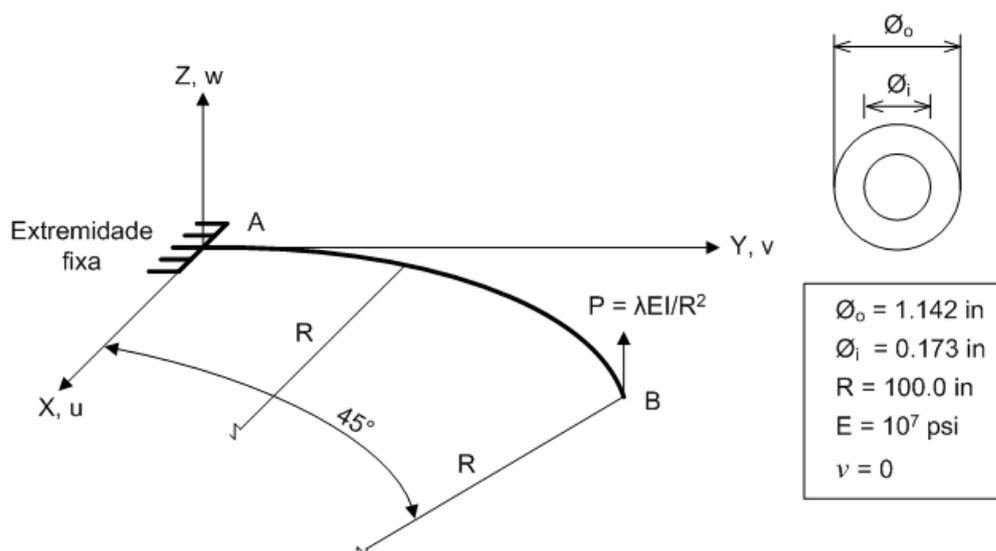


Figura 5.28 – Características geométricas, do material (homogêneo) e do carregamento para a viga considerada na análise.

O modelo utilizado nesta análise empregou 8 elementos retos iguais. A estrutura foi submetida a um carregamento máximo corresponde a um fator de carga de  $\lambda = 7.2$ , em uma análise numérica com 60 incrementos iguais de carga, juntamente com o processo iterativo de Newton-Raphson, admitindo-se uma tolerância em deslocamentos de  $10^{-5}$ . A convergência numérica foi alcançada após um máximo de 9 iterações de equilíbrio. A Fig. 5.29, apresenta as curvas que relacionam a carga aplicada com os deslocamentos  $w_B$ ,  $u_B$  e  $v_B$  da extremidade livre, nas direções Z, X e Y, respectivamente. Uma boa concordância com os resultados numéricos obtidos nas soluções fornecidas por Bathe e Bolourchi [14] é observada. Em [14], a viga curva originalmente tem seção transversal quadrada e foi modelada por elementos de vigas de dois nós, com base nas hipóteses do modelo para vigas de Timoshenko, utilizando a formulação Lagrangeana atualizada, onde a matriz de rigidez geométrica e o vetor de forças internas foram avaliados usando a fórmula de integração de Newton-Cotes. As configurações deformadas da viga curva para diferentes valores da carga são mostradas na Fig. 5.30.

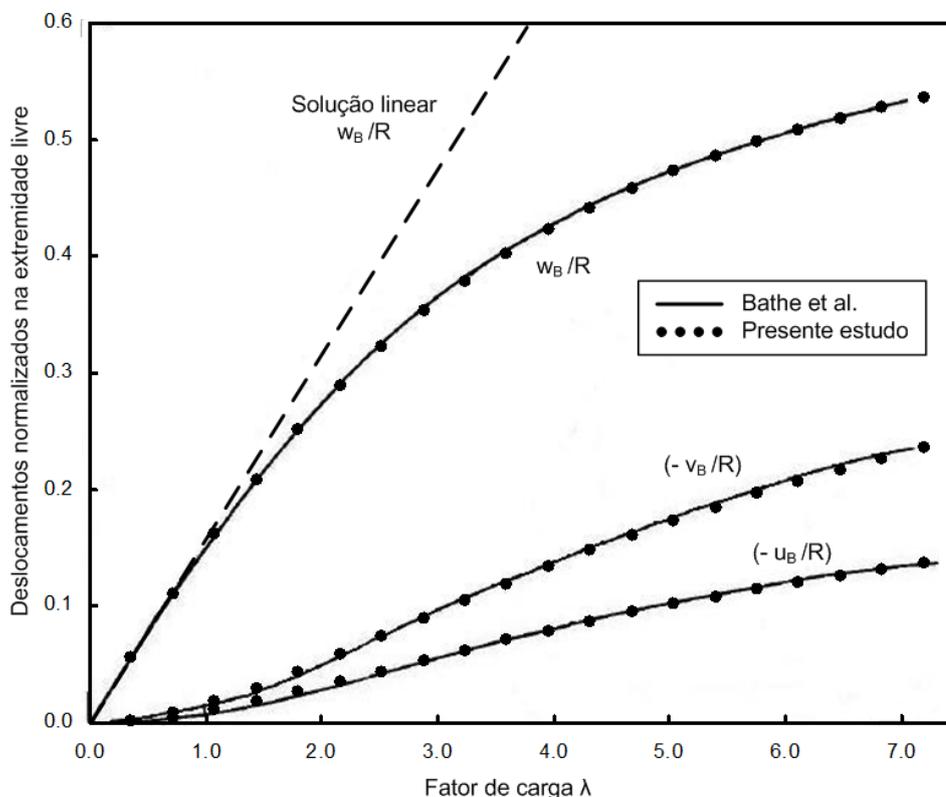


Figura 5.29 – Deslocamentos na extremidade livre da viga para diferentes incrementos de carga.

$\lambda = 0$	→ B (29.3, 70.7, 0.0)
$\lambda = 3.6$	→ B <sub>1</sub> (22.2, 58.8, 40.2) Presente estudo
	→ B <sub>1</sub> (22.5, 59.2, 39.5) Bathe at al.
$\lambda = 7.2$	→ B <sub>2</sub> (15.6, 47.1, 53.6) Presente estudo
	→ B <sub>2</sub> (15.9, 47.2, 53.4) Bathe at al.

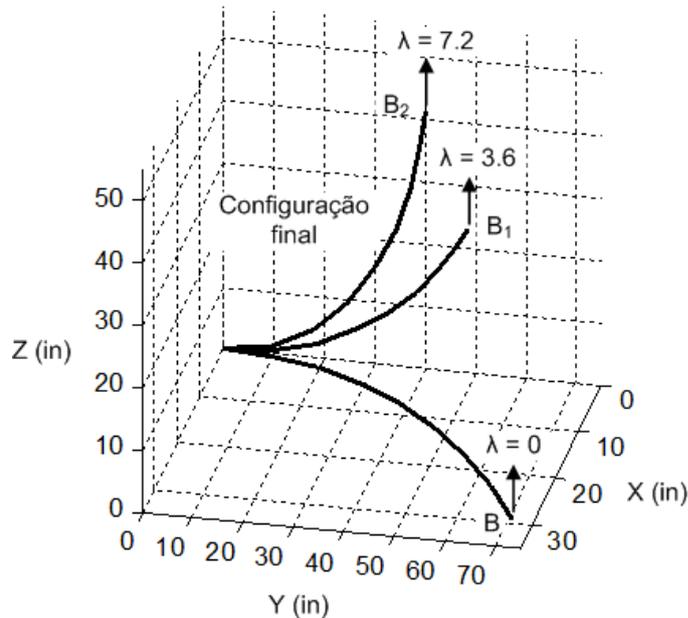


Figura 5.30 – Configurações espaciais da viga curva.

#### 5.1.2.6.

#### **Riser em balanço submetido a carregamento hidrostático**

Este exemplo proposto por Yazdchi e Crisfield [95], considera um *riser* flexível de propileno em balanço, com 20 m de comprimento e submetido a uma carga vertical concentrada na extremidade livre. O *riser* encontra-se fechado nas extremidades e é colocado a uma profundidade 100 m abaixo do nível da água. As propriedades mecânicas e geométricas do *riser* estão ilustradas na Fig. 5.31. O objetivo desta análise é encontrar a configuração final de equilíbrio do *riser* submetido à ação do peso próprio, do empuxo e da carga concentrada.

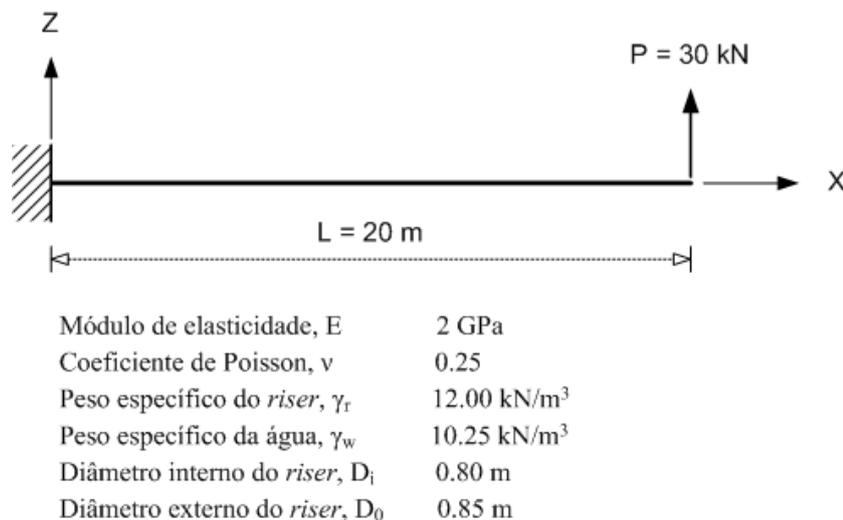


Figura 5.31 – Propriedades mecânicas e geométricas do riser em balanço e carga vertical na extremidade.

Na análise numérica o riser foi discretizado com 20 elementos igualmente espaçados, utilizando-se uma historia de carregamento correspondente a 50 passos de carregamento (ver Fig. 5.32), em que nos primeiros 25 passos foram aplicadas as cargas de peso próprio e do empuxo e nos 25 passos seguintes aplicou-se o carregamento externo. Em cada passo de carregamento, para a convergência da solução no processo iterativo de Newton-Raphson considerou-se uma tolerância em deslocamentos igual a  $10^{-3}$ , alcançada após um máximo de 4 iterações de equilíbrio.

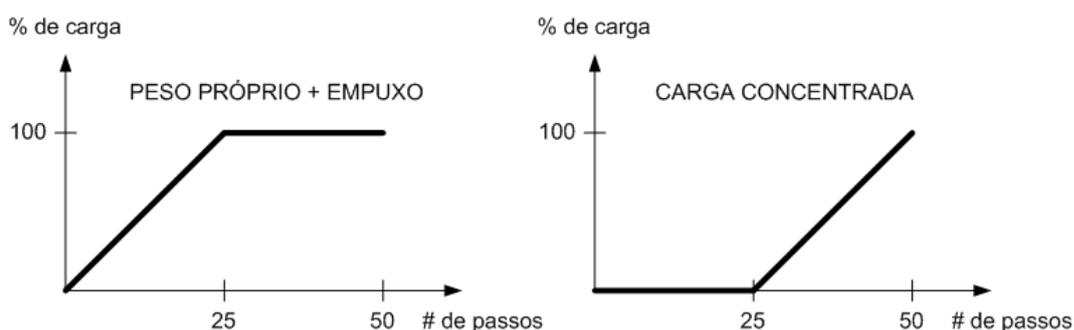


Figura 5.32 – Carregamento aplicado na análise numérica.

Na Fig. 5.33 são mostradas as configurações deformadas para o riser com e sem a consideração da força de empuxo. Nesta figura, resultados numéricos obtidos com a presente formulação são comparados com os obtidos em [95] observando-se uma excelente concordância entre eles.

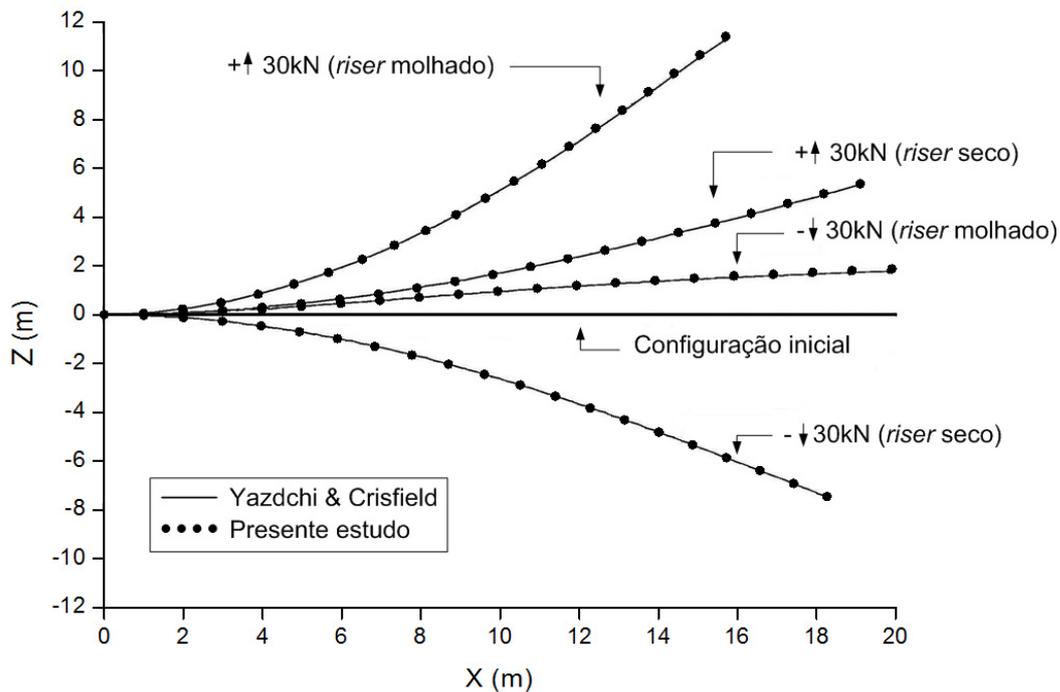


Figura 5.33 – Configurações deformadas do *riser* em balanço com diferentes condições de carregamento.

#### 5.1.2.7.

#### **Riser vertical sob carregamento de correnteza e submetido a força de tração no topo**

Neste exemplo proposto por Yazdchi e Crisfield [95] analisa-se o comportamento de um *riser* vertical pré-tensionado sob força igual a 510 kN, correspondente ao esforço produzido por um sistema flutuante. O *riser*, de comprimento 320 m, está situado em lâmina d'água de 300 m e submetido a um carregamento de correnteza transversal de perfil constante. As propriedades geométricas e do material do *riser* estão ilustradas na Fig. 5.34. O exemplo considerado constitui-se num sistema típico de um *riser* rígido na configuração de *Top Tensioned Riser* (TTR) comumente utilizado tanto na produção como na perfuração, em plataformas do tipo TLPs e *Spars*. A força de tração no topo do *riser* se faz necessária para evitar a ocorrência de flambagem, assegurando uma força de tração constante na direção axial.

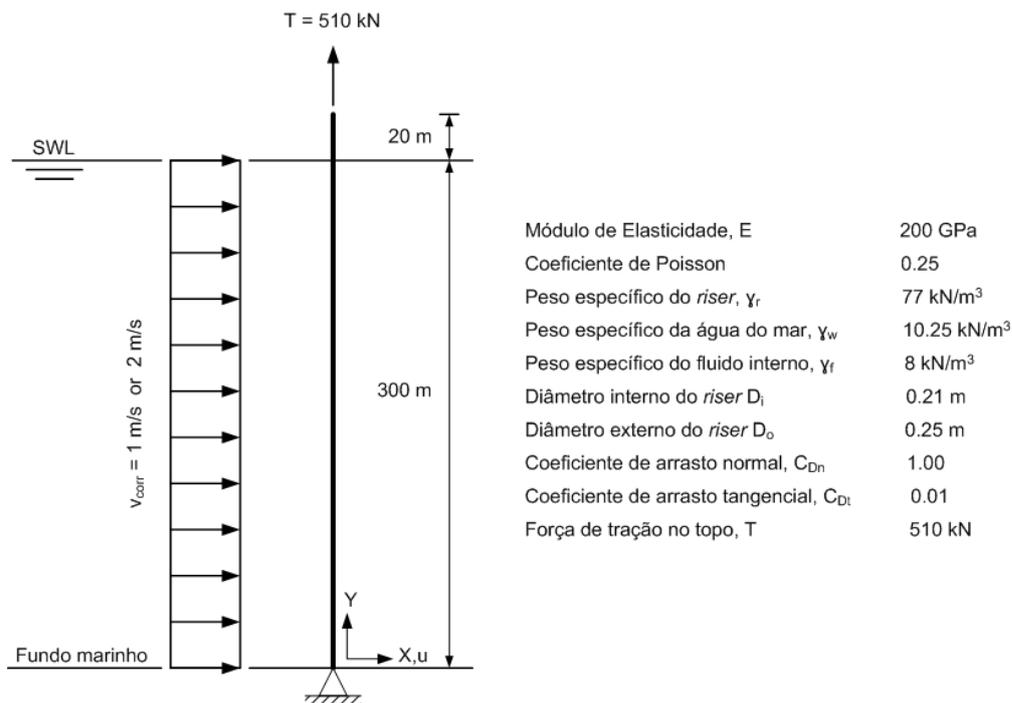


Figura 5.34 – Riser vertical com tração no topo.

A estrutura foi modelada utilizando 30 elementos igualmente espaçados submersos e 4 elementos igualmente espaçados acima do nível d'água. Inicialmente o riser encontra-se na posição vertical no plano X–Y, tendo o nó do fundo fixado por uma rotula e o nó do topo restrito apenas na direção X, onde a força de tração é aplicada verticalmente. Na análise numérica foi utilizada a mesma sequência de carregamento que em [95] e mostrada na Fig. 5.35 para o peso próprio e empuxo, para a força de tração e para a correnteza. Observa-se da Fig. 5.35 que antes do passo 10 não pode acontecer flambagem no riser devido que não atua sobre ele nenhuma força de perturbação que excite seu primeiro modo de flambagem. A técnica iterativa de Newton-Raphson foi utilizada na determinação da solução não linear do sistema de equações resultante e um critério de convergência em deslocamentos, com tolerância de  $10^{-3}$ , é utilizado resultando em um número máximo de iterações por passo para atingir a convergência igual a 3.

A Fig. 5.36 apresenta duas configurações deformadas do riser considerando-se as magnitudes para o perfil de correnteza uniforme, iguais a 1.0 e 2.0m/s. Nestas observa-se que configurações deformadas não são simétricas, devido ao efeito do carregamento de correnteza e também ao fato da tração no riser variar ao longo do comprimento, sendo menor junto ao fundo devido ao seu

peso aparente. Uma boa concordância entre as soluções numéricas obtidas com o presente estudo e àquelas por Yazdchi e Crisfield é observada.

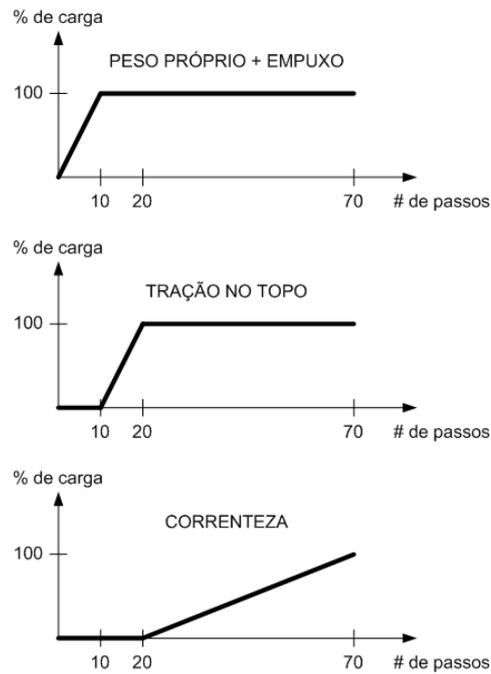


Figura 5.35 – Sequência de carregamento usado na análise.

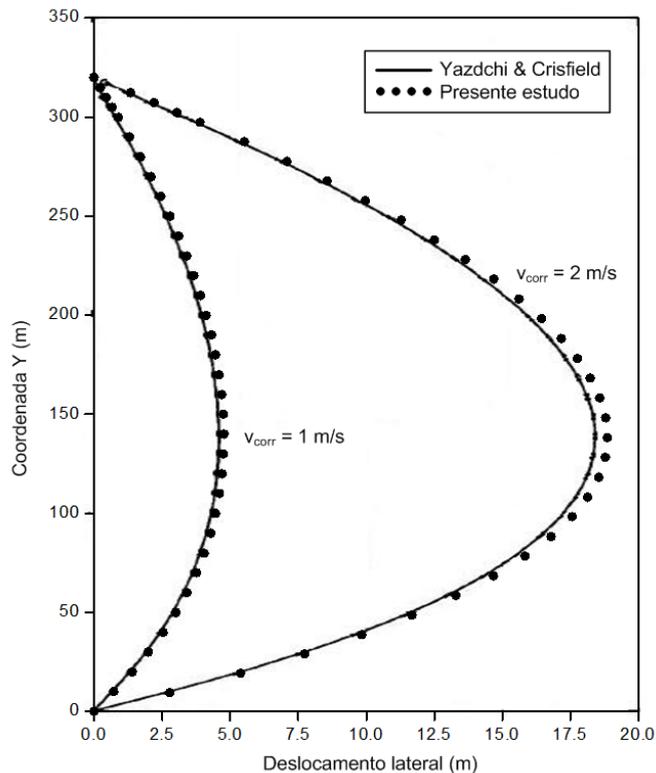


Figura 5.36 – Configurações deformadas do *riser* considerando carregamentos de correnteza de perfil uniforme e magnitudes de 1.0 e 2.0 m/s, respectivamente.

## 5.2. Análise Dinâmica

### 5.2.1. Frequências naturais de viga de seção tubular de MGF e bi-material

Nesta aplicação considera-se a avaliação das frequências naturais de uma viga com 1m de comprimento e seção tubular formada por dois materiais (liga de Ni<sub>3</sub>Al e TiC), em que uma região de transição entre os materiais, de espessura  $t_{FGM}$ , formada por uma camada de MGF garante a variação suave das constantes físicas dos materiais na seção reta. Neste estudo a espessura desta camada pode variar entre 0% e 100% da espessura do tubo  $h$ . O centro da camada de MGF localiza-se no raio médio da seção tubular, mantendo-se iguais as espessuras de TiC e Ni<sub>3</sub>Al localizadas no interior e exterior do tubo, respectivamente. O objetivo é avaliar o efeito da variação da espessura da camada de MGF na frequência natural de viga reta, quando sujeita às seguintes condições de contorno: a) em balanço e b) engastada-apoiada. As propriedades geométricas e do material da seção tubular estão ilustrados na Fig. 5.37. Observa-se que o módulo de elasticidade e massa específica do MGF variam segundo uma função quadrática na forma

$$\begin{aligned} E_{FGM}(n) &= (E_o - E_i) \left( \frac{n}{t_{FGM}} + \frac{1}{2} \right)^2 + E_i \\ \rho_{FGM}(n) &= (\rho_o - \rho_i) \left( \frac{n}{t_{FGM}} + \frac{1}{2} \right)^2 + \rho_i \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde  $-\frac{1}{2} \leq \frac{n}{t_{FGM}} \leq \frac{1}{2}$ .

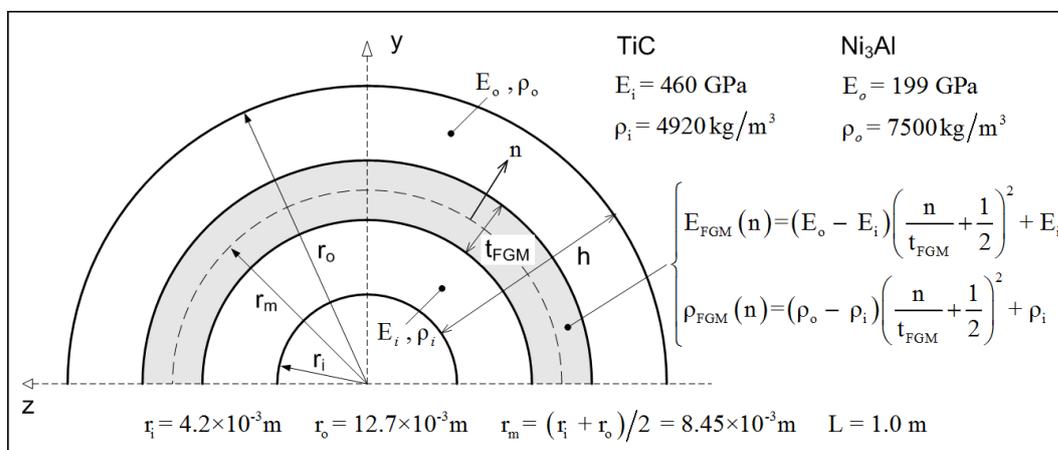


Figura 5.37 – Detalhes da seção tubular compósita considerada na análise numérica.

Valores equivalentes para a rigidez à flexão  $\overline{EI}$  e a massa por unidade de comprimento  $\overline{\rho A}$  da viga são avaliados na forma

$$\begin{aligned}\overline{EI} &= E_i I_i + \int_A [E_{FGM}(n)] y^2 dA + E_o I_o \\ \overline{\rho A} &= \rho_i A_i + \int_A [\rho_{FGM}(n)] dA + \rho_o A_o\end{aligned}\quad (5.14)$$

onde, da Fig. 5.37,  $I_i = \frac{\pi}{4} \left[ \left( r_m - \frac{t_{FGM}}{2} \right)^4 - r_i^4 \right]$ ,  $I_o = \frac{\pi}{4} \left[ r_o^4 - \left( r_m + \frac{t_{FGM}}{2} \right)^4 \right]$ ,

$$A_i = \pi \left[ \left( r_m - \frac{t_{FGM}}{2} \right)^2 - r_i^2 \right] \text{ e } A_o = \pi \left[ r_o^2 - \left( r_m + \frac{t_{FGM}}{2} \right)^2 \right].$$

No calculo das integrais nas eqs.(5.14) emprega-se o sistema de coordenadas polares onde

$$\begin{aligned}r &= r_m + n \\ dA &= r dr d\theta = (r_m + n) dn d\theta \\ y &= (r_m + n) \text{sen}\theta\end{aligned}\quad (5.15)$$

Substituindo estas expressões as equações em (5.14) resultam em

$$\begin{aligned}\overline{EI} &= E_i I_i + \int_{-t_{FGM}/2}^{t_{FGM}/2} \pi [E_{FGM}(n)] (r_m + n)^3 dn + E_o I_o \\ \overline{\rho A} &= \rho_i A_i + \int_{-t_{FGM}/2}^{t_{FGM}/2} 2\pi [\rho_{FGM}(n)] (r_m + n) dn + \rho_o A_o\end{aligned}\quad (5.16)$$

Com os parâmetros equivalentes obtidos nas eqs.(5.16), os valores analíticos das frequências naturais de primeira até quinta ordem para uma viga de comprimento L, com diferentes condições de contorno a partir das expressões fornecidas em [87], resultam em

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{k_i}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{\overline{EI}}{\overline{\rho A}}}, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (5.17)$$

onde as constantes  $k_i$  dependem das condições de contorno da viga, assim tem-se:

a) Viga em balanço,  $k_1 = 1.875$ ,  $k_2 = 4.694$ ,  $k_3 = 7.855$ ,  $k_4 = 10.996$  e  $k_5 = 14.137$ ; b) Viga engastada-apoiada,  $k_1 = 3.927$ ,  $k_2 = 7.069$ ,  $k_3 = 10.210$ ,  $k_4 = 13.352$  e  $k_5 = 16.493$ .

Os valores analíticos para as frequências naturais de vibração da viga calculados para diferentes configurações do material da seção transversal usando as eqs.(5.16) e (5.17), são comparados com as soluções numéricas usando um modelo de 10 elementos igualmente espaçados. Apenas nesta análise dinâmica foi

usada a matriz de inércia consistente, considerando desprezível o efeito da inércia de rotação. Estas comparações estão mostradas na Fig. 5.38 apresentando uma boa concordância entre elas. Nos gráficos da Fig. 5.38 observa-se que, os fatores de amplificação entre as frequências naturais consecutivas  $f_{i+1}$  e  $f_i$  ( $i=1,\dots,4$ ) são sequencialmente iguais a 6.27-2.80-1.96-1.66 e 3.24-2.09-1.71-1.53 para os casos a) e b), respectivamente.

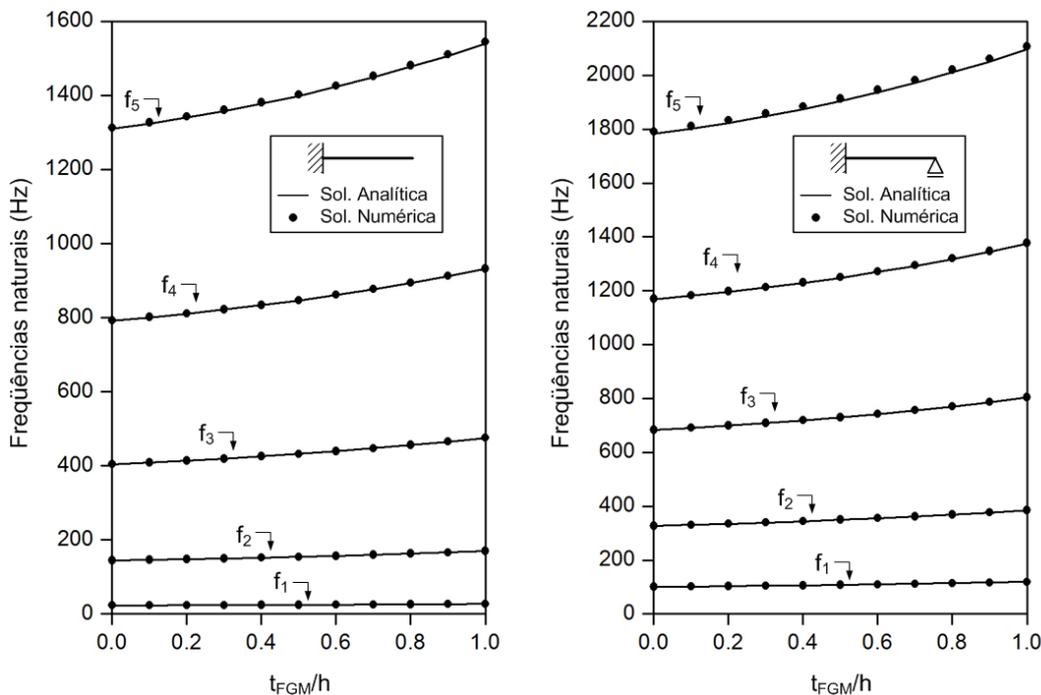


Figura 5.38 – Primeira até a quinta frequência natural à flexão para a viga composta considerada.

### 5.2.2.

#### Viga reta em balanço submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída

Com o objetivo de testar o elemento de pórtico implementado em análise dinâmica sujeita a grandes deslocamentos, considerou-se o problema proposto por Bathe et al.[13] consistindo de uma viga em balanço submetida a carregamento distribuído uniforme de intensidade  $P$  e seção transversal tubular, cujas propriedades físicas e geométricas estão ilustradas na Fig. 5.39. A viga em balanço foi idealizada empregando-se 8 elementos.

Na Fig. 5.40 está apresentada a resposta estática para o problema analisado. É mostrada a evolução do deslocamento vertical da extremidade livre, de acordo

com a intensidade de carregamento  $P$ . Da comparação entre os resultados obtidos com o presente estudo e os àqueles por Bathe et al. [13] observa-se uma boa concordância. Na análise, o carregamento distribuído de intensidade máxima 10lb/in foi aplicado em 50 passos iguais de carga.

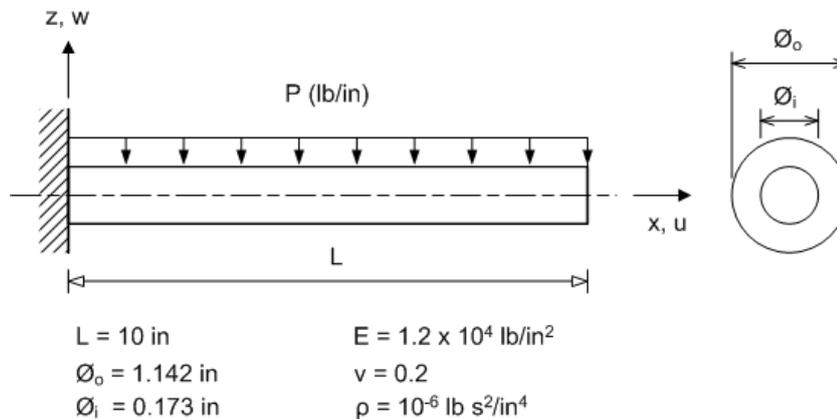


Figura 5.39 – Viga em balanço com carregamento uniforme considerada na análise.

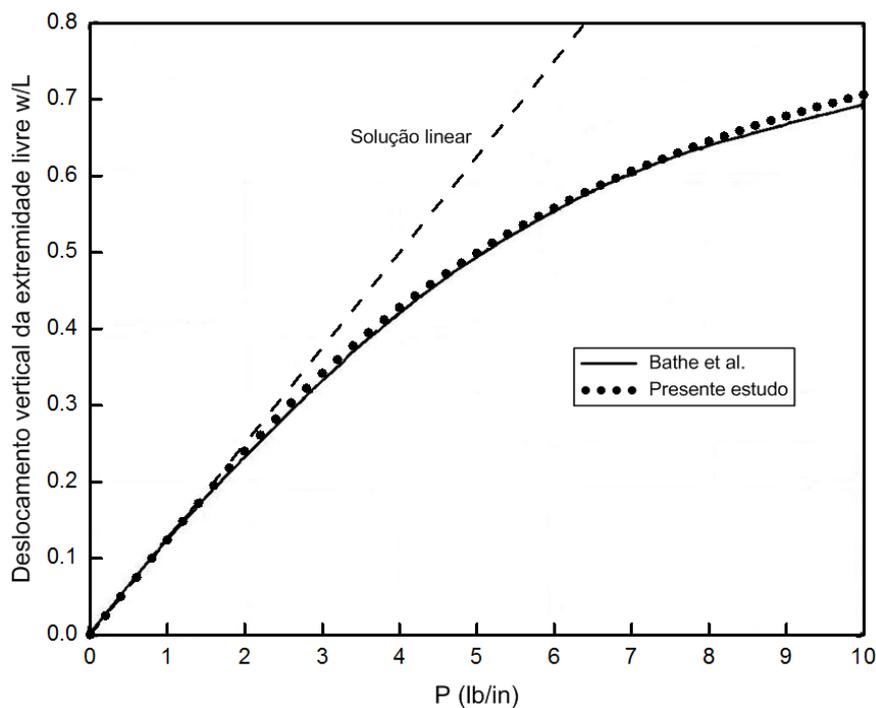


Figura 5.40 – Análise estática não-linear da viga em balanço com carregamento uniforme.

Considerando-se agora a análise dinâmica da viga, o carregamento uniforme de intensidade constante e igual a 2.85 lb/in foi subitamente aplicado ao início da análise, e os resultados obtidos para o deslocamento transversal máximo da viga usando o algoritmo de integração HHT, juntamente com a técnica iterativa de

Newton-Raphson, estão mostrados na Fig. 5.41. Esta carga foi aplicada em um intervalo de tempo igual a  $1.215 \times 10^{-2}$  s em 90 passos, utilizando-se como parâmetro de incremento temporal  $\Delta t = 1.35 \times 10^{-4}$  s e o critério de convergência de  $10^{-4}$  para os deslocamentos e de  $10^{-3}$  para as forças. Em média foram necessárias 4 iterações por passo de tempo para convergência da solução da equação de equilíbrio discretizada. A resposta dinâmica para o deslocamento vertical da extremidade livre mostrada na Fig. 5.41 apresenta-se em boa concordância com os resultados obtidos em [13]. Observe-se que o período da resposta dinâmica na análise não-linear apresenta uma redução de 4.5% em relação ao valor obtido com a eq.(5.17) correspondente a análise linear. Esta redução do período deve-se especialmente ao enrijecimento da viga provocado pela força normal resultante do severo aumento na curvatura devido aos grandes deslocamentos obtidos. Na obtenção dos resultados numéricos mostrados considera-se um fator de amortecimento relativo de  $\xi = 0.756\%$  (modelo de amortecimento de Rayleigh [56]), resultante da falta de informação em [12].

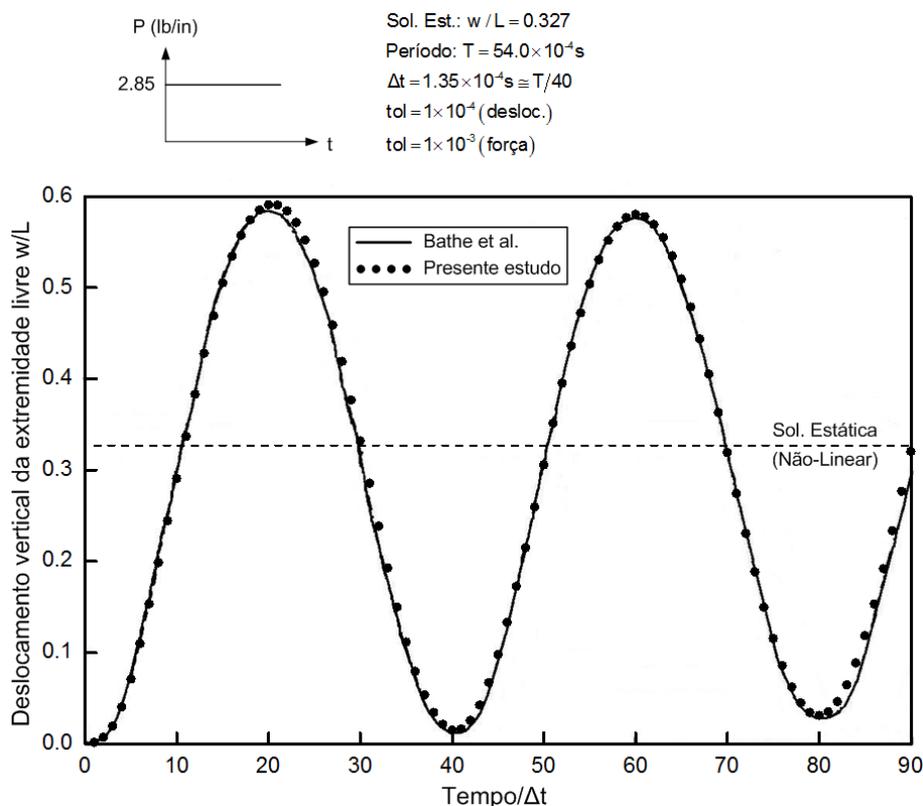


Figura 5.41 – Resposta dinâmica não linear da viga em balanço com carregamento uniforme.

### 5.2.3.

#### Viga reta em balanço de MGF submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída

Neste exemplo tomou-se como referencia o exemplo proposto por Bathe [13], e descrito na seção anterior, com a finalidade de testar o elemento de pórtico proposto neste trabalho na análise dinâmica de uma viga em balanço de seção tubular agora com MGF. O MGF proposto é composto pelas ligas de TiC e Ni<sub>3</sub>Al localizadas no interior e exterior do tubo, respectivamente. O módulo de elasticidade e a massa específica do material variam ao longo da direção radial, segundo uma lei de potência, respectivamente  $E(r) = 220(r/r_0)^{-0.643}$  GPa e  $\rho(r) = 7361(r/r_0)^{0.831}$  kg/m<sup>3</sup>. As propriedades físicas e geométricas do tubo assim como a intensidade do carregamento aplicado na análise dinâmica estão ilustradas na Fig. 5.42. Neste exemplo o desempenho da viga de MGF é comparado com vigas homogêneas das ligas de TiC e Ni<sub>3</sub>Al. O modelo utilizou 10 elementos igualmente espaçados para representar a geometria da viga.

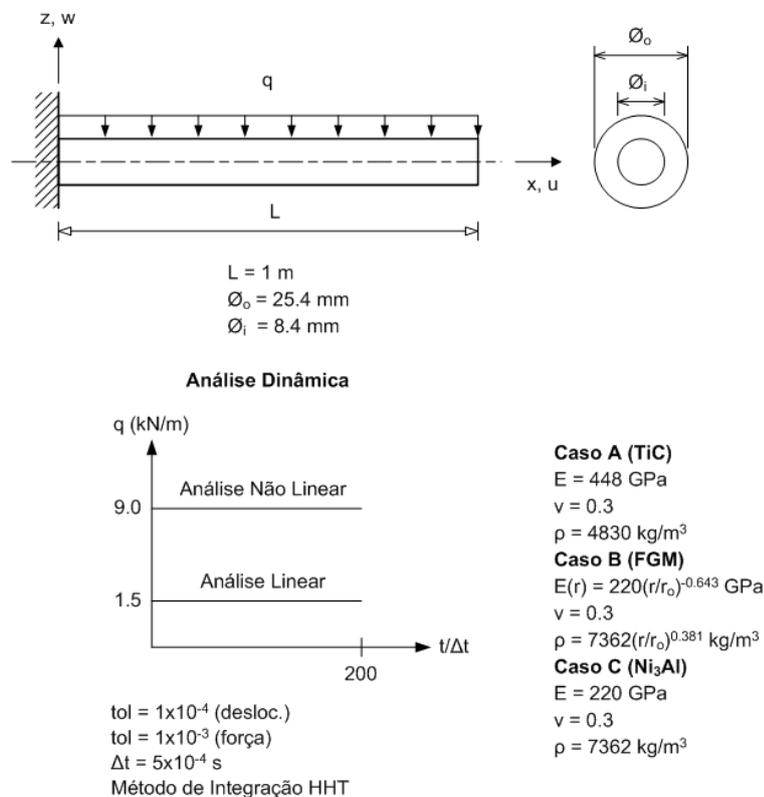


Figura 5.42 – Propriedades físicas, geométricas e carregamento aplicado na análise da viga em balanço

Inicialmente considerou-se a resposta estática do modelo. Desta forma, um carregamento distribuído de intensidade máxima igual a 30 kN/m foi aplicado em incrementos temporais na forma  $q = 0.5t$  (kN/m,  $0 \leq t \leq 60$ ), onde  $t$  é o passo temporal da análise numérica. O objetivo é verificar a correlação do deslocamento transversal da extremidade livre da viga em relação ao carregamento distribuído aplicado durante todo o intervalo de carregamento para os três tipos de materiais da viga incluído o MGF. Os resultados numéricos obtidos estão mostrados na Fig. 5.43. Nesta, observa-se que a viga com seção de MGF apresenta deslocamentos na extremidade livre intermediários em comparação com a resposta das vigas de TiC e  $Ni_3Al$ .

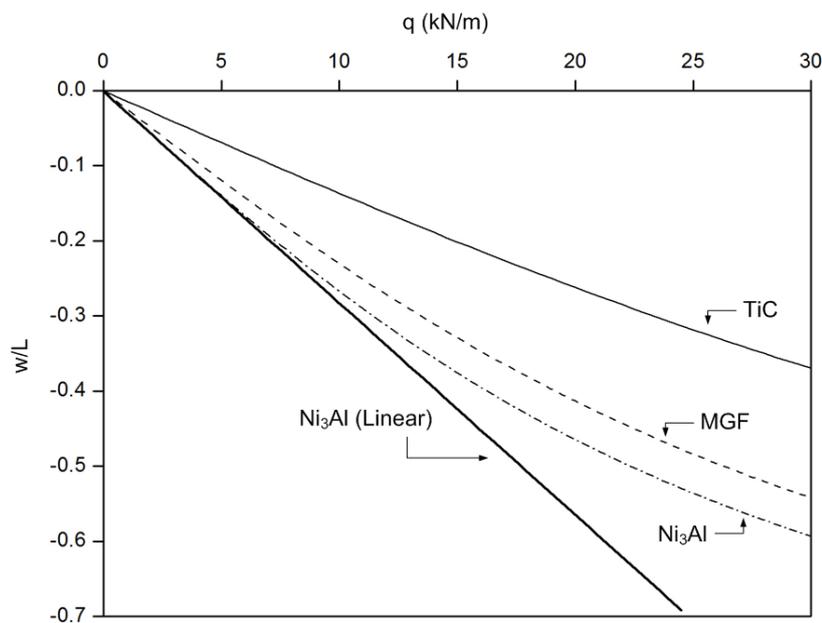


Figura 5.43 – Análise estática não-linear da viga em balanço com carregamento uniforme, resultados para três materiais diferentes.

Considerando-se o comportamento dinâmico da viga em pequenos deslocamentos (análise linear) e grandes deslocamentos (análise não-linear) foram aplicados sobre a viga carregamentos distribuídos com intensidades máximas iguais a 1.5 kN/m e a 9 kN/m, respectivamente. Estes carregamentos foram aplicados subitamente (do tipo degrau) durante o tempo da análise como está mostrado na Fig. 5.42. Utilizando-se o incremento temporal de  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ s obteve-se a solução do problema até o instante 0.1s, usando o algoritmo de integração HHT juntamente com a técnica iterativa de Newton-Raphson. O

critério de convergência utilizado considerou  $10^{-4}$  para os deslocamentos e de  $10^{-3}$  para as forças. Em média, 3 iterações por passo de tempo foram necessárias para a convergência. A resposta dinâmica para o deslocamento vertical e rotação da extremidade livre para os três tipos de materiais: TiC, MGF e Ni<sub>3</sub>Al estão mostrados nas Figs. 5.44, 5.45 e 5.46, respectivamente. Observa-se que em todos os casos na condição de pequenos deslocamentos (análise linear), os períodos correspondentes à primeira frequência transversal calculado com a eq.(5.17) e as obtidas numericamente são essencialmente coincidentes, para um erro de 0.2%, no máximo.

Na condição de grandes deslocamentos (análise não linear) as amplitudes de resposta dinâmicas para o deslocamento transversal e rotação da extremidade livre aumentam como mostrado nas Figs. 5.44, 5.45 e 5.46. Observa-se também uma defasagem nas respostas dinâmica linear e não-linear, devida ao enrijecimento da viga provocado pela força de tração na viga, com o aumento da curvatura. Como conseqüência os períodos referentes à primeira frequência natural na análise não-linear para a viga de materiais: TiC, MGF e Ni<sub>3</sub>Al diminuem relativamente ao período obtido na análise linear; nos dois últimos casos esta diferença é mais apreciável correspondendo a reduções da ordem de 3.9% e 2.4%, respectivamente.

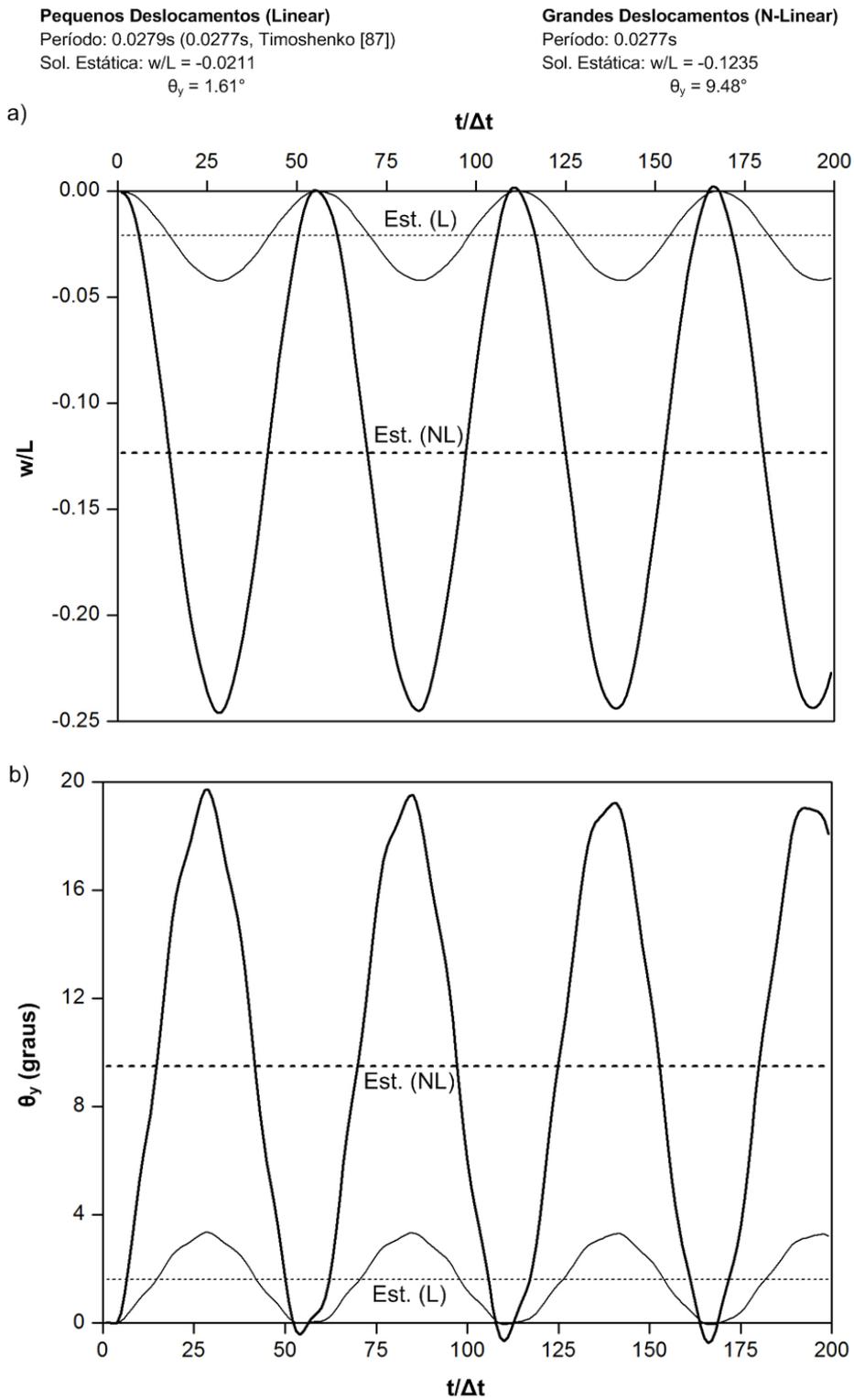


Figura 5.44 – Caso A: Resposta dinâmica linear e não-linear para a viga em balanço de material TiC, a) deslocamento vertical e b) rotação da extremidade livre.

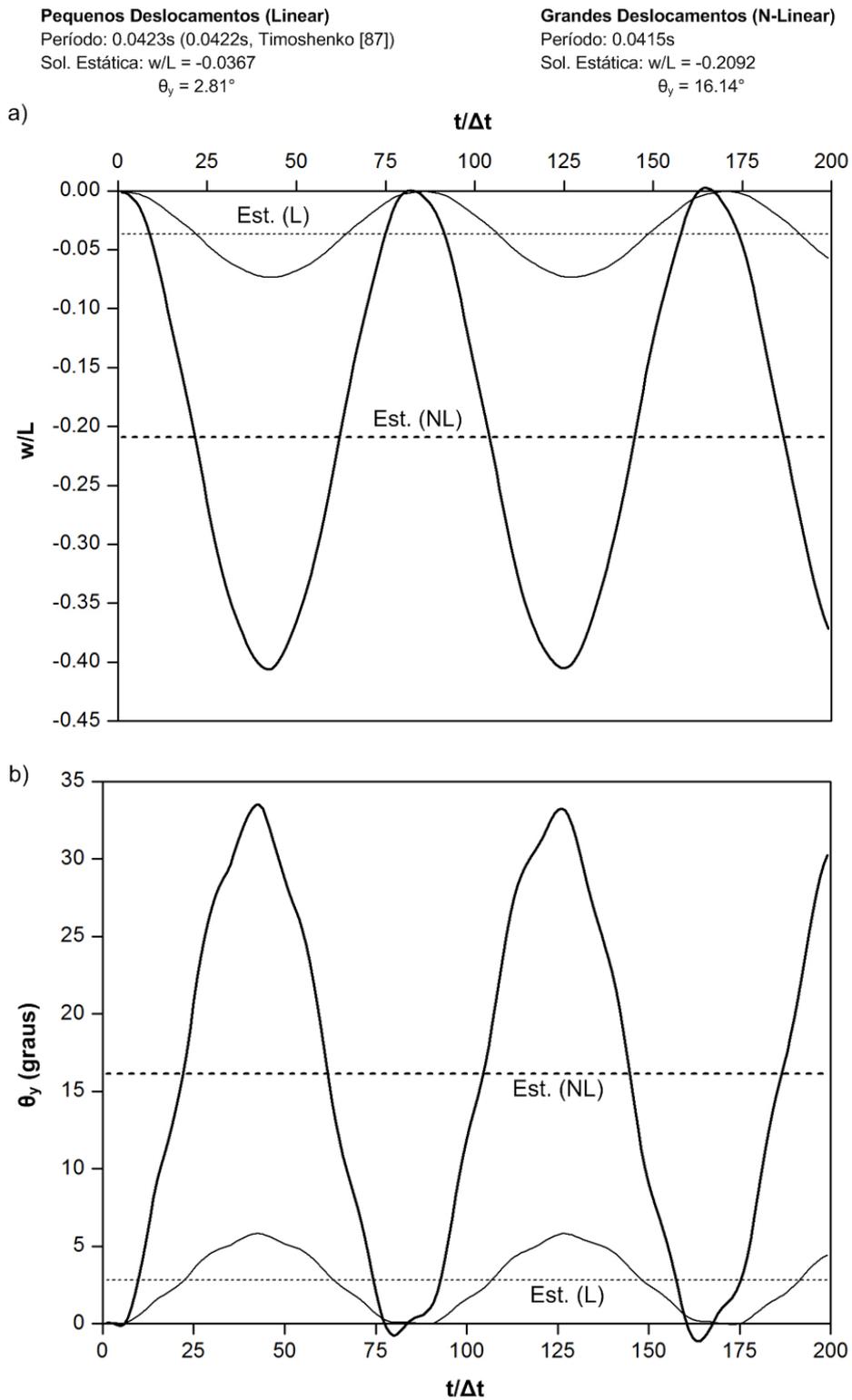


Figura 5.45 – Caso B: Resposta dinâmica linear e não-linear para a viga em balanço de MGF, a) deslocamento vertical e b) rotação da extremidade livre.

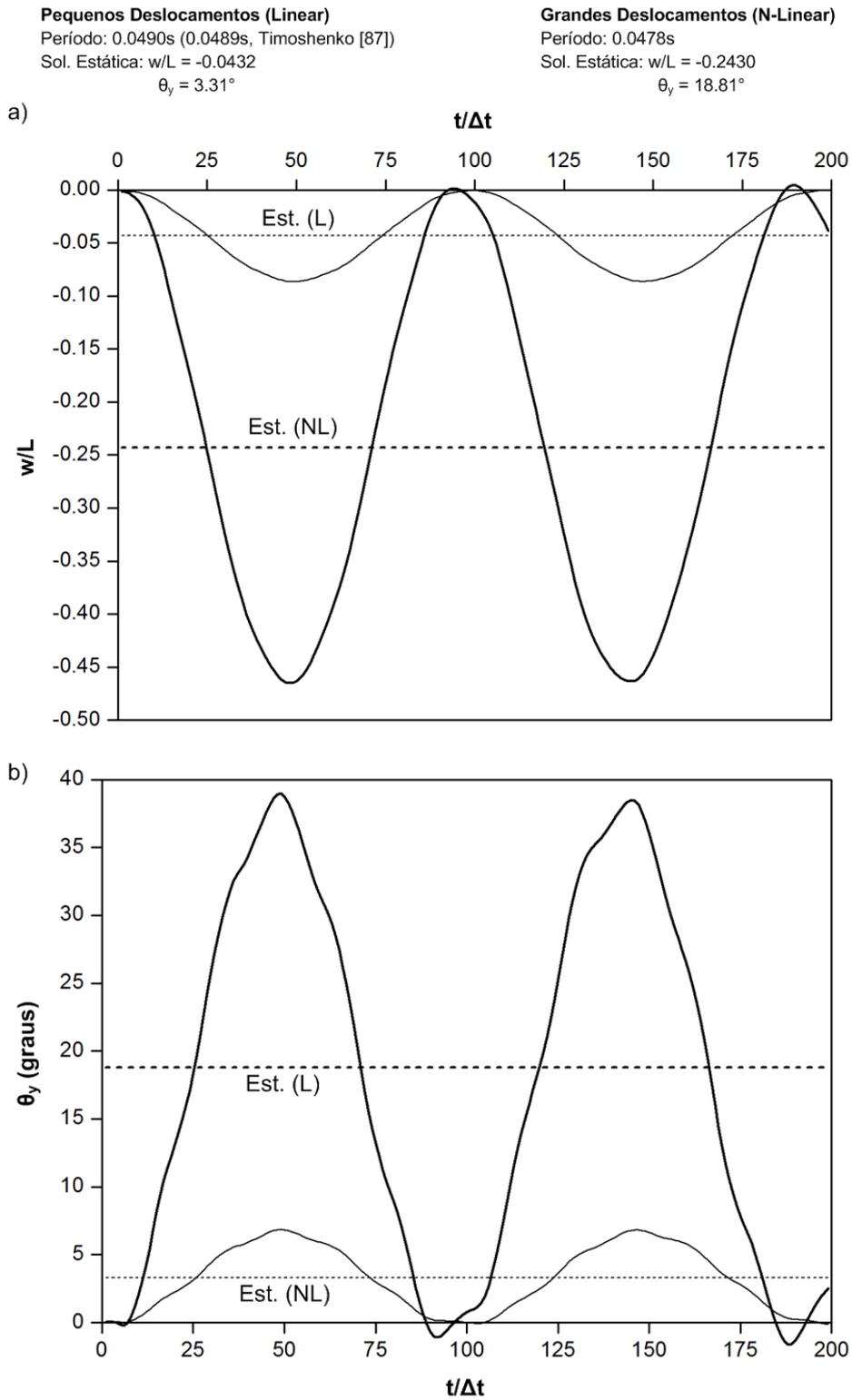


Figura 5.46 – Caso C: Resposta dinâmica linear e não-linear para a viga em balanço de material  $Ni_3Al$ , a) deslocamento vertical e b) rotação da extremidade livre.

### 5.2.4.

#### Viga curva em balanço submetida à carga transversal concentrada na extremidade

Este exemplo foi considerado na seção 5.1.2.5 em sua versão estática. O objetivo desta análise é avaliar o desempenho do elemento de pórtico na análise dinâmica tridimensional de vigas. A viga em balanço considerada possui curvatura constante a  $45^\circ$  e seção transversal tubular. Está submetida a uma carga concentrada máxima igual a 300lb, e foi aplicada subitamente sobre a extremidade livre da viga. Os parâmetros físicos, geométricos e do carregamento estão ilustrados na Fig. 5.47.

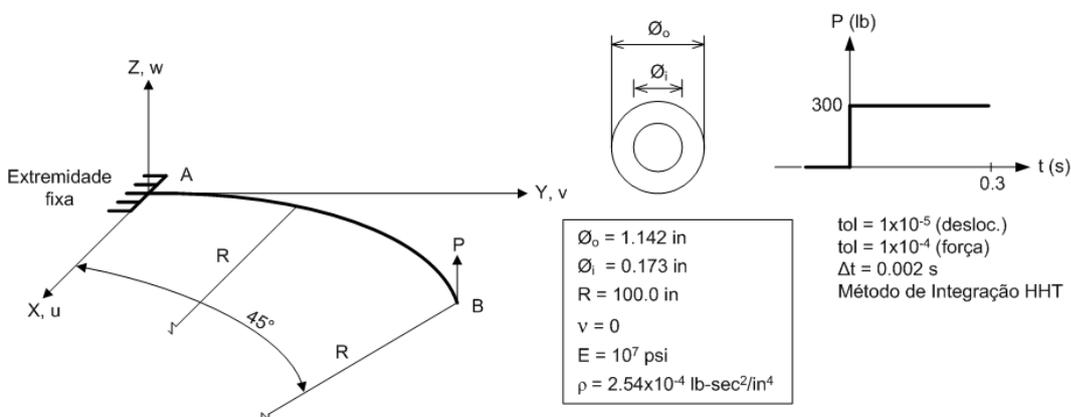


Figura 5.47 – Viga curvada em balanço considerada na análise.

Um modelo com 16 elementos retos igualmente espaçados foi utilizado, com um incremento temporal de 0.002s integrou-se o sistema de equações resultante até o instante 0.3s, utilizando o algoritmo de integração temporal HHT juntamente com a técnica iterativa de Newton-Raphson. O critério de convergência utilizado foi de  $10^{-4}$  para os deslocamentos e de  $10^{-3}$  para as forças. Em média 6 iterações por passo de tempo foram necessárias para atingir-se a convergência. A Fig. 5.48 ilustra a resposta dinâmica para os deslocamentos na extremidade livre. Observa-se aqui também uma excelente concordância entre os resultados numéricos obtidos com o elemento de pórtico proposto no presente trabalho quando comparados com os obtidos por Chan, S.L. [22].

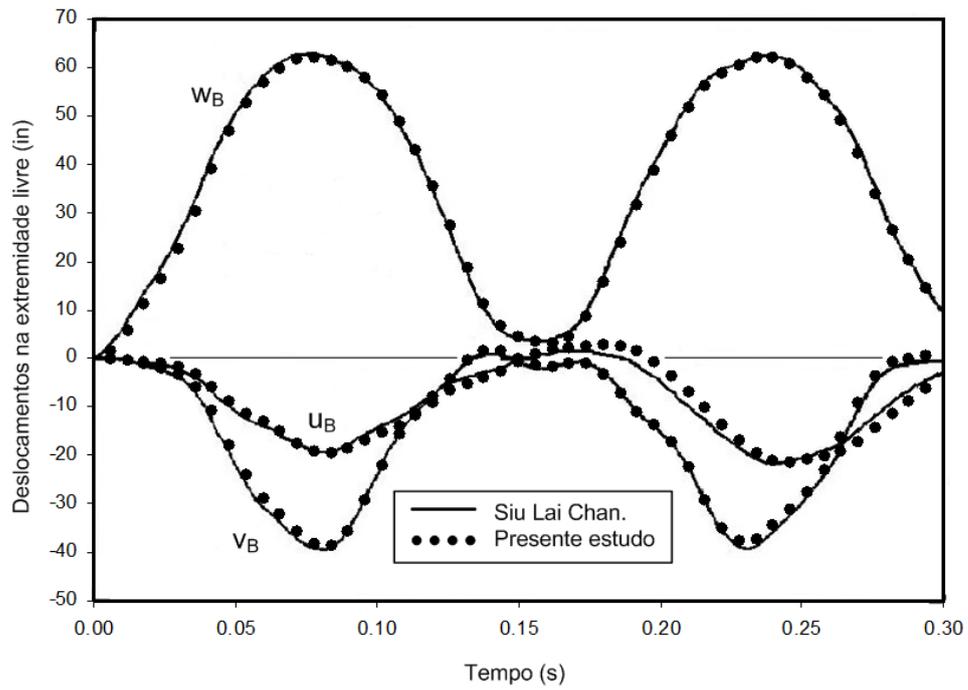


Figura 5.48 – Resposta dinâmica da viga curva em balanço submetida a uma carga na ponta de 300 lb.

### 5.2.5.

#### **Riser flexível submerso submetido à ação do movimento de navio e de ondas**

Neste exemplo uma extremidade do *riser* flexível está fixa a uma torre submarina localizada a 150 m abaixo do nível do mar e a outra está conectada a um navio deslocado horizontalmente em 150 m (ver Fig. 5.49). Considera-se que o *riser* está cheio com água de mar e em ambas as extremidades é fixado por rotulas, não havendo carregamento de correnteza. O comprimento de 350 m foi discretizado empregando-se um modelo com 70 elementos igualmente espaçados. O objetivo deste exemplo é verificar a aplicabilidade do modelo de pórtico desenvolvido, para a análise de *risers* submetidos a carregamentos hidrodinâmicos e deslocamentos prescritos devidos à embarcação. Os resultados numéricos obtidos neste exemplo são comparados com os obtidos por Yadzdchi e Crisfield [96]. Os dados da geometria e propriedades físicas do *riser*, coeficientes hidrodinâmicos e outros parâmetros usados na análise estão fornecidos na Tabela 5.3. Assume-se nesta análise que o material do *riser* tem um comportamento elástico linear. Pelos dados da Tabela 5.3, observa-se que a magnitude da rigidez axial é cinco ordens de magnitude maior que a rigidez à flexão e que o fator de flexibilidade adimensional é muito baixo. Desta forma espera-se, que o *riser* flexível tenha um comportamento estrutural equivalente ao de um cabo.

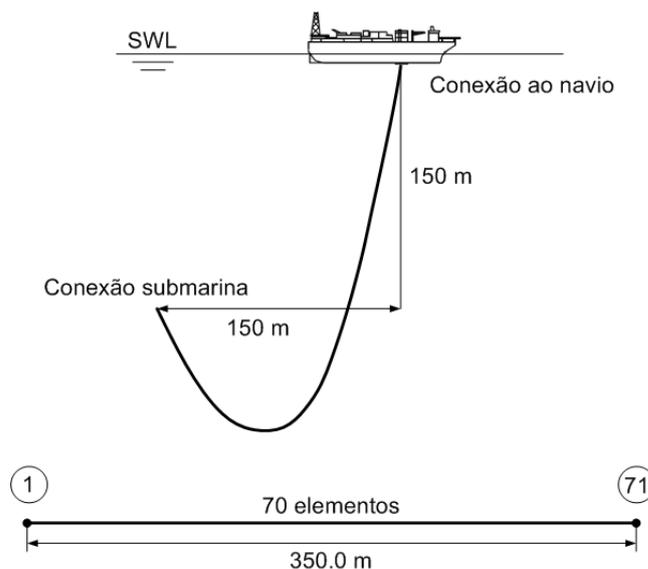


Figura 5.49 – Instalação do *riser* em catenária simples e discretização do modelo de elementos finitos.

Tabela 5.3 – Geometria, propriedades físicas e coeficientes hidrodinâmicos para o problema analisado.

Diâmetro externo do <i>riser</i>	0.26 m
Diâmetro interno do <i>riser</i>	0.20 m
Rigidez à flexão do <i>riser</i> , $EI$	$20.96 \times 10^3 \text{ N m}^2$
Rigidez axial do <i>riser</i> , $EA$	$15.38 \times 10^8 \text{ N}$
Massa específica da água do mar, $\rho_w$	$1025.0 \text{ kg/m}^3$
Massa por unidade de comprimento do <i>riser</i>	59.34 kg/m
Coefficiente de arrasto normal, $C_{DN}$	1.0
Coefficiente de arrasto tangencial, $C_{Dt}$	0.0
Coefficiente de inercia, $C_m$	2.0
Passo de tempo, $\Delta t$	$5 \times 10^{-2} \text{ s}$
Comprimento de cada elemento, $L_e$	5.0 m
Fator de flexibilidade, $(EI)/L_e^2(EA)$	$5.45 \times 10^{-7}$
Altura da onda, $h$	20.0 m
Período da onda, $T$	16.0 s
Movimento de "Surge" da embarcação	
Amplitude	2.01 m
Período	14.0 s

Inicialmente realizou-se a análise estática do *riser*, que foi implementada em duas etapas; na primeira, o *riser* inicialmente em posição horizontal e localizado 150 m abaixo do nível do mar é submetido às cargas de peso próprio e do empuxo. A linha tracejada na Fig. 5.50 ilustra esta configuração. Na segunda etapa, o ponto da extremidade direita do *riser* é conectado a um navio localizado 150 m à direita, longe da torre submarina. Este movimento é aplicado incrementalmente e configurações deformadas para instalações intermediárias são mostradas na Fig. 5.50. As reações horizontais e verticais obtidas nos pontos de suporte estão listadas na Tabela 5.4 e são comparados com os valores obtidos por Yazdchi e Crisfield [96] que utilizou um modelo de vigas e os obtidos por McNamara et al. [49] com a teoria de cabos, verificando-se uma boa concordância nos resultados.

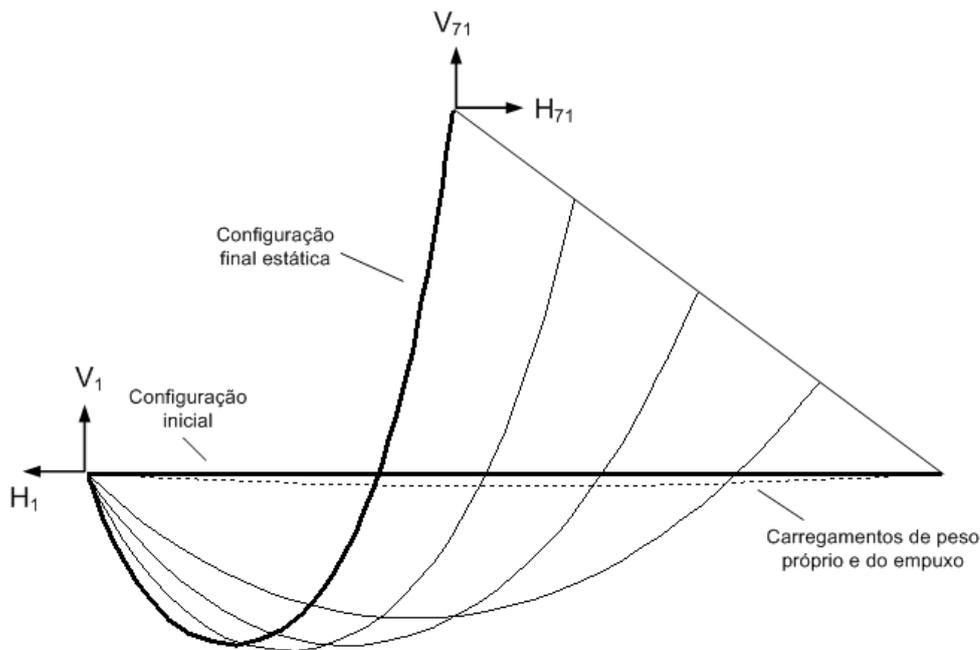


Figura 5.50 – Processo de instalação do riser.

Tabela 5.4 – Reações nos suportes no riser em catenária.

Componentes das forças de reação	$V_1$ (kN)	$V_{71}$ (kN)	$H_1$ (kN)	$H_{71}$ (kN)
Yazdchi & Crisfield	35.86	91.61	12.04	12.04
Mc Namara et al.	35.77	91.51	12.02	12.02
Presente estudo	35.83	91.64	12.03	12.03

O diagrama do momento fletor ao longo do riser, na configuração final (linha sólida em negrito na Fig. 5.50), é ilustrado na Fig. 5.51 pela linha pontilhada, observando-se uma boa concordância com os resultados obtidos na referencia [96].

Em seguida considerou-se a análise dinâmica sob a ação de forças devido ao movimento do navio e a atividade da onda. A análise dinâmica foi desenvolvida para dois diferentes casos:

a) No primeiro caso, somente o movimento de “surge” do navio foi considerado, a fim de investigar-se os efeitos não-lineares da resposta do riser em comparação com aqueles obtidos por Yazdchi e Crisfield [96]. O topo do riser foi excitado com uma amplitude de “surge” de 2.01 m e período 14.0 s. Os resultados desta análise estão representados pelos círculos cheios nas Figs. 5.52 e 5.53 para as reações verticais nos nós 1 e 71, respectivamente. Observa-se que a reação

vertical obtida para o nó 1 varia entre 35.73 e 35.94 kN; já nos resultados obtidos na referencia [96] esta reação varia entre 35.64 e 36.07 kN; uma muito boa concordância no período e no valor médio da função harmônica é observada. No entanto as amplitudes obtidas diferem em 51% daquelas obtidas em [96]. Neste nó são também observados harmônicos de alta ordem. No caso da reação vertical no nó 71 observa-se uma excelente concordância tanto na amplitude como no período entre os resultados numéricos obtido no presente estudo com os obtidos em [96].

b) No segundo caso, além do movimento de “surge” do navio, uma onda harmônica com período de 16 s e amplitude de 20.0 m foi aplicada. Os resultados para este caso são mostrados nas Figs. 5.52 e 5.53 com círculos vazados. Observa-se uma boa concordância com os resultados obtidos em [96].

Nas análises dinâmicas as equações de movimento foram integrados no intervalo de 300s, utilizando-se como parâmetro de incremento temporal  $\Delta t=0.05s$  e critério de convergência de 0.001 para o erro nos deslocamentos e 0.01 para as forças. Uma média de 3 e 4 iterações por passo de tempo foram necessárias para atingir a convergência para as análises considerando somente o movimento do navio e considerando-se o efeito do navio e onda, respectivamente. Na análise dinâmica o método de integração temporal utilizado foi o HHT juntamente com a técnica iterativa de Newton-Raphson, para a convergência da solução.

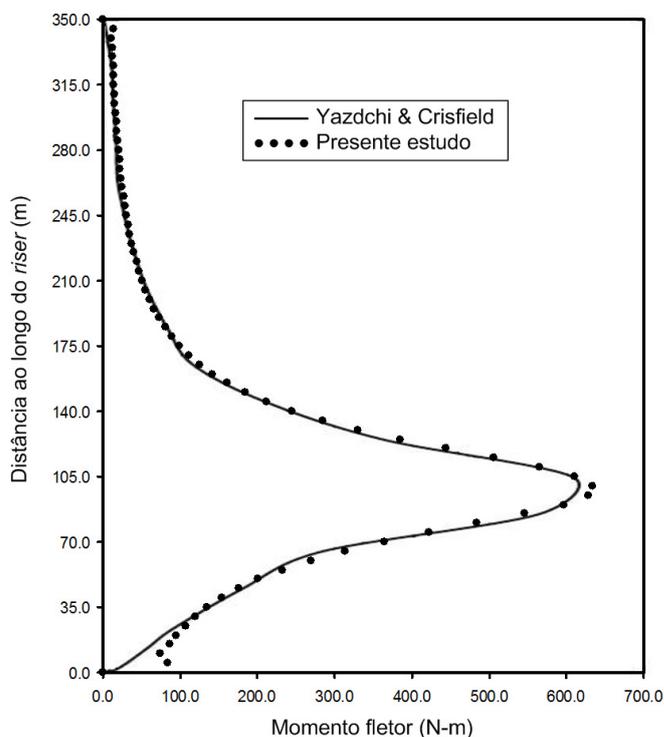


Figura 5.51 – Diagrama de momento fletor estático do riser em repouso.

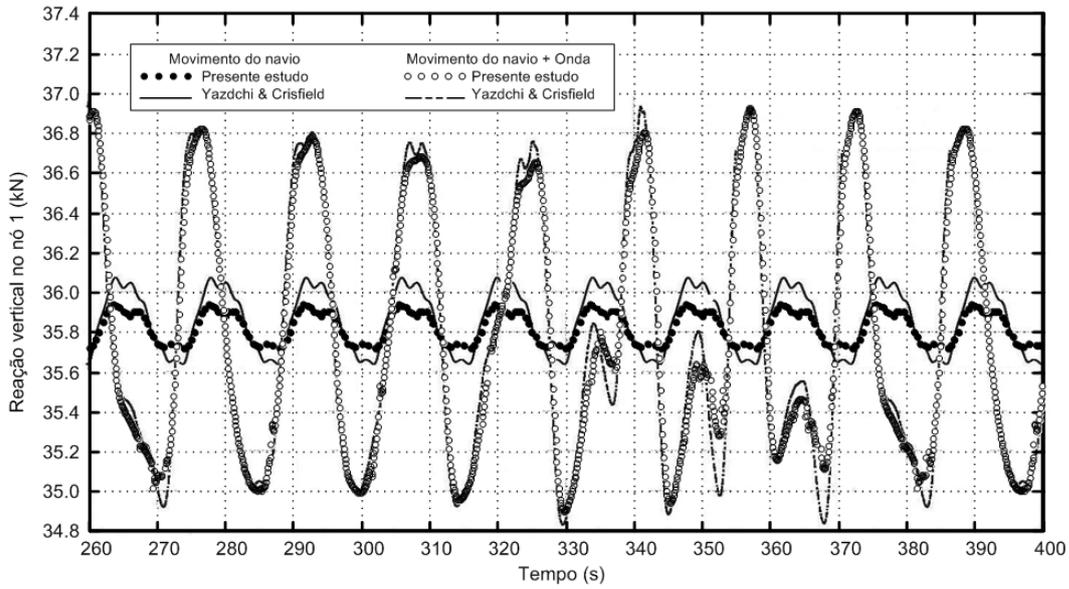


Figura 5.52 – Reação vertical no nó 1 (conectado à torre submarina).

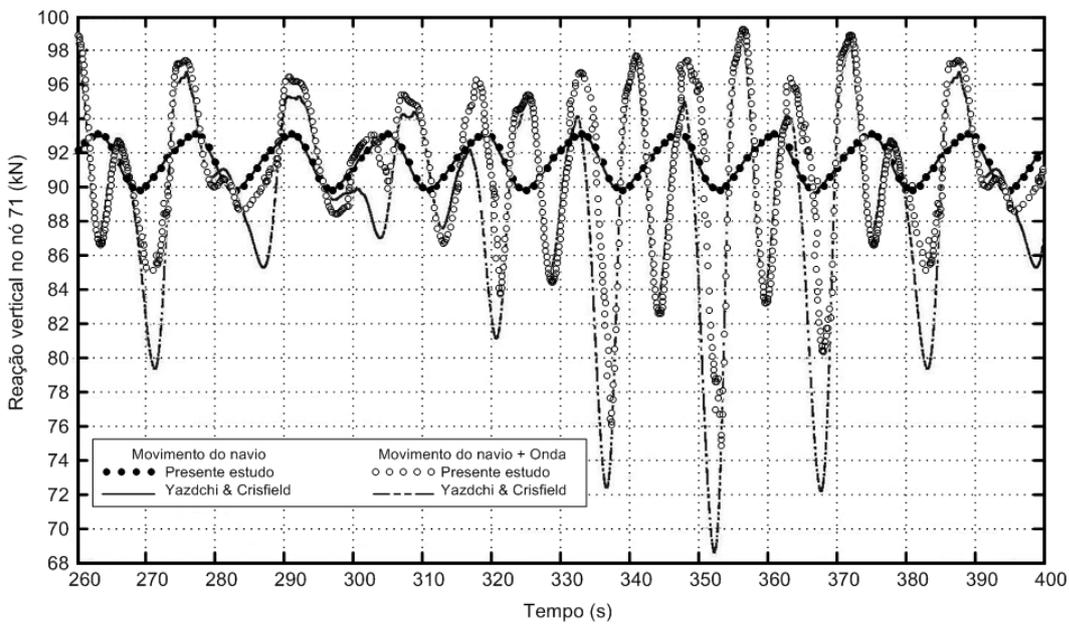


Figura 5.53 – Reação vertical no nó 71 (conectado ao navio).

### 5.2.6.

#### **Riser rígido em catenária simples submetido a carregamento de correnteza e movimento prescrito no topo**

Neste exemplo, é analisado o comportamento dinâmico da instalação de um *riser* rígido em catenária simples. Neste sistema os efeitos dinâmicos induzem à compressão nas proximidades do ponto de contato com o fundo, TDP (*touch down point*), podendo ocorrer possíveis modos de falha devido às altas tensões geradas pela flexão ou compressão no TDP.

O *riser* rígido é constituído por uma catenária com 4053 m de comprimento, cujo extremo superior está conectado, 10 m abaixo do nível do mar, a uma unidade flutuante sobre uma lâmina d'água de 2140 m; o outro extremo está ancorado no fundo marinho como mostra a Fig. 5.54. A conexão com a unidade flutuante forma um ângulo zenital de  $10^\circ$  e durante a análise, está livre para girar em todas as direções. O plano da catenária está contido num plano que faz um ângulo de  $20^\circ$  com o plano XZ-global. No presente estudo utilizou-se como configuração deformada inicial a catenária simples com rigidez apenas na direção axial e submetida aos carregamentos de peso próprio e empuxo. Esta solução foi obtida com o programa ANFLEX através da integração da equação diferencial de equilíbrio de um cabo elástico submetido às condições de contorno do problema em questão. A partir desta configuração inicial mostrada na Fig. 5.54 são aplicados os carregamentos estáticos e dinâmicos no *riser*. Para a modelagem do fundo marinho, utilizam-se molas não-lineares como descrito no capítulo 3, que permitem o livre movimento na direção vertical para cima e restringem o movimento contrário ao fundo.

A estrutura do *riser* rígido está submetida aos seguintes efeitos: correnteza, peso próprio, empuxo, ação dos flutuadores, *offset* estático do flutuante e do movimento da unidade flutuante junto ao topo devido à ação das ondas. As características físicas e geométricas do *riser* estão apresentadas na Tabela 5.5.

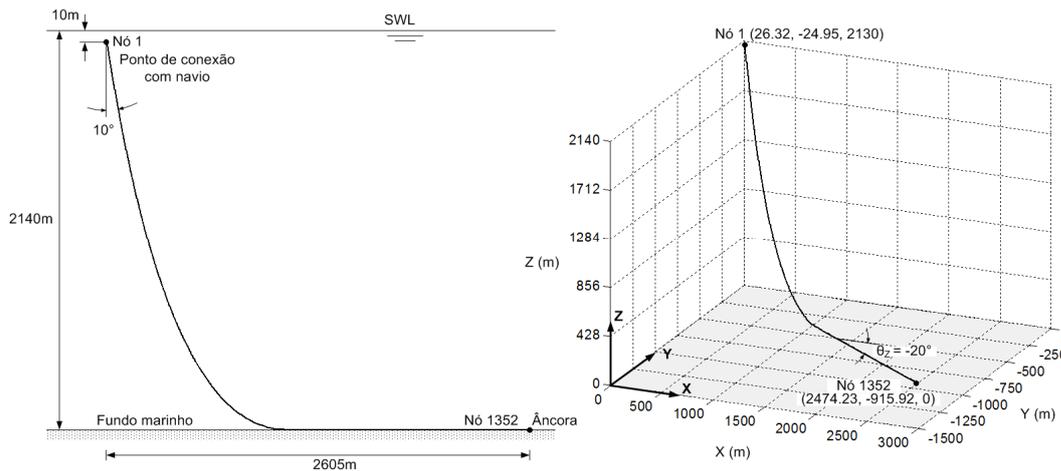


Figura 5.54 – Riser rígido em catenária.

Tabela 5.5 – Características físicas e geométricas do riser e dos flutuadores.

Comprimento do riser, $L$	4053 m
Diâmetro externo do riser, $D_o$	0.219 m
Diâmetro interno do riser, $D_i$	0.175 m
Coefficiente de inércia de Morison, $C_m$	2.0
Coefficiente de arrasto de Morison, $C_D$	1.0
Peso linear dos flutuadores	0.453 kN/m
Empuxo dos flutuadores	0.628 kN/m
Peso específico do fluido interno	6 kN/m <sup>3</sup>
Peso específico da água do mar	10.055 kN/m <sup>3</sup>
<b>Material Homogêneo (Aço)</b>	
Módulo de elasticidade	$E = 207 \text{ Gpa}$
Peso específico	$\gamma = 77 \text{ kN/m}^3$
<b>MGF (Ni<sub>3</sub>Al - TiC)</b>	
Módulo de elasticidade	$E = 420.7(r/r_o)^{3.126} \text{ Gpa}$
Peso específico	$\gamma = 49.2(r/r_o)^{-1.85} \text{ kN/m}^3$

A malha de elementos finitos adotada é formada por 1351 elementos com 3m de comprimento cada. Numa primeira análise considera-se que o material do riser é um aço de densidade 77 kN/m<sup>3</sup> e módulo de elasticidade 207 GPa. A análise estática foi realizada em 21 passos de carga. No primeiro passo foram considerados os carregamentos do peso próprio, do empuxo e da ação dos flutuadores enquanto nos 20 passos seguintes foram aplicados os movimentos de excursão (*offset*) no ponto de conexão devido ao flutuante juntamente com o carregamento devido à correnteza cujos parâmetros característicos estão

apresentados na Tabela 5.6. Os ângulos de ataque para a correnteza definida na Tabela 5.6 são apresentados em relação ao eixo X-global, no sentido anti-horário. A aplicação das cargas, na análise estática, segue o esquema indicado na Fig. 5.55. Em cada passo de carregamento, para a convergência da solução no processo iterativo de Newton-Rapshon considerou-se uma tolerância para o erro relativo no cálculo dos deslocamentos igual a  $10^{-3}$ . Esta convergência foi alcançada após um máximo de 37 iterações de equilíbrio para todos os passos. As configurações da estrutura do *riser* correspondente às deformadas ao início e ao término da análise estática estão mostradas na Fig. 5.56.

Tabela 5.6 – Carregamentos de correnteza e do *offset* estático do *riser* rígido.

Perfil da correnteza		
Profundidade (m)	Velocidade (m/s)	$\theta_z$ (deg)
0.00	1.570	180.0
1.00	1.570	180.0
4.50	1.530	180.0
40.00	1.390	180.0
340.00	0.410	180.0
740.00	0.290	270.0
1140.00	0.290	225.0
1540.00	0.290	225.0
1940.00	0.380	225.0
2140.00	0.000	225.0

**Offset estático (m)**

$U_x$	-138.397
$U_y$	57.326

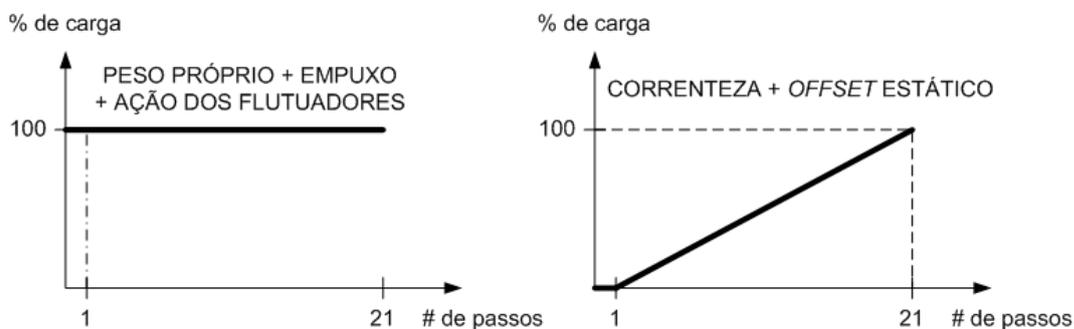


Figura 5.55 – Carregamento aplicado na análise estática.

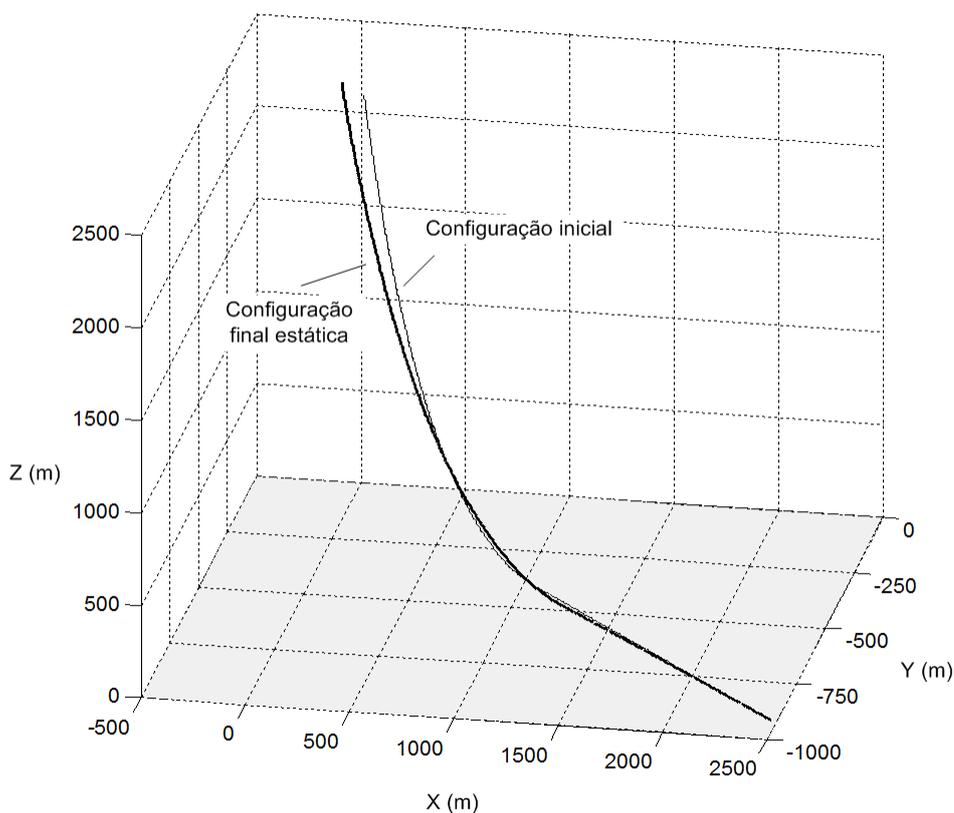


Figura 5.56 – Configurações estáticas do *riser*.

Para a análise dinâmica, aplicou-se, além dos carregamentos já descritos, também um movimento cíclico prescrito no ponto de conexão com a unidade flutuante com amplitudes, fases e períodos indicados na Tabela 5.7. A amplitude do movimento prescrito no topo do *riser* foi gradualmente aumentada, segundo uma função senoidal, correspondente a 2 períodos de carregamento, isto é, 26.484s. Este procedimento foi utilizado para garantir um início de movimento suave, que minimize as vibrações axiais transientes. Utilizou-se para esta análise, coeficiente de inércia  $C_m=2$ , parâmetro de incremento temporal 0.05s, intervalo de integração de 0 – 70s, critério de convergência de 0.001 para os deslocamentos e 0.01 para as forças. Uma média de 4 iterações por passo de tempo foram necessárias para atingir a convergência. O método de integração utilizado foi o HHT, já descrito em exemplos anteriores.

Tabela 5.7 - Movimento imposto ao ponto de conexão com o navio.

Movimento	Amplitude (m, deg)	Fase (deg)	Período (s)
Surge ( $U_x$ )	1.025	56.886	13.242
Sway ( $U_y$ )	3.054	93.042	13.242
Heave ( $U_z$ )	10.794	329.870	13.242
Roll ( $\theta_x$ )	7.678	302.750	13.242
Pitch ( $\theta_y$ )	1.251	230.010	13.242
Yaw ( $\theta_z$ )	1.191	176.240	13.242

Observa-se durante a análise dinâmica uma redução periódica dos raios de curvaturas requerendo a construção de envoltórias nos intervalos de tempo entre 30-37s, 43-50s e 57-63s, mostradas nas Figuras 5.57a), b) e c). Nestas são apresentados os valores mínimos dos raios de curvatura avaliados ao longo do *riser* e medidos ao longo do comprimento, a partir do ponto de ancoramento no fundo marinho. Observa-se destes resultados que o trecho do *riser* compreendido entre os nós 853 e 953 – indicada pela região de cor cinza nas figuras – apresenta os menores raios de curvaturas na linha central do *riser* e, portanto, os maiores momentos fletores. Com o objetivo de minimizar estes efeitos, este trecho, correspondente a 363 m, entre os nós 853 e 953, foi integralmente substituído por um *riser* de MGF do tipo Ni<sub>3</sub>Al-TiC, com as fases de Ni<sub>3</sub>Al e TiC nos raios interno e externo, respectivamente. As leis de potência para o módulo de elasticidade e peso específico do MGF estão indicadas na Tabela 5.5. Somente foi colocado MGF nesta região do *riser* por estar próximo ao TDP e ser particularmente adversa, onde, além do *riser* apresentar menores raios de curvatura, verifica-se a alternância de esforços axiais, variando de tração a compressão efetiva (ver Fig. 5.58). Demonstra-se mais adiante que este material pode ser uma alternativa interessante a ser estudada a fim de diminuir os esforços nesta região. Considerando-se o novo *riser* composto, realizou-se a análise estática e dinâmica, seguindo-se o mesmo procedimento descrito anteriormente para o homogêneo (inteiramente de aço). Observa-se após as análises nas Figuras 5.57a), b) e c) que os raios de curvaturas (curvas de cor cinza) aumentaram diminuindo desta forma os esforços devidos à flexão. A Tabela 5.8 apresenta os raios de curvatura mínimos obtidos nos intervalos de tempo entre 30-37s, 43-50s e 57-63s, observa-se que para o *riser* com MGF estes raios de curvatura

aumentaram em relação ao *riser* homogêneo em 35%, 35% e 17%, respectivamente.

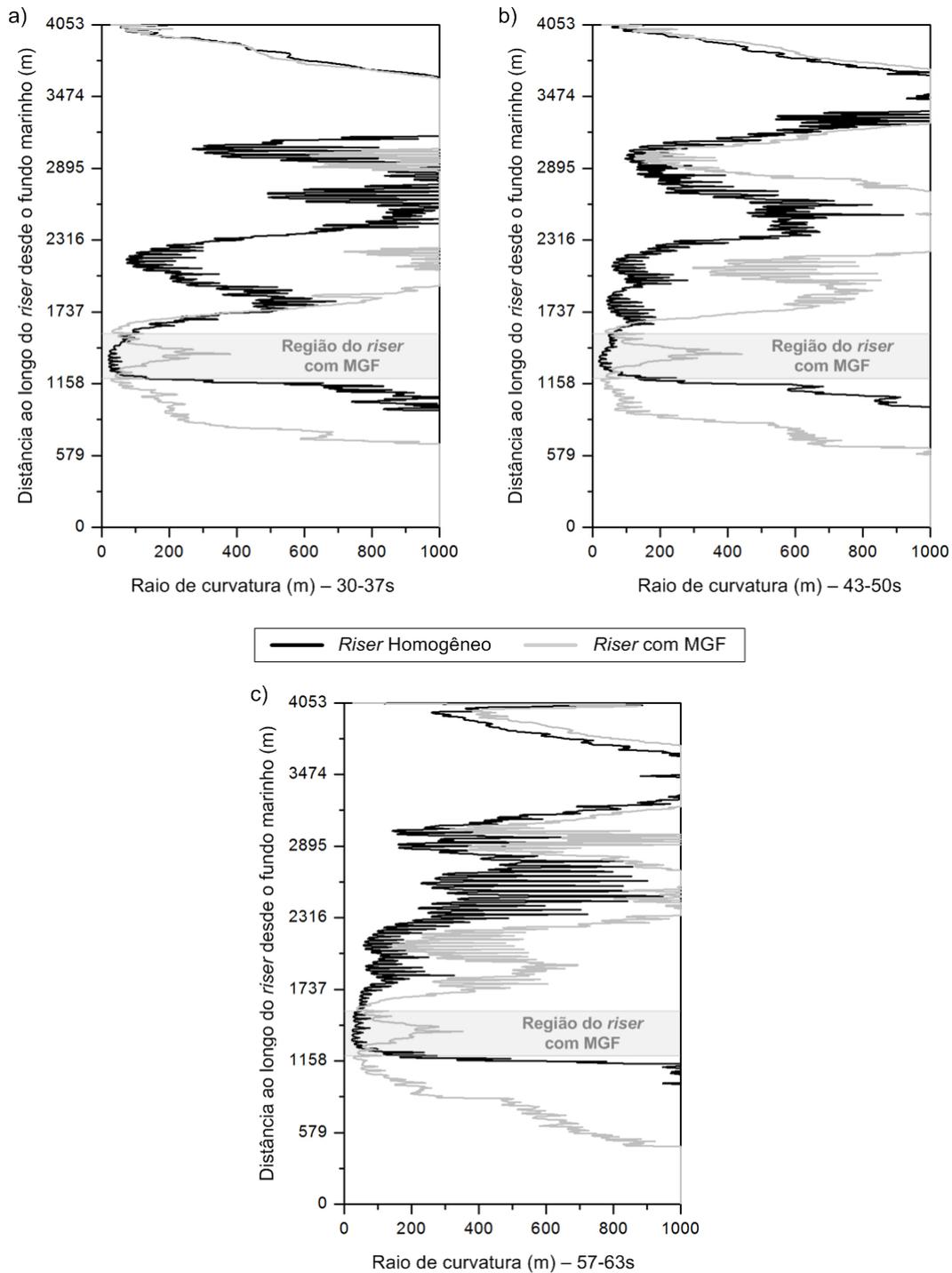
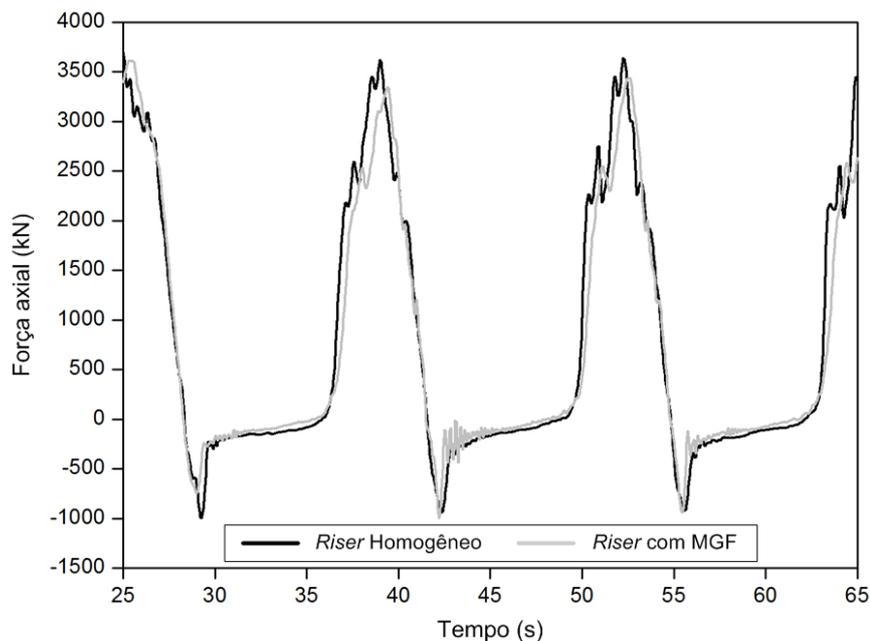


Figura 5.57 – Envoltória dos raios de curvaturas ao longo do *riser* para 3 intervalos de tempo: 30-37s, 43-50s e 57-63s.

Tabela 5.8 – Raios de curvatura mínimos obtidos na análise do *riser*.

Intervalos de tempo	30-37s	43-50s	57-63s
<i>Riser</i> Homogêneo	19.62m	17.97m	22.23m
<i>Riser</i> com MGF	26.44m (+35%)	24.33m (+35%)	25.91m (+17%)

Figura 5.58 – Força axial no sistema local co-rotacionado para o elemento 890 (região do *riser* próxima ao TDP).

As envoltórias para os raios de curvaturas, apresentados nas figuras 5.57a), b) e c), para o *riser* homogêneo apresentou raios de curvaturas mínimos nos nós 891, 906 e 909 nos intervalos de tempo entre 30-37s, 43-50s e 57-63s, respectivamente. Para estes nós são mostradas nas Figuras 5.59, 5.60 e 5.61 os gráficos dos momentos fletores com respeito ao eixo Z-global (fora do plano da catenária), observa-se nestes gráficos uma brusca redução do momento fletor para o *riser* com MGF e, portanto um melhor desempenho que o *riser* homogêneo na região próxima ao TDP. A partir dos gráficos de momentos fletores são selecionados os instantes de tempo de 33.25s, 47.15s e 59.60s onde o *riser* homogêneo apresenta uma configuração deformada mais acentuada. As Figuras 5.62, 5.63 e 5.64 mostram as configurações deformadas para estes instantes de tempo correspondentes, tanto para o *riser* homogêneo como o *riser* com MGF, observando-se que no caso do *riser* com MGF o movimento do *riser* na região

próxima ao TDP limita-se ao plano da catenária e, portanto ocasionando uma diminuição das tensões nesta região. Para concluir é importante destacar que o uso dos MGF em *risers* de produção além de melhorar o comportamento dinâmico como apresentado neste exemplo, pode atender outros desafios tecnológicos como no caso do pré-sal onde se requerem materiais especiais para resistir às altas pressões e corrosividade associada ao CO<sub>2</sub> e H<sub>2</sub>S produzido assim como conservar a temperatura do óleo, isto devido a que os MGF como mostrado no capítulo 4 possuem a combinação das características de isolante térmico e de corrosão da cerâmica com a resistência mecânica e dureza dos metais, sendo portanto necessário estudos complementários que verifiquem a viabilidade dos MGF de serem aplicados em tais condições severas.

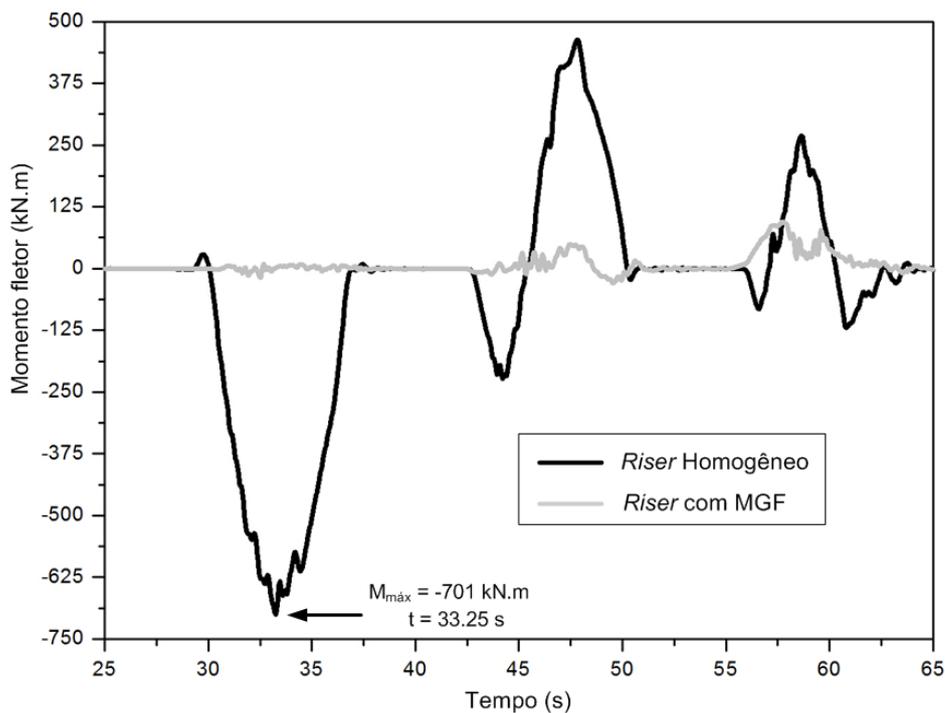


Figura 5.59 – Momento fletor em relação ao eixo Z-global para o nó 891.

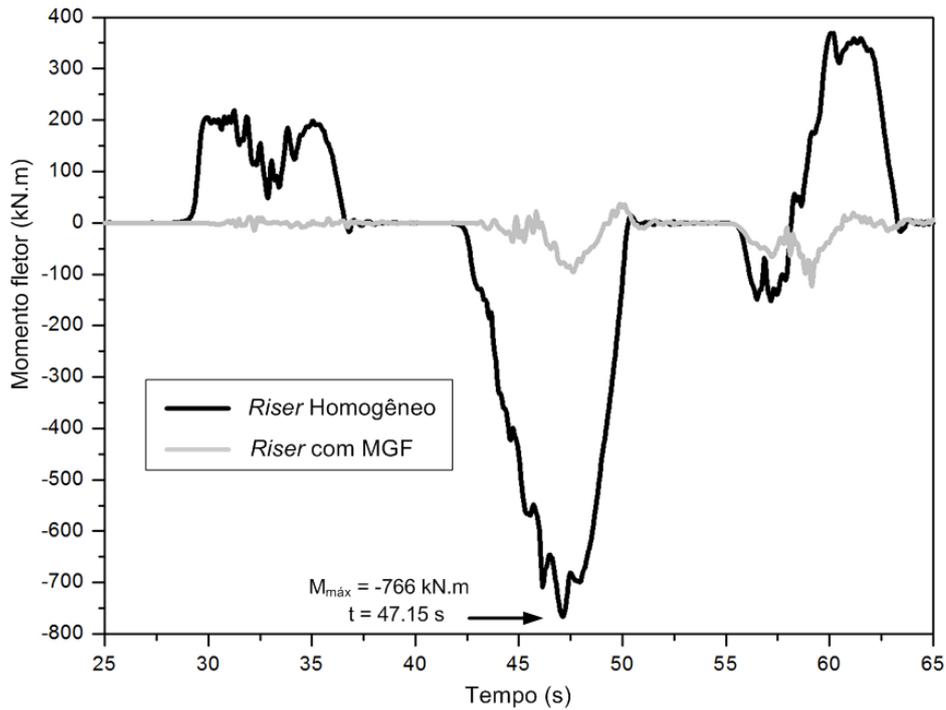


Figura 5.60 – Momento fletor em relação ao eixo Z-global para o nó 906.

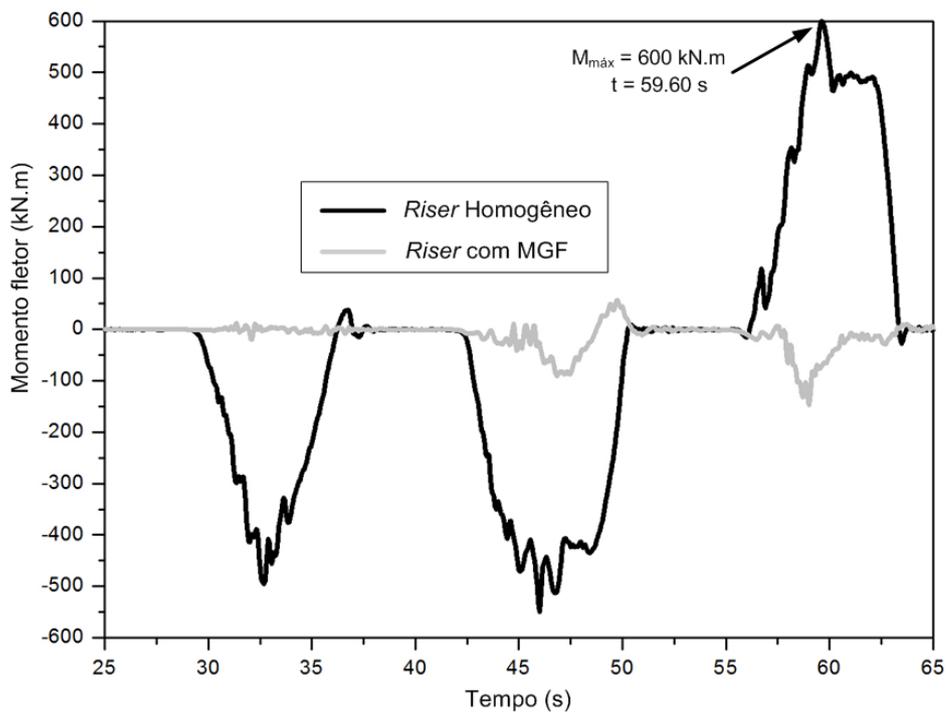


Figura 5.61 – Momento fletor em relação ao eixo Z-global para o nó 909.

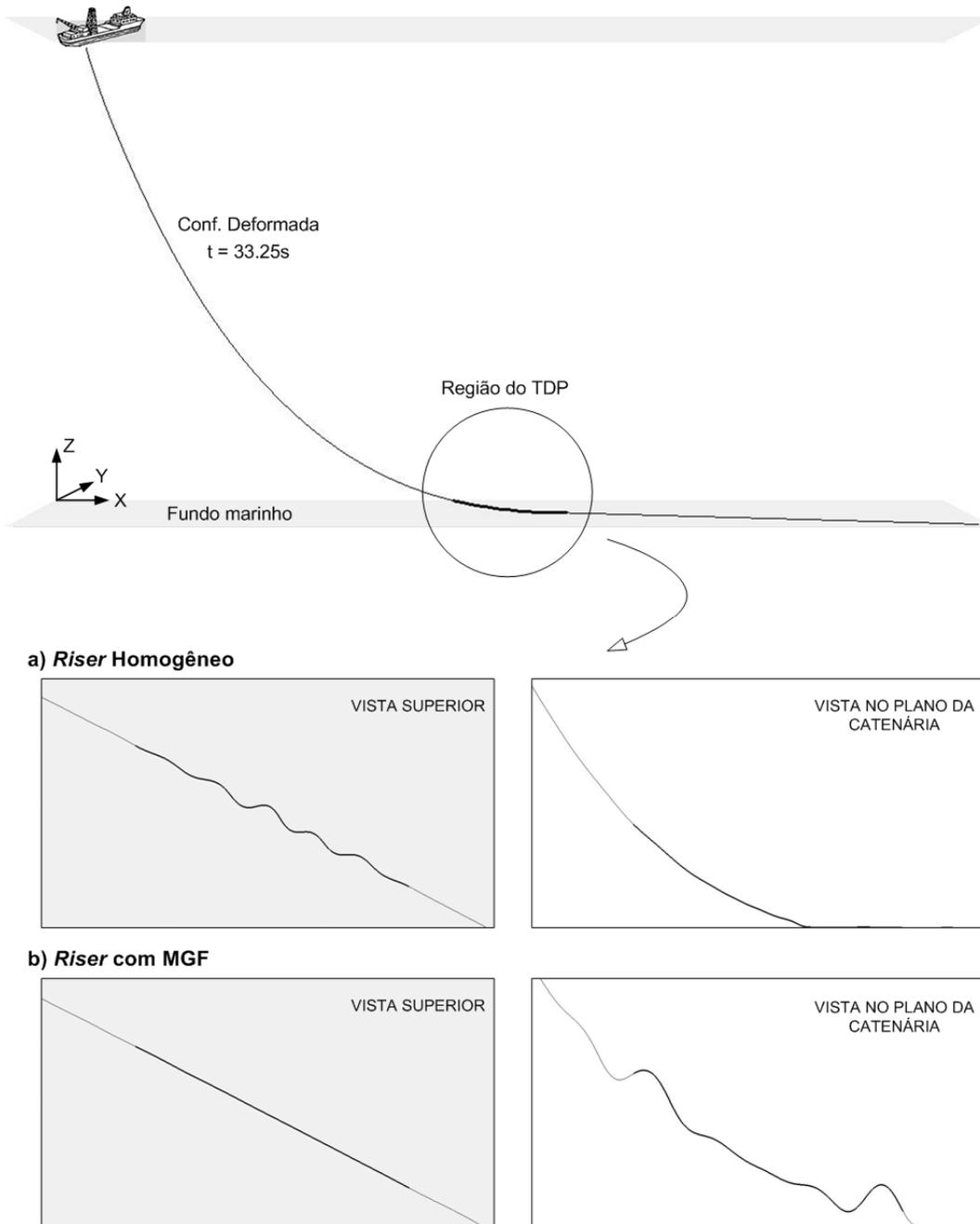


Figura 5.62 – Configurações deformadas para o *riser* com material homogêneo e com MGF no instante  $t = 33.25s$  (Gráficos sem escala e com a região do TDP limitada por  $X \in [900, 1450]m$ ,  $Y \in [-550, -350]m$ ,  $Z \in [0, 100]m$ ).

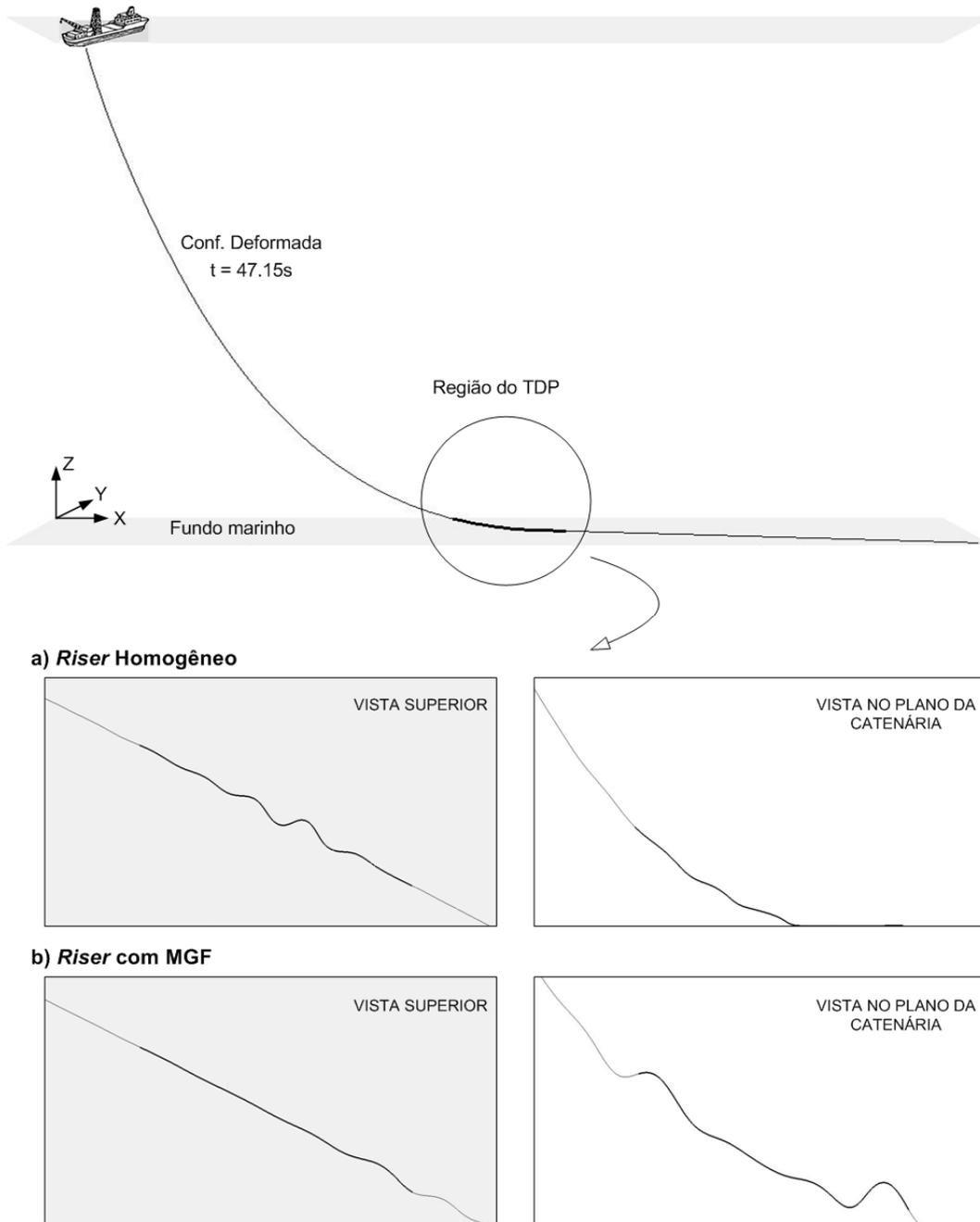


Figura 5.63 – Configurações deformadas para o *riser* com material homogêneo e com MGF no instante  $t = 47.15s$  (Gráficos sem escala e com a região do TDP limitada por  $X \in [900, 1450]m$ ,  $Y \in [-550, -350]m$ ,  $Z \in [0, 100]m$ ).

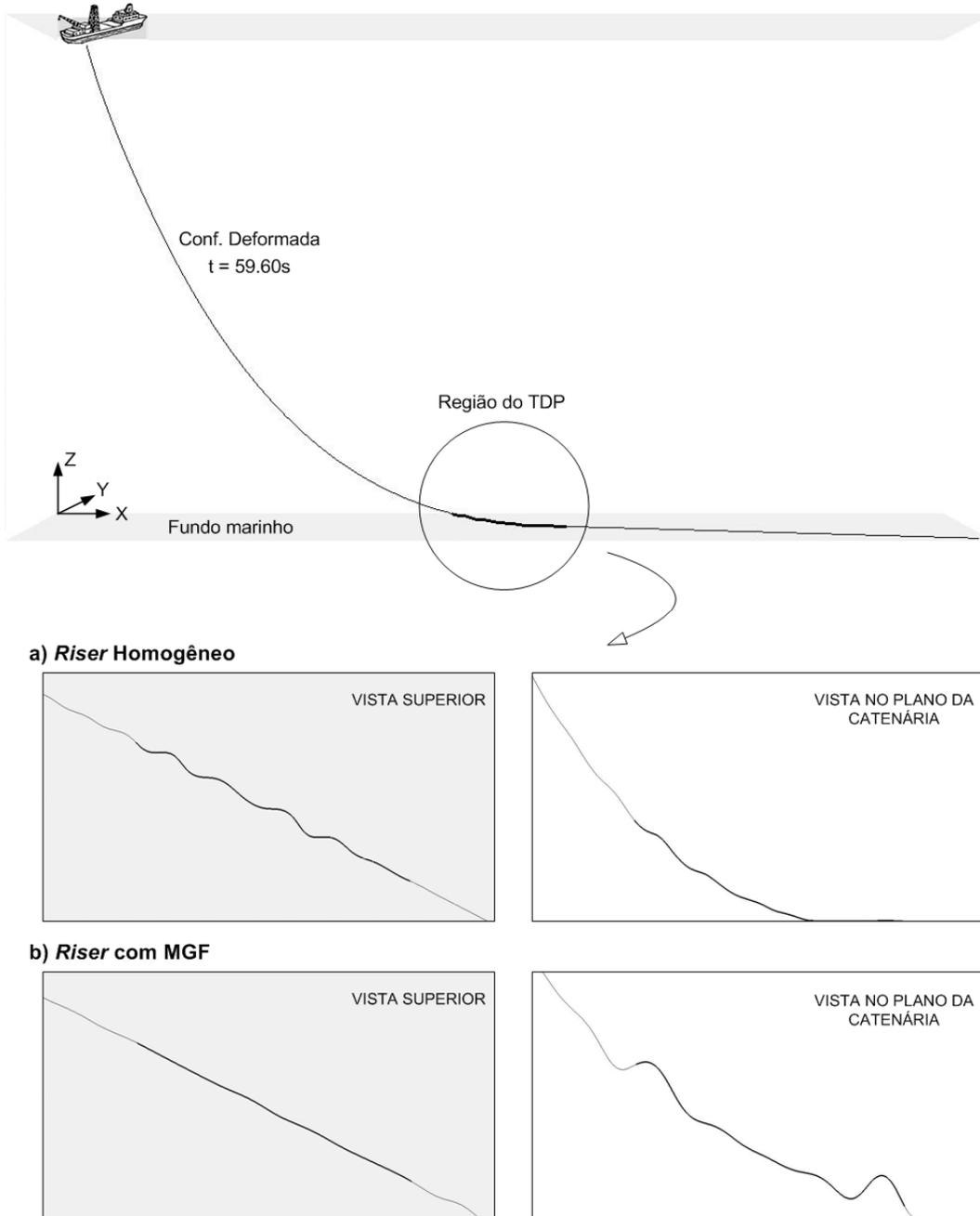


Figura 5.64 – Configurações deformadas para o *riser* com material homogêneo e com MGF no instante  $t = 59.60s$  (Gráficos sem escala e com a região do TDP limitada por  $X \in [900, 1450]m$ ,  $Y \in [-550, -350]m$ ,  $Z \in [0, 100]m$ ).