

### 3 Formulação do Problema da Dinâmica de *Risers* Empregando-se o Método dos Elementos Finitos

#### 3.1. Fenomenologia do Comportamento Estrutural de *Risers*

O comportamento não linear de estruturas pode ser de origem geométrica, física ou de condição de vinculação. A não-linearidade física resulta do comportamento do material da estrutura que, quando submetido a tensões crescentes passa a plastificar, adquirindo dessa forma tensões residuais após descarregado.

Pela sua geometria esbelta *risers* têm o seu comportamento estrutural similar ao de vigas de seção tubular cujos deslocamentos ultrapassam em várias magnitudes o diâmetro da seção reta. Considerando-se o movimento de *risers* cuja deformação mais significativa –longitudinal– é ainda pequena, restrita ao comportamento linear do material, este resulta em grandes deslocamentos. Neste caso a não-linearidade geométrica é resultado da interação axial-transversal, a qual é introduzida na teoria da elasticidade através das equações de equilíbrio, especificamente pelos termos de mais alta ordem –segunda ou acima– das relações de compatibilidade geométrica [15]. Estes efeitos são mais pronunciados em sistemas estruturais do tipo linha de ancoragem e *risers*, fazendo-se necessário considerar a imposição das condições de equilíbrio na configuração deformada. Um segundo efeito importante de não-linearidade geométrica é o da instabilidade por compressão (flambagem elástica).

A análise de estruturas marítimas está invariavelmente associada a considerações dos efeitos de ondas que induzem na estrutura cargas variáveis no tempo, de caráter periódico. A resposta de uma estrutura a um dado carregamento periódico depende de suas características intrínsecas, que podem ser traduzidas por seus modos e frequências naturais de vibração (desde que a resposta linear seja considerada). Um sistema estrutural apresenta resposta dinâmica significativa quando o carregamento se dá a uma frequência ou componente harmônico

próximo a uma de suas frequências naturais e em uma distribuição espacial não ortogonal ao modo natural correspondente. No caso específico de linhas marítimas, devido ao comportamento não-linear, os modos e as frequências naturais do sistema estrutural são modificados, à medida que este responde ao carregamento (modulados no tempo e no espaço).

Os carregamentos típicos aos quais está submetido um *riser* estão mostrados na Fig. 3.1, responsáveis pelo comportamento não-linear. Estes carregamentos são classificados em dois tipos: i) cargas estáticas, devidas a peso próprio, ao empuxo, à correnteza e ao movimento imposto correspondente ao *offset* estático da plataforma e, ii) cargas dinâmicas, devidas à onda, movimento imposto no topo devido ao efeito da onda no flutuante e forças induzidas por desprendimento de vórtices (não consideradas neste trabalho). Os efeitos da ação direta das ondas, juntamente com o movimento do flutuante, atuam mais próximos da extremidade superior da linha, podendo-se propagar até a extremidade inferior [56]. No presente trabalho as forças hidrodinâmicas devido às ondas e correnteza são avaliadas usando a forma modificada da equação de Morison [54]. Finalmente, o efeito da pressão do fluido estático interno e externo é incluído usando os conceitos de tração efetiva e peso.

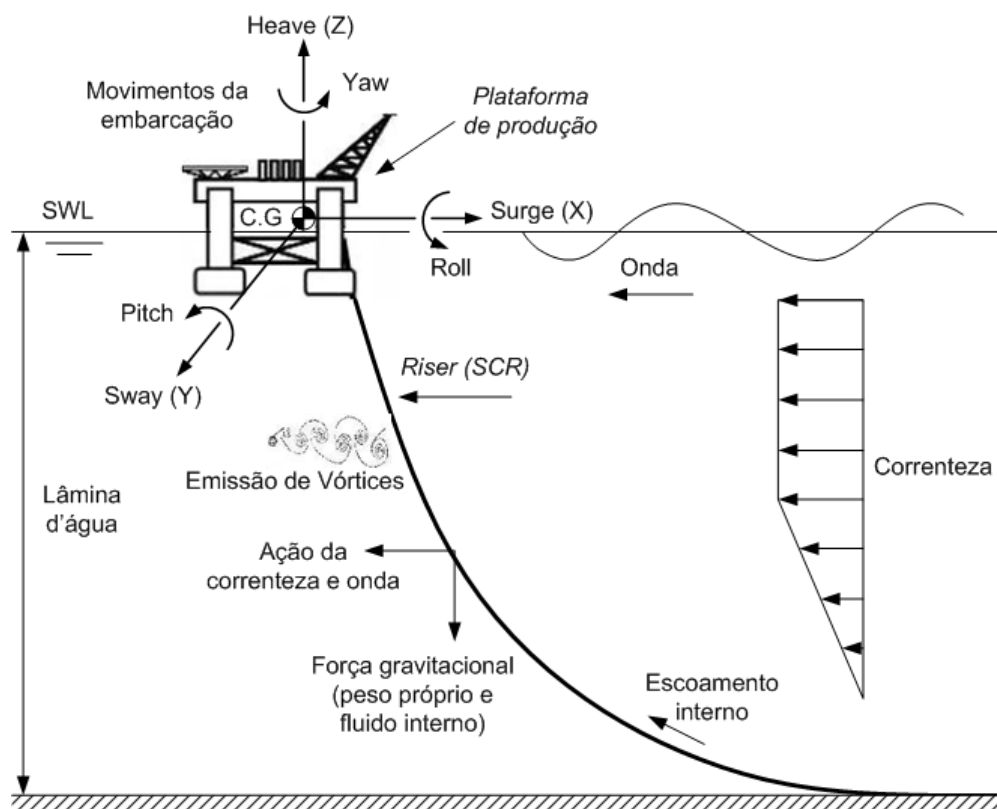


Figura 3.1 – Carregamentos sobre um *riser*.

### 3.2. Análise Incremental Não-Linear

Em uma análise não-linear o problema básico é determinar a configuração de equilíbrio de um corpo, resultante do carregamento aplicado. Na configuração de equilíbrio de uma estrutura, obtém-se um sistema de equações algébricas a ser representado na forma seguinte:

$${}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

onde o vetor dos esforços externos  ${}^t\mathbf{R}$  deve ser equilibrado pelo vetor dos esforços internos da estrutura  ${}^t\mathbf{F}$ . O índice superior  $t$  na eq.(3.1) indica o instante de tempo em que a condição de equilíbrio é verificada, no caso de análise dinâmica, ou o passo de carregamento, no caso de análise estática independente do tempo.

A análise incremental passo-a-passo consiste em obter-se a solução correspondente ao equilíbrio no instante  $t+\Delta t$  a partir da solução conhecida no instante  $t$ , na eq.(3.1). Assim:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

e, conhecida a solução no instante  $t$  pode-se escrever, combinando-se as duas equações acima,

$$\Delta\mathbf{R} = \Delta\mathbf{F} \quad (3.3)$$

onde  $\Delta\mathbf{R}$  é o vetor incremento das forças externas ocorrido entre os instantes  $t$  e  $t+\Delta t$  e  $\Delta\mathbf{F}$  é o vetor incremento das forças internas como reação ao incremento nas forças externas  $\Delta\mathbf{R}$ . O vetor  $\Delta\mathbf{F}$  pode ser aproximado utilizando-se a matriz de rigidez tangente  ${}^t\mathbf{K}$  correspondente às condições geométricas e do material da estrutura no instante  $t$ ; para um vetor incremento  $\mathbf{U}$ , tem-se

$$\Delta\mathbf{F} \cong {}^t\mathbf{K}\mathbf{U}$$

ou

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{F} \cong {}^t\mathbf{K}\mathbf{U} \quad (3.4)$$

Substituindo-se o resultado obtido em (3.2) na eq.(3.4) obtém-se:

$${}^t\mathbf{K}\mathbf{U} \cong {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} \quad (3.5)$$

que é a forma aproximada da condição de equilíbrio no instante  $t+\Delta t$  expressa em (3.2). A solução da eq.(3.5) fornece o vetor incremento  $\mathbf{U}$  e o vetor deslocamento total entre os instantes  $0$  e  $t+\Delta t$  pode ser, então, avaliado na forma incremental

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} \cong {}^t \mathbf{U} + \mathbf{U} \quad (3.6)$$

onde o índice inferior 0 indica a configuração indeformada, de referência do vetor deslocamento considerado. O vetor  $\mathbf{U}$  é uma aproximação do incremento de deslocamento correspondente ao vetor incremento do carregamento  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}$ . Devido à dependência da matriz tangente  $\mathbf{K}$  em relação ao vetor deslocamento  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ , para a obtenção deste vetor faz-se necessária a utilização de um processo iterativo de solução de forma que a equação de equilíbrio em (3.5) seja representada na iteração (i-1) para a obtenção do incremento dos deslocamentos em uma iteração (i)

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \mathbf{U}^{(i)} \cong {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}^{(i-1)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

conforme está mostrado na Fig. 3.2, para o problema reduzido com apenas um grau-de-liberdade

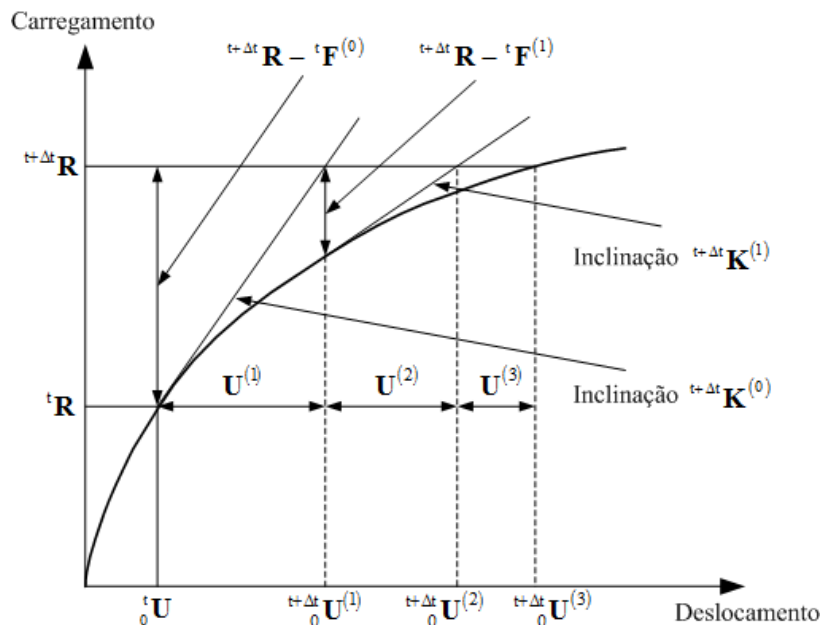


Figura 3.2 – Procedimento incremental iterativo para um grau de liberdade.

Para a primeira iteração ( $i = 1$ ) considera-se que o vetor de esforços internos no instante  $t+\Delta t$  é o mesmo vetor que no instante  $t$ :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(0)} = {}^t \mathbf{F} \quad (3.8)$$

e esta mesma consideração é feita quanto a aproximação da matriz de rigidez no instante  $t+\Delta t$ , isto é,

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(0)} = {}^t \mathbf{K} \quad (3.9)$$

O vetor incremento do deslocamento  $\mathbf{U}^{(i)}$ , obtido da equação (3.7), é acumulado a cada iteração para obter-se, em aproximações sucessivas, o vetor

deslocamento incremental total, correspondente ao intervalo compreendido entre os instantes  $t$  e  $t+\Delta t$ , i.e.,  $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}^{(i)}$  onde  $n$  é o número de iterações necessárias para convergência. A técnica iterativa descrita pelas equações (3.7) a (3.9) corresponde ao método de Newton-Raphson padrão.

### 3.3. Considerações Básicas da Formulação Lagrangeana Co-rotacionada

Na descrição linear do movimento de vigas, considera-se que os deslocamentos são pequenos relativamente ao comprimento e que o material é linearmente elástico. Além disso, as equações de equilíbrio são obtidas usando-se a posição indeformada como configuração de referência devido ao fato que a geometria da viga não muda com o carregamento. No entanto, na análise não-linear geométrica de estruturas, as mudanças geométricas são significativas e a geometria da viga deve ser atualizada durante o processo de deformação. Conseqüentemente, torna-se necessária a distinção entre as medidas de tensão e deformação e a descrição do movimento. Na descrição Lagrangeana, o movimento do corpo é referido à configuração inicial indeformada (formulação Lagrangeana Total) ou à última configuração conhecida (formulação Lagrangeana Atualizada). Por outro lado, na formulação Lagrangeana co-rotacionada, o movimento espacial do elemento é decomposto em movimento de corpo rígido e movimento de corpo deformável (o qual efetivamente causa as deformações). Esta última aproximação proporciona uma visão não-linear na qual as medidas lineares de deformação e tensão podem ser aplicadas localmente (deformações linearizadas e tensões de Cauchy), assim simplificando as equações Lagrangeanas governantes do problema, sem perda significativa da precisão.

A formulação Lagrangeana co-rotacionada é essencialmente idêntica à formulação Lagrangeana total, removidos os movimentos de corpo rígido, porque também emprega a configuração indeformada como referência [55]. Algumas simplificações na formulação Lagrangeana atualizada são utilizadas, já que o sistema de referência indeformado co-rotacional move-se espacialmente com o corpo deformável. São as seguintes características que a distingue das formulações Lagrangeanas tradicionais:

- a) As tensões e deformações acumuladas, referidas ao sistema de eixos co-rotacionados, não necessitam ser obtidas em incrementos e contabilizadas ao longo da análise, mas sim integralmente calculadas a cada passo de tempo.
- b) Para cada elemento na configuração final deformada, referida à configuração indeformada co-rotacionada, a adoção do tensor de deformação de Cauchy se faz de forma consistente e independente do tamanho do incremento de deslocamento porque as deformações admitidas são infinitesimais e o movimento de corpo rígido removido [55].

Estas características tornam a formulação incremental co-rotacionada menos suscetível ao tamanho do incremento de deslocamentos nodais da estrutura, o que possibilita que sejam empregados intervalos de tempos maiores na análise dinâmica [55].

### 3.4. Sistemas de Referência na Formulação do Elemento de Pórtico Co-rotacionado

Na formulação Lagrangeana co-rotacionada as grandezas estáticas e cinemáticas (forças, deslocamentos, velocidades e acelerações) do corpo considerado são referidas a uma configuração co-rotacionada  $\mathcal{C}_C$ , obtida de transformações de movimento de corpo rígido (associadas à translação e rotação da configuração indeformada  $\mathcal{C}_0$ ), próxima da configuração deformada  $\mathcal{C}_D$ , como é mostrada na Fig. 3.3. Nesta figura pode-se distinguir três configurações do elemento:

- Configuração inicial  $\mathcal{C}_0$ : é representada pelo elemento em sua posição inicial, indeformada;
- Configuração co-rotacionada  $\mathcal{C}_C$ : é representada por uma configuração virtual, correspondente a do elemento livre de deformações e submetido aos movimentos de corpo rígido, relativamente à configuração inicial  $\mathcal{C}_0$ ;
- Configuração deformada  $\mathcal{C}_D$ : é representada pelo elemento em sua configuração atual, sob carregamento externo.

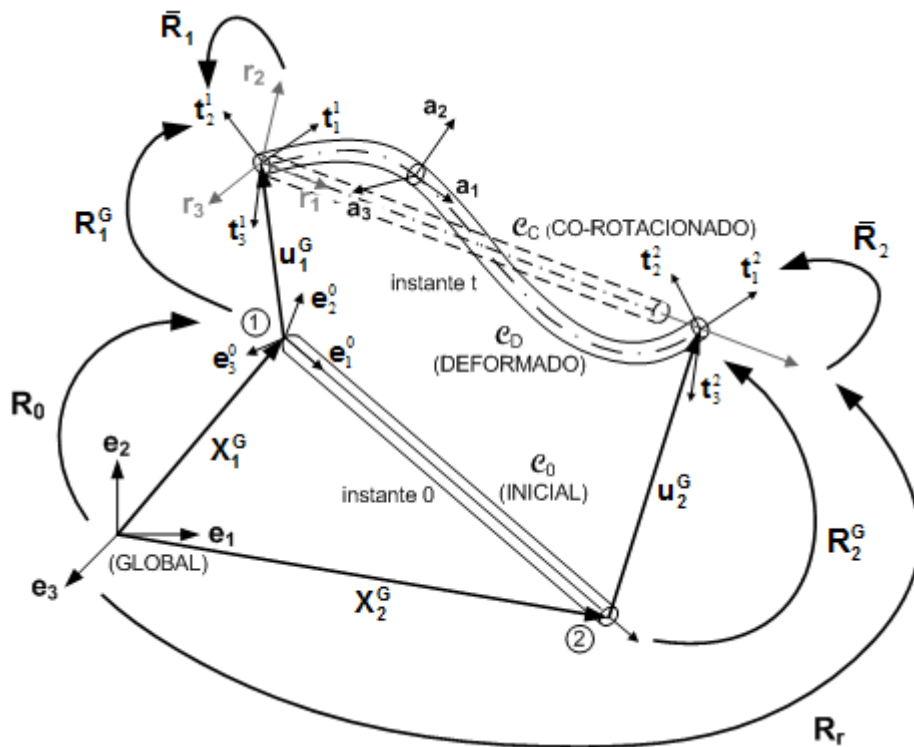


Figura 3.3 – Descrição do movimento de um elemento de viga usando-se um Sistema de Coordenadas Co-rotacionado.

Os sistemas de coordenadas empregados na formulação do elemento de pórtico e representados na Fig. 3.3 estão descritos a seguir:

- Sistema global: Definido pela tríade de vetores ortonormais  $e_i$ ,  $i=1,2,3$  e corresponde a um sistema de coordenadas espaciais em relação ao qual a estrutura considerada é referida. Mantém-se imóvel durante toda a análise. Em uma abordagem Lagrangeana total, é neste sistema que as equações de equilíbrio da estrutura são escritas;
- Sistema local fixo: Definido pela tríade de vetores ortonormais  $e_i^0$ ,  $i=1,2,3$ , está associado ao elemento em sua configuração inicial  $\mathcal{C}_0$ . Nesta configuração, a linha central do elemento de viga, segundo a formulação descrita neste trabalho, apresenta-se como um segmento de reta. Neste sistema a origem das coordenadas está em uma de suas extremidades. O vetor unitário  $e_1^0$  coincide com o eixo longitudinal e os demais são paralelos às direções principais de inércia (de área) da seção transversal;
- Sistema local móvel: Definido pela tríade de vetores ortonormais  $r_i$ ,  $i=1,2,3$ , está associado à configuração co-rotacionada  $\mathcal{C}_C$ . Na configuração indeformada

este sistema coordenado coincide com o sistema local fixo. O sistema local móvel acompanha os movimentos de corpo rígido do elemento de viga, em que as deformações não afetam a orientação do sistema. O vetor unitário  $\mathbf{r}_1$  é definido pela direção obtida unindo-se as extremidades da viga. É sobre este sistema que toda a formulação do elemento é escrita;

- Sistema convectivo: Definido pela tríade de vetores ortonormais  $\mathbf{a}_i$ ,  $i=1,2,3$ , está associado à configuração deformada  $\mathcal{C}_D$ . Este sistema acompanha a linha central na configuração deformada e está vinculado ao centro da mesma. O vetor unitário  $\mathbf{a}_1$  define a orientação da seção transversal e os vetores  $\mathbf{a}_2$  e  $\mathbf{a}_3$  são escolhidos nas direções principais da seção transversal. Um caso particular do sistema convectivo são as tríades de vetores ortonormais  $\mathbf{t}_i^1$  e  $\mathbf{t}_i^2$ ,  $i=1,2,3$ , com origem em cada um dos nós do elemento de pórtico, respectivamente. Antes do carregamento da estrutura, ambos são paralelos ao sistema local fixo. Estes sistemas são solidários ao elemento, mantendo-se unidos aos nós aos quais estão associados e acompanhando seus deslocamentos (translações e rotações).



### 3.5. Deformações no Elemento de Viga Considerado

#### 3.5.1. Matriz de transformação do sistema global para o sistema local fixo

A transformação de coordenadas do sistema global para o sistema local fixo, mostrada na Fig. 3.3, faz-se com a matriz de rotação  $\mathbf{R}_0$  através da seguinte transformação linear

$$\mathbf{e}_i^0 = \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{e}_i \quad (3.10)$$

Na eq.(3.10),  $\mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{e}_i^0$  são os vetores unitários escritos nos sistemas global e local fixo, respectivamente. Gere e Weaver Jr. [29] demonstram a obtenção da matriz  $\mathbf{R}_0$  como

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} l & m & n \\ -\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}} & \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}} & 0 \\ -\frac{ln}{\sqrt{l^2 + m^2}} & \frac{mn}{\sqrt{l^2 + m^2}} & \sqrt{l^2 + m^2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Na equação acima,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  são os co-senos diretores do eixo do elemento de pórtico, em sua configuração inicial  $\mathcal{C}_0$ . Considerando-se  $\mathbf{X}_1^G$  e  $\mathbf{X}_2^G$ , os vetores posição dos nós do elemento nesta configuração, expressos no sistema global, tem-se

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{X}_2^G - \mathbf{X}_1^G}{L_0} \quad (3.12)$$

onde  $L_0$  é o comprimento do elemento na configuração indeformada.

### 3.5.2.

#### Atualização do sistema de coordenadas convectivo associado aos nós

A atualização do sistema convectivo dos nós do elemento de viga na Fig. 3.3 é obtida ao término de cada passo de carregamento da estrutura, a partir da combinação dos efeitos de cada rotação incremental. Esta operação é feita através do produto das respectivas matrizes de rotação. Considerando-se  $\Delta\theta$  o vetor de rotações incrementais correspondente ao nó  $i$  do elemento, no sistema coordenado global tem-se

$$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

A matriz de rotação incremental  $\mathbf{R}$  para cada nó é calculada considerando a sequência dos ângulos de Euler [56] (Fig.3.4), ou seja, calculada considerando-se que as rotações que compõem o vetor  $\Delta\theta$  de rotações incrementais,  $\Delta\theta_x$ ,  $\Delta\theta_y$  e  $\Delta\theta_z$  ocorrem nesta sequência.

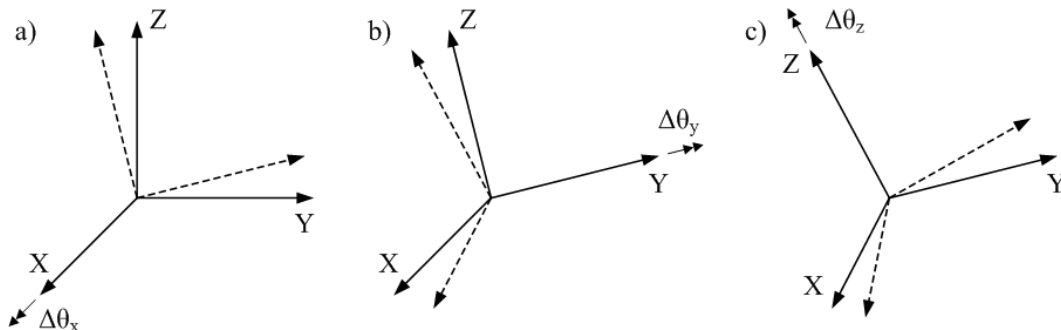


Figura 3.4 – Ângulos de Euler

Da sequência de rotações indicada na figura de acima, a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  pode ser obtida do produto das matrizes rotação obtidas individualmente para cada componente do vetor de rotações incrementais  $\Delta\theta$ . Desta forma tem-se:

e) A transformação Rotação  $R_x$  em torno do eixo x:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\theta_x & -\text{sen} \Delta\theta_x \\ 0 & \text{sen} \Delta\theta_x & \cos \Delta\theta_x \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

f) A transformação Rotação  $R_y$  em torno do eixo  $y$ :

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos \Delta\theta_y & 0 & \text{sen} \Delta\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \Delta\theta_y & 0 & \cos \Delta\theta_y \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

g) A transformação Rotação  $R_z$  em torno do eixo  $z$ :

$$\mathbf{R}_{z_i} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\theta_z & -\text{sen} \Delta\theta_z & 0 \\ \text{sen} \Delta\theta_z & \cos \Delta\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

e

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_x \quad (3.17)$$

Como as rotações incrementais são expressas em um sistema de coordenadas fixo, mas representam a evolução de um sistema móvel, Argyris [11] demonstra que a operação de acumular as rotações é feita pós-multiplicando a matriz resultante do passo anterior pela matriz de rotação incremental do passo corrente. Assim, para configurações sucessivas do sistema nodal móvel (Fig. 3.5), a transformação de coordenadas pode ser feita na forma

$$\mathbf{t}'_i = \mathbf{R}_2 \mathbf{t}_i = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{e}_i = \mathbf{R}_T \mathbf{e}_i \quad (3.18)$$

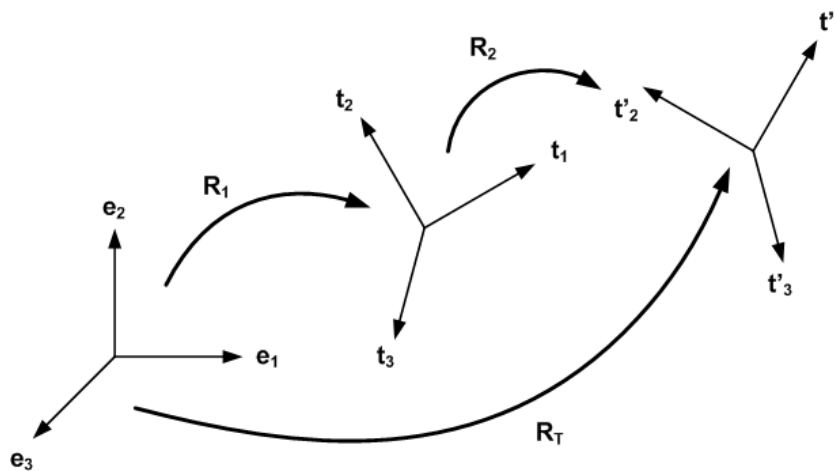


Figura 3.5 – Rotações do sistema de coordenadas convectivo associado aos nós.

A sequência de transformação a partir dos ângulos de Euler é largamente utilizada e fornece resultados confiáveis dentro de análises onde as rotações incrementais são pequenas e, portanto as diferenças de segunda ordem se tornam desprezíveis [56]. No entanto esta consideração pode não ser válida em uma

análise de longa duração, assim na versão atual do programa Anflex é usada na atualização do sistema de coordenadas convectivo associado aos nós a fórmula de Rodrigues, descrita mais adiante pela eq.(3.32).

### 3.5.3. Atualização do sistema de coordenadas local móvel

Na Formulação co-rotacionada decompõe-se o movimento do elemento a partir da configuração inicial  $\mathcal{C}_0$  até a configuração deformada  $\mathcal{C}_D$  em componentes de corpo rígido e de deformação. A componente de corpo rígido resulta da translação e da rotação da linha central do elemento, medidas no sistema local fixo. Da Fig. 3.3, a origem do sistema local fixo é tomada no nó 1 e, portanto, a translação de corpo rígido  $\mathbf{u}_1^G$  é a translação do nó 1, onde o índice superior direito indica que a quantidade é expressa no sistema global.

A rotação de corpo rígido é tal que a orientação do sistema local móvel é definida pela matriz de rotação ortogonal  $\mathbf{R}_r$ , dada por

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \quad (3.19)$$

O primeiro eixo coordenado do sistema local móvel é definido pela linha que conecta os nós 1 e 2 do elemento. Conseqüentemente,  $\mathbf{r}_1$  é dado por

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{X}_2^G + \mathbf{u}_2^G - (\mathbf{X}_1^G + \mathbf{u}_1^G)}{L_n} \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{X}_\alpha^G$ ,  $\alpha = 1,2$  são os vetores de posição nodais na configuração inicial  $\mathcal{C}_0$  e  $L_n$  é o comprimento atual do elemento de viga (ver Fig. 3.3), assim

$$L_n = \|\mathbf{X}_2^G + \mathbf{u}_2^G - (\mathbf{X}_1^G + \mathbf{u}_1^G)\| \quad (3.21)$$

A orientação dos dois eixos remanescentes são determinados com ajuda do vetor auxiliar  $\mathbf{q}$ . Na configuração inicial  $\mathcal{C}_0$ , o vetor  $\mathbf{q}$  tem a mesma direção que o eixo local fixo  $\mathbf{e}_2^0$ , enquanto que, na configuração deformada  $\mathcal{C}_D$  sua orientação é obtida como

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \quad \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha^G \mathbf{R}_0 [0 \ 1 \ 0]^T \quad \alpha = 1,2 \quad (3.22)$$

onde  $\mathbf{R}_1^G$  e  $\mathbf{R}_2^G$  são as matrizes de rotação ortogonais usadas para especificar a orientação das tríades nodais  $\mathbf{t}_i^1$  e  $\mathbf{t}_i^2$ ,  $i = 1,2,3$ , respectivamente, e a matriz de rotação  $\mathbf{R}_0$  especifica a orientação do sistema de coordenadas na configuração

inicial  $\mathbf{e}_0$  (ver seção 3.5.1). Os vetores unitários  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$  são calculados pelos produtos vetoriais

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{q}\|} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 \quad (3.23)$$

e, assim, a matriz ortogonal  $\mathbf{R}_r$  em (3.19) fica completamente definida.

### 3.5.4. Cálculo das Deformações Angulares

O movimento de corpo rígido descrito na seção anterior é acompanhado de uma parcela de deslocamentos deformacional (que efetivamente causa as deformações). Neste contexto, as deformações angulares são dadas pelas diferenças entre os sistemas convectivos associados aos nós  $\mathbf{t}_i^1$  e  $\mathbf{t}_i^2$  e o sistema local móvel  $\mathbf{r}_i$ ,  $i=1,2,3$ , para os nós 1 e 2, respectivamente. Da Fig. 3.3, a relação entre estes sistemas é dada pela matriz de rotação ortogonal  $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ ,  $\alpha=1,2$  referida ao sistema local móvel. Conseqüentemente, a orientação das tríades nodais  $\mathbf{t}_i^1$  e  $\mathbf{t}_i^2$  pode ser obtida por meio do produto  $\mathbf{R}_r \bar{\mathbf{R}}_\alpha$ . Por outro lado, esta orientação pode também ser obtida através do produto  $\mathbf{R}_\alpha^G \mathbf{R}_0$ , conforme mostrado na Fig. 3.3. Assim

$$\mathbf{R}_r \bar{\mathbf{R}}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha^G \mathbf{R}_0 \quad (3.24)$$

que resulta em

$$\bar{\mathbf{R}}_\alpha = (\mathbf{R}_r)^T \mathbf{R}_\alpha^G \mathbf{R}_0, \quad \alpha = 1,2 \quad (3.25)$$

onde a matriz  $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$  é obtida de um pseudo-vetor  $\bar{\mathfrak{R}}_\alpha$  [61], cujas componentes representam as deformações angulares, i.e.,

$$\bar{\mathfrak{R}}_\alpha = \log_e(\bar{\mathbf{R}}_\alpha), \quad \alpha = 1,2 \quad (3.26)$$

Na seção 3.7, estas expressões serão utilizadas e explicitadas na definição das quantidades referentes à cinemática de deformação do elemento de viga corotacionado, tema do presente estudo.

### 3.6. Hipóteses Básicas da Formulação

Na derivação das equações de movimento representativos do comportamento do elemento de pórtico co-rotacionado, as seguintes hipóteses são utilizadas:

- As deformações do elemento correspondem à condição do comportamento do material no regime elástico linear, onde a relação constitutiva distribui-se na geometria da seção reta representando um comportamento com gradação funcional.
- Em consonância com a hipótese anterior ocorrem na viga apenas pequenas deformações, mas grandes deslocamentos são permitidos.
- Da condição anterior, a não-linearidade geométrica do modelo numérico resulta de:
  - a) Grandes deslocamentos em que a rigidez da estrutura é dependente da configuração geométrica espacial a cada instante da análise;
  - b) Acoplamento entre os mecanismos de deformação à tração e à flexão. Em *risers* como em linhas de ancoragem, o aumento de tração corresponde a um enrijecimento do sistema.
- As seções transversais do elemento de viga, inicialmente planas, permanecem planas e perpendiculares à linha central após a deformação (hipótese de Euler-Bernoulli).
- As variações de área e de volume devido às deformações presentes são desprezíveis em relação às demais deformações.
- Na presença de torção da seção reta esta permanece plana, não havendo o empenamento.

### 3.7. Cinemática de Deformação do Elemento de Viga Considerado

Nesta seção será apresentado o procedimento empregado para a obtenção das relações de compatibilidade geométrica do modelo de pórtico tridimensional, usadas na formulação de elementos finitos do presente estudo. Considerando-se o elemento de viga mostrado na Fig. 3.6, representativo do comportamento cinemático do movimento de *risers*, as posições espaciais de um ponto P da seção transversal tubular em dois instantes sucessivos em que  $\mathbf{X}_p^0$  denota o vetor de posição do ponto P na configuração co-rotacionada  $\mathcal{C}_C$  no instante t e  $\mathbf{X}_p$  representa o vetor de posição deste mesmo ponto P na configuração deformada  $\mathcal{C}_D$  no instante t+Δt. Estes dois vetores são expressos nas coordenadas  $x_i$  referidas ao sistema coordenado local móvel (co-rotacionado)  $\mathbf{r}_i$  (com  $\mathbf{r}_1$  dirigido ao longo da linha do centróide e  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$  nas direções principais da seção reta) como

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_p^0 &= \mathbf{X}_G^0 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{X}_p &= \mathbf{X}_G + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3\end{aligned}\tag{3.27}$$

$\mathbf{X}_G^0$  e  $\mathbf{X}_G$  denotam os vetores de posição do baricentro G da seção reta nas configurações co-rotacionada e deformada, respectivamente,  $\mathbf{a}_2$  e  $\mathbf{a}_3$  são os vetores unitários nas direções principais da seção transversal na configuração deformada. As coordenadas locais  $x_2$  e  $x_3$  consideradas para a seção tubular de *risers* de raios interno  $r_i$  e externo  $r_o$  devem satisfazer a condição,

$$r_i \leq (x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \leq r_o\tag{3.28}$$

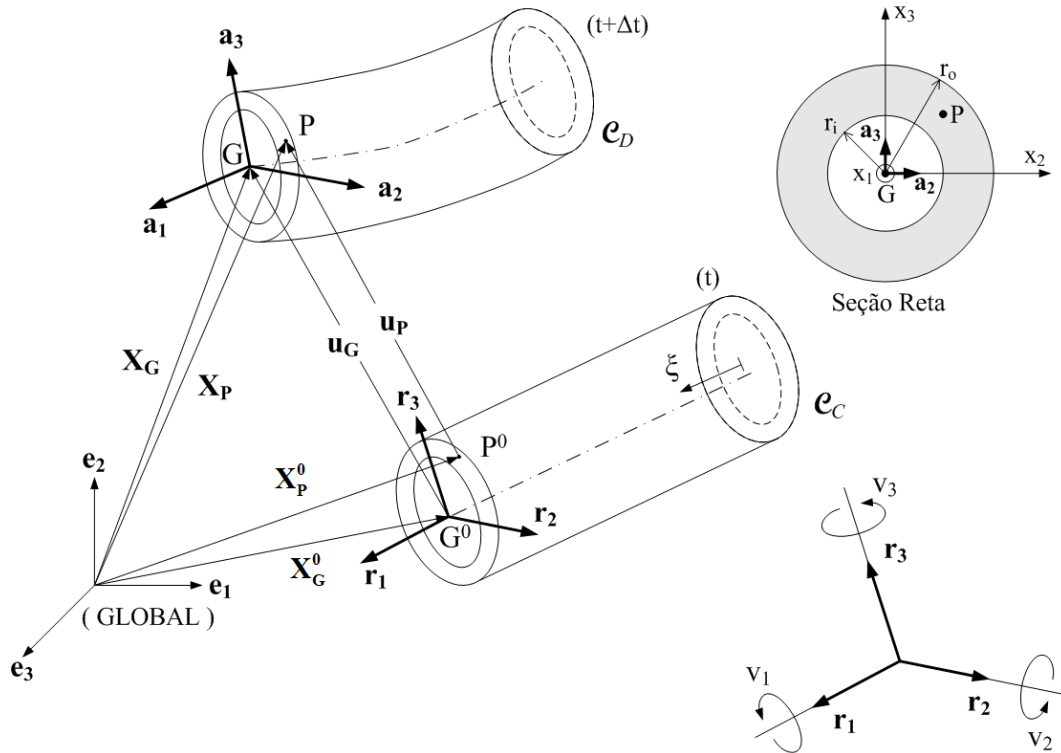


Figura 3.6 – Cinemática do modelo de pórtico co-rotacionado.

A relação entre as tríades de vetores ortonormais  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1,2,3$ , é expressa por

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{R} \mathbf{r}_i \quad (i = 1,2,3) \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz de rotação a ser definida a seguir, nesta seção.

Na análise não-linear geométrica de elemento de viga 3D uma de suas importantes considerações é o tratamento apropriado das rotações. Quando infinitesimais estas podem ser consideradas grandezas vetoriais, satisfazendo as operações clássicas da álgebra linear. No entanto, quando as rotações assumem valores finitos não podem mais ser consideradas como entidades vetoriais, não atendendo, inclusive, à propriedade comutativa dos vetores [50]. Desta forma faz-se necessária a introdução do conceito de pseudo-vetor rotacional, definido por

$$\boldsymbol{\Psi} = v_1 \mathbf{r}_1 + v_2 \mathbf{r}_2 + v_3 \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e} \boldsymbol{\psi} \quad (3.30)$$

onde  $v_i$ , ( $i=1,2,3$ ) são os incrementos das rotações em torno dos vetores unitários  $\mathbf{r}_i$ .



O significado geométrico desta definição está ilustrado na Fig. 3.7 e expressa-se por [61]: “qualquer rotação finita pode ser representada por uma rotação única com um ângulo  $\psi$  ao redor de um eixo  $L$  definido pelo vetor unitário  $\mathbf{e}$ ”. A magnitude desta rotação, i.e. do vetor  $\Psi$ , é dada por

$$\psi = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (3.31)$$

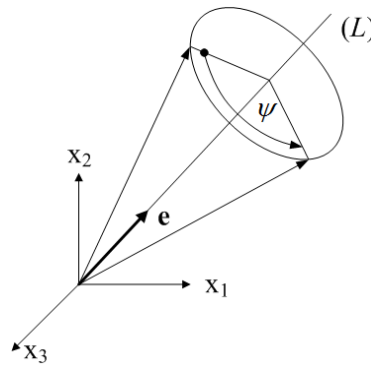


Figura 3.7 – Vetor rotação.

Esta matriz de rotação  $\mathbf{R}$ , expressa em termos do vetor  $\Psi$ , admite a seguinte representação [61]

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\text{sen } \psi}{\psi} \mathbf{S}(\Psi) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sen}(\psi/2)}{\psi/2} \right]^2 \mathbf{S}(\Psi) \mathbf{S}(\Psi) \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade (3a. ordem) e  $\mathbf{S}(\Psi)$  é uma matriz anti-simétrica obtida com as componentes do vetor rotação e é expressa por

$$\mathbf{S}(\Psi) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Expandindo-se em série de Taylor as funções trigonométricas na eq. (3.32),  $\mathbf{R}$  pode ser ainda re-escrita na forma [61]

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{S}(\Psi) + \frac{1}{2} \mathbf{S}(\Psi) \mathbf{S}(\Psi) + \dots = \exp(\mathbf{S}(\Psi)) \quad (3.34)$$

Com auxílio da eq.(3.34) uma aproximação, até segunda ordem, para  $\mathbf{R}$  pode ser construída como

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{S}(\Psi) + \frac{1}{2} \mathbf{S}(\Psi) \mathbf{S}(\Psi) \quad (3.35)$$

que, substituindo-se a expressão da eq.(3.33) em (3.35), resulta em

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v_2^2 + v_3^2}{2} & -v_3 + \frac{v_1 v_2}{2} & v_2 + \frac{v_1 v_3}{2} \\ v_3 + \frac{v_1 v_2}{2} & 1 - \frac{v_1^2 + v_3^2}{2} & -v_1 + \frac{v_2 v_3}{2} \\ -v_2 + \frac{v_1 v_3}{2} & v_1 + \frac{v_2 v_3}{2} & 1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Utilizando-se o resultado acima em (3.29) e substituindo-se em (3.27), uma aproximação de segunda ordem para o vetor incremento dos deslocamentos

$\mathbf{u}_P = [u_{P_1} \ u_{P_2} \ u_{P_3}]^T = \mathbf{X}_P - \mathbf{X}_P^0$  é avaliado na forma,

$$\begin{aligned} u_{P_1} &= u_1 - x_2 v_3 + x_3 v_2 + \frac{1}{2} x_2 v_1 v_2 + \frac{1}{2} x_3 v_1 v_3 \\ u_{P_2} &= u_2 - x_3 v_1 - \frac{1}{2} x_2 (v_1^2 + v_3^2) + \frac{1}{2} x_3 v_2 v_3 \\ u_{P_3} &= \underbrace{u_3 + x_2 v_1}_{\text{linear}} + \underbrace{\frac{1}{2} x_2 v_2 v_3 - \frac{1}{2} x_3 (v_1^2 + v_2^2)}_{\text{não-linear}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde  $u_1, u_2, u_3$  são os deslocamentos do centróide G do elemento, correspondentes às componentes do vetor  $\mathbf{u}_G = \mathbf{X}_G - \mathbf{X}_G^0$ , como apresentado na Fig. 3.6.

Em relação ao sistema local móvel  $\mathbf{r}_i$ , as componentes de deformação de Green-Lagrange [16], que contribuem para a energia de deformação na aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, são expressas em relação aos deslocamentos de um ponto P da viga na forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{P,1} + \frac{1}{2} (u_{P,1})^2 + \frac{1}{2} (u_{P,2})^2 + \frac{1}{2} (u_{P,3})^2 \\ \gamma_{12} &= u_{P,2} + u_{P,1} + u_{P,1} u_{P,2} + u_{P,2} u_{P,2} + u_{P,3} u_{P,2} \\ \gamma_{13} &= u_{P,3} + u_{P,1} + u_{P,1} u_{P,3} + u_{P,2} u_{P,3} + u_{P,3} u_{P,3} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Na eq.(3.38) a vírgula seguida de um índice indica diferenciação da componente do incremento de deslocamento em relação à coordenada correspondente. Em (3.37) as medidas dos incrementos de deslocamentos estão expressas por termos completos até a aproximação de segunda ordem. Naturalmente, o procedimento numérico incremental assim descrito permite acompanhar-se a solução exata das equações de movimento desde que os incrementos considerados na análise (representados pelos passos temporais da análise) sejam suficientemente pequenos.

Substituindo-se os resultados de (3.37) em (3.38) e eliminando-se os termos algébricos de ordem superior à segunda ordem, as medidas dos incrementos de deformação, expressas em função dos incrementos de deslocamentos da seção transversal, do modelo de viga resultam nas equações seguintes

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} = & u_{1,1} - x_2 v_{3,1} + x_3 v_{2,1} + \frac{1}{2}(u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) + x_2 \left[ \frac{1}{2}(v_{1,1}v_2 + v_1v_{2,1}) + u_{3,1}v_{1,1} \right] \\
 & + x_3 \left[ \frac{1}{2}(v_{1,1}v_3 + v_1v_{3,1}) - u_{2,1}v_{1,1} \right] + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)v_{1,1}^2 \\
 & + \frac{1}{2}(x_2^2v_{3,1}^2 + x_3^2v_{2,1}^2) - (x_2x_3)v_{3,1}v_{2,1} \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{12} = & u_{2,1} - v_3 - x_3v_{1,1} + \frac{1}{2}v_1v_2 + u_{3,1}v_1 - \frac{1}{2}x_3(v_{2,1}v_3 - v_2v_{3,1}) \\
 \gamma_{13} = & \underbrace{u_{3,1} + v_2 + x_2v_{1,1}}_{\text{linear } (e_{ij})} + \underbrace{\frac{1}{2}v_1v_3 - u_{2,1}v_1 + \frac{1}{2}x_2(v_{2,1}v_3 - v_2v_{3,1})}_{\text{não-linear } (\eta_{ij})}
 \end{aligned}$$

que caracterizam a compatibilidade geométrica da cinemática de deformação relevantes, definida a partir das hipóteses explicitados na seção 3.6, e dos campos de deslocamentos espaciais do modelo numérico, definidos ao longo da linha central do elemento. Uma dedução mais detalhada da eq.(3.39) é deixada para o Apêndice A, para evitar-se que extensas transformações algébricas sejam incluídas no corpo principal do texto deste trabalho.

### 3.8. Formulação de Elementos Finitos

Como apresentado nas expressões em (3.39) as componentes de deformação estão decompostas em termos lineares ( $e_{ij}$ ) e não-lineares ( $\eta_{ij}$ ) – 2a. ordem –, indicadas nesta forma para atender a imposição do Princípio dos Trabalhos Virtuais, utilizando-se a formulação Lagrangeana co-rotacionada. Esta condição é equivalente a determinar-se a equação matricial corresponde à verificação do equilíbrio da estrutura no instante  $t+\Delta t$  tendo como referência a configuração co-rotacionada da estrutura no instante  $t$ . Esta condição é expressa por

$$\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} d{}^tV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} \quad (3.40)$$

onde o índice inferior esquerdo indica o instante correspondente à configuração co-rotacionada de referencia e os índices superiores indicam os instantes em que as variáveis estão sendo avaliadas. Desta forma a expressão do trabalho virtual externo considerando-se as forças de corpo e de superfície no instante  $t+\Delta t$  resulta em

$${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} = \int_{{}^0A} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S d{}^0A + \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i d{}^0V \quad (3.41)$$

onde  $\delta u_k$  é a variação virtual nas componentes de deslocamento  ${}^{t+\Delta t}u_k$ .

Na equação (3.40) quando as configurações nos instantes  $t$  e  $t+\Delta t$  estão muito próximas, o segundo tensor de Piola-Kirchhoff,  ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$  pode ser descomposto na soma do tensor de Cauchy  ${}^t\tau_{ij}$ , avaliado no instante  $t$ , com o tensor incremento  ${}^tS_{ij}$  [56]. Similarmente, a medida de deformação de Green-Lagrange  ${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}$  é também descomposta na soma da deformação de Cauchy  ${}^t\varepsilon_{ij}$  com o incremento de deformação  ${}^t\varepsilon_{ij}$ .

Considerando-se a decomposição expressa na eq.(3.39) para o incremento das deformações tem-se

$${}^t\varepsilon_{ij} = {}^t e_{ij} + {}^t \eta_{ij} \quad (3.42)$$

Das discussões acima, a eq.(3.40) pode ser expressa na forma

$$\int_{{}^tV} ({}^t\tau_{ij} + {}^tS_{ij}) \delta ({}^t\varepsilon_{ij} + {}^t e_{ij} + {}^t \eta_{ij}) d{}^tV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} \quad (3.43)$$

em que  $\delta_t^t \varepsilon_{ij} = 0$  e, considerando-se a aproximação linear elástica entre os incrementos de tensão e deformação  ${}_t S_{ij} = {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs}$  chega-se a

$$\int_V {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta_t e_{ij} d^t V + \int_V {}^t \tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_V {}^t \tau_{ij} \delta_t e_{ij} d^t V \quad (3.44)$$

Na equação (3.44) se desprezando os termos de alta ordem, os termos à esquerda resultam na rigidez linear e geométrica do modelo, a primeira parcela à direita o vetor carregamento e a segunda parcela o vetor desbalanceamento conforme avaliação mostrada no capítulo 4.

O princípio dos trabalhos virtuais, empregado na dedução das equações de equilíbrio (eq. 3.40), está relacionado ao problema estático apenas. Na formulação de problemas dinâmicos, envolvendo a inércia da viga, é possível estender o princípio empregando-se do princípio de D'Alembert [52]. Desta forma, utilizando-se a segunda lei de Newton junto ao termo correspondente às forças externas de corpo nas equações (3.40) e (3.41), tem-se

$$\int_V {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^t V = \int_A {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S d^0 A + \int_V \left( {}^{t+\Delta t} f_i^B - {}^0 \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \right) \delta u_i d^0 V \quad (3.45)$$

Tomando-se a equação de equilíbrio em sua forma incremental, equação (3.44), e acrescentando o termo correspondente ao amortecimento viscoso, obtém-se a equação incremental do equilíbrio dinâmico no instante  $t+\Delta t$ , baseada na conjugação do princípio dos trabalhos virtuais e no princípio de D'Alembert,

$$\int_V {}^0 \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d^0 V + \int_V k {}^{t+\Delta t} \dot{u}_i \delta u_i d^0 V + \int_V {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta_t e_{ij} d^t V + \int_V {}^t \tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} d^t V = \int_A {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S d^0 A + \int_V {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d^0 V - \int_V {}^t \tau_{ij} \delta_t e_{ij} d^t V \quad (3.46)$$

No próximo capítulo a equação de equilíbrio incremental (3.46) será escrita na sua forma matricial a partir da discretização da estrutura e usando funções de interpolação para relacionar os campos de deslocamentos incrementais num ponto qualquer do elemento com os deslocamentos nodais do modelo de elemento de viga de dois nós e doze graus de liberdade.