7
Apreçamento de Derivativos

Neste capítulo os resultados anteriores são combinados em dois modelos de apreçamento de opções, usando apenas informações da série histórica da curva de juros, sem incorporar a volatilidade implícita negociada em mercado. No Brasil, as duas principais classes de opções de renda fixa são negociadas sobre futuros de IDI e futuros de DI. O primeiro tipo, como assinalado por Almeida e Vicente (2006) corresponde a uma opção asiática, com valor terminal dependendo da trajetória da taxa de curtíssimo prazo. O segundo tipo é uma opção sobre taxas a termo de juros, e pode ser avaliado por métodos mais amplamente usados em economias centrais. Por sua importância como instrumento de *hedging* e gestão ativa, diversos modelos de apreçamento foram propostos para as duas classes de opções no passado recente: Neto e Pereira (2000) obtiveram uma fórmula fechada para opções de IDI usando o modelo de Vasicec (1977). Ainda sobre opções de IDI, Gluckstern (2001) e Almeida *et al*. (2003) testaram aplicações com o modelo de Hull-White; Barbachan e Ornelas (2003) usaram o modelo CIR (Cox *et al.,* 1985) e Almeida e Vicente (2006) cobriram o apreçamento via estrutura de modelagem afim proposta por Duffie e Kan (1996). Em Barbedo *et al*. (2010) foi testada a aderência a mercado do apreçamento de opções de IDI através de um modelo multifatorial HJM com calibragem de volatilidades históricas. Para as opções sobre futuros de DI, Silva (1997) propôs um modelo de apreçamento usando o modelo BDT (Black *et.al*, 1990), mas sua comparação com dados de mercado foi limitada pela baixa liquidez das opções de DI na época do estudo.

Focamos nesta seção o apreçamento de opções sobre futuros de DI, um tipo menos explorado pela literatura local, usando duas abordagens: uma variante do modelo proposto por Brace et *al*. (1997), conhecido por BGM, e um modelo usando elementos de Teoria da Informação, via maximização de entropia. Esse segundo modelo será subdividido em duas formas de parametrização, uma delas incorporando a evolução histórica do preço de risco brasileiro (incluindo volatilidade, curtose e assimetria). As definições básicas referentes ao capítulo são dadas na próxima seção.

7.1
Definições Básicas

As opções testadas são negociadas sobre futuros de DI (na verdade, sobre um segmento a termo, sintetizado por dois contratos futuros). Um futuro de DI é um contrato virtual (em que nada é entregue no vencimento, e o fluxo de caixa é realizado apenas através dos ajustes diários) com "preço" de vencimento em T equivalente a 100.00 pontos - com multiplicador 1 para a conversão em R$, vigente em 2011. Chamando o preço em t de um futuro de DI de $PU_{(t,T)}$ (no contexto do capítulo, para não misturarmos a notação com o título idealizado B, que paga uma unidade monetária no vencimento) temos:

$$PU_{(t,T)} = \frac{100.000}{(1+r_{(t,T)})^{(T-t)/252}} \tag{108}$$

onde $r_{(t,T)}$ é a taxa anualizada com vencimento em T negociada no mercado futuro de DI, seguindo a convenção de capitalização composta e dias úteis.

O pagamento/recebimento de ajustes é feito através da diferença de preços de mercado (com sinal respeitando posições compradas ou vendidas em taxa) multiplicada pelo número de contratos negociados. Para evitar o problema de decaimento no tempo, os preços equivalentes ao ajuste de fechamento do dia (feito por um *call* pós-mercado), $PU^f_{(t,T)}$, são convertidos em preços de abertura do dia seguinte $PU^a_{(t+1,T)}$ através da multiplicação pela taxa interbancária de curtíssimo prazo (DI1, ou CDI na terminologia de mercado). Assim:

$$PU^a_{(t+1,T)} = PU^f_{(t,T)}(1+DI1_t)^{1/252} \tag{109}$$

Se o CDI em t não for igual à taxa de fechamento $r^f_{(t,T)}$, a posição terá um custo de carregamento positivo ou negativo na passagem de um dia para o outro.

Uma opção sobre futuros de DI é uma opção tendo como objeto de negociação uma taxa a termo $f_{(t,T_1,T_2)}$ (balizada pelos contratos futuros de DI) negociada em t para o segmento futuro compreendido entre T_1 e T_2.

Desconsiderando diferenças de reinvestimento entre fluxos pagos no vencimento e fluxos com ajustes diários, a equação (99) pode ser reescrita diretamente via preços de futuros de DI:

$$F_{(t,T_1,T_2)} = \left(\frac{PU_{(t,T_1)}}{PU_{(t,T_2)}} \right)^{252/_{T_2-T_1}} - 1 \tag{110}$$

Para transformarmos em taxa efetiva:

$$Fe_{(t,T_1,T_2)} = \frac{PU_{(t,T_1)}}{PU_{(t,T_2)}} - 1 \tag{111}$$

Dado um *strike* K expresso em taxa anualizada, podemos considerar a opção sobre futuro de DI como uma opção sobre um título (virtual) vencendo em T_2, com pagamento em T_1. Lembrando a relação inversa entre preços e taxas, o comprador de uma opção de compra sobre futuros de DI receberá no vencimento T_1:

$$V_{T_1}^{ODI} = \left[\frac{100.000}{(1+K)^{T2-T1/_{252}}} - \frac{100.000}{(1+r_{(T_1,T_2)})^{T2-T1/_{252}}} \right]^+ \tag{112}$$

ou

$$V_{T_1}^{ODI} = \left[\frac{100.000}{(1+K)^{T2-T1/_{252}}} - PU_{(T_1,T_2)} \right]^+ \tag{113}$$

com a notação tradicional $[x]^+ = \max(x;0)$.

As opções sobre futuros de DI são negociadas em diversos vencimentos (sempre casados com os futuros de DI, que vencem no primeiro dia útil de cada trimestre e nos três meses subsequentes à data corrente). A diferença T_2-T_1 determina o tipo da opção: 3 meses = tipo I; 6 meses = tipo II, 12 meses = tipo III; > 12 meses (tempo customizado) = tipo IV.

As definições acima permitem entramos diretamente na modelagem estudada para o apreçamento das opções.

7.2
Modelo BGM (Brace, Gatarek & Musiela)

Modelos de mercado são assim chamados porque permitem o apreçamento de derivativos sob a fórmula de Black & Scholes (1973) ou de Black (1976). A simplicidade de parametrização de B&S tem um apelo muito grande entre *traders*, tendo se tornado um modelo padrão em mesas de operação. Com a sofisticação e ampliação dos mercados, o modelo de B&S continuou a ser usado na prática, mesmo perdendo seus fundamentos teóricos no apreçamento de alguns ativos base. Como exemplo, taxas a termo discretas foram apreçadas pelo modelo (em particular, o extremamente líquido mercado de derivativos de LIBOR, a taxa interbancária londrina, negociada em vários vencimentos), sem uma justificativa própria para que a taxa de desconto livre de risco fosse usada de forma estocástica e ao mesmo tempo determinística na sua formulação final. Migrando para o ambiente HJM, uma especificação de volatilidade constante por partes (vinculada a taxas discretas) leva a resultados explosivos antes do vencimento T_1. A pesquisa teórica foi praticamente forçada a fechar a lacuna com a prática, tendo sucesso através principalmente dos trabalhos de Miltersen *et al.* (1997), Brace *et al.* (1997) e Jamshidian (1997).

Os autores chegaram (por vias diversas, dentro e fora da especificação HJM) a um resultado que justifica teoricamente o uso da fórmula de Black para o apreçamento de taxas a termo discretas, sob a medida terminal T_2 (prazo de vencimento da ponta longa da taxa a termo). A simplicidade da mudança de numerário (e de medida) – substituindo a evolução da taxa de curto prazo pelo preço do título vencendo em T_2 como fator de desconto - esconde um processo bastante trabalhoso de garantia de existência e unicidade da solução. Sob a nova medida, a taxa a termo segue uma dinâmica log-normal sem tendência:

$$dF_{(t,T_1,T_2)} = \nu F_{(t,T_1,T_2)} dW_{T_2(t)} \tag{114}$$

O resultado (114) será usado para o apreçamento de opções sobre futuros de DI. O mercado nacional usa extensivamente o modelo de Black para calcular opções de renda fixa (sobre DI e IDI). Eventualmente, o que está sendo inserido na fórmula original como “volatilidade” não deve ser interpretado em sentido literal, já que o parâmetro serve mais como uma forma de comunicação entre praticantes do que como uma métrica bem definida de risco sobre o ativo de interesse. Neste estudo em particular, sob o modelo BGM a volatilidade recupera seu sentido próprio.

Voltando à equação (112), sob a medida neutra ao risco, para uma opção de compra com pagamento em T_1 temos:

$$V_t^{ODI} = \frac{PU_{(t,T_2)}}{100.000} \mathrm{E}_{T_2}\left\{ \frac{100.000}{PU_{(T_1,T_2)}} \left[\frac{100.000}{(1+K)^{T2-T1/252}} - \frac{100.000}{(1+r_{(T_1,T_2)})^{T2-T1/252}} \right]^+ \middle| \Im_t \right\},$$

$$= PU_{(t,T_2)} \mathrm{E}_{T_2}\left\{ \frac{1}{PU_{(T_1,T_2)}} \left[\frac{100.000}{(1+K)^{T2-T1/252}} - PU_{(T_1,T_2)} \right]^+ \middle| \Im_t \right\},$$

$$= PU_{(t,T_2)} \mathrm{E}_{T_2}\left\{ \left[\frac{100.000}{(1+K)^{T2-T1/252} PU_{(T_1,T_2)}} - 1 \right]^+ \middle| \Im_t \right\},$$

$$= PU_{(t,T_2)} \mathrm{E}_{T_2}\left\{ \left[\frac{(1+Fe_{(T_1,T_1,T_2)})}{(1+K)^{T2-T1/252}} - 1 \right]^+ \middle| \Im_t \right\},$$

$$= \frac{1}{(1+K)^{T2-T1/252}} PU_{(t,T_2)} \mathrm{E}_{T_2}\left\{ \left[Fe_{(T_1,T_1,T_2)} - \left((1+K)^{T2-T1/252} - 1 \right) \right]^+ \middle| \Im_t \right\} \quad (115)$$

onde $\left((1+K)^{T2-T1/252} - 1 \right)$ é a taxa efetiva do *strike*, *Ke*

Podemos usar a equação (115) diretamente no modelo de Black:

$$V_t^{ODI} = \frac{1}{(1+K)^{T2-T1/252}} PU_{(t,T_2)} \mathbf{Black}\left(Fe_{(t,T_1,T_2)}, Ke, \upsilon \right), \quad (116)$$

$$\mathbf{Black}\left(Fe_{(t,T_1,T_2)}, Ke, \upsilon \right) = Fe_{(t,T_1,T_2)} \Phi(d) - Ke\Phi(d-\upsilon) \quad (117)$$

com
$$d = \frac{\ln\left(\frac{Fe_{(t,T_1,T_2)}}{Ke}\right) - \frac{1}{2}\upsilon^2}{\upsilon}$$

onde $\upsilon^2 = \sigma^2_{(t,T_1)}$ pode ser interpretada como a variância total da taxa a termo efetiva entre t e T_1.

Um problema que requer atenção diz respeito à interpolação dos vértices da curva à vista, para o cálculo dos segmentos a termo. A variação da curva segmentada geralmente é mal condicionada em relação à curva à vista. Como exemplo, se a matriz de covariância da curva a termo segmentada for visualizada através da Análise de Componentes Principais, possivelmente aparecerão autovetores “fantasmas” (ou seja, muito diferentes dos identificáveis como nível, inclinação, curvatura e dupla curvatura) com autovalores entre os quatro mais altos. A curva a termo é muito sensível a pequenas variações da curva à vista, gerando algum nível espúrio de volatilidade nos segmentos estudados. Como forma de mitigar o problema, foram testadas interpolações por taxas a termo constantes, por *splines* cúbicas e *splines* quárticas. Nenhuma das três abordagens apresentou resultados significativamente melhores que as outras. Uma alternativa adicional seria a extração das volatilidades a termo diretamente da curva à vista, usando um método linear de proporcionalidade de *duration*. Entretanto, pela premissa de log-normalidade da taxa a termo efetiva (e a impossibilidade de estimação da correlação entre as taxas em T_1 e T_2), a interpolação da curva à vista deveria preceder o cálculo de volatilidades, portanto as taxas dos vértices de interesse foram estimadas mantendo o método de *splines* cúbicas.

A variância dos (log) retornos proporcionais da taxa efetiva entre T_1 e T_2 foi calculada para todos os i dias da dimensão espacial (até T_1), dada uma janela de n observações temporais. A volatilidade total inserida no modelo de Black para uma data t foi calculada como:

$$\upsilon_t = \sqrt{\sigma^2_{(t,T_1)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{T_1-t} \sigma_i^2} \tag{118}$$

O apreçamento de opções usando um modelo de mercado serviu de base comparativa para a abordagem proposta na próxima seção.

7.3 Apreçamento por Maximização de Entropia

A Teoria da Informação (TI) fornece critérios bastante intuitivos de estimação de distribuições de probabilidade desconhecidas ou apenas parcialmente inferidas. No contexto desta Tese, podemos usar a TI para incorporar a evolução do preço de risco da ETTJ de uma forma natural, baseada em mercados incompletos.

O uso do modelo de Black & Scholes (via mudança de medida para o caso de taxas a termo) na seção anterior ilustra a revolução ocorrida na área de Finanças Quantitativas após os artigos originais de 1973 (incluindo o de Merton). A introdução do princípio de não-arbitragem garantiu a existência de medidas neutras ao risco, reduzindo o apreçamento de derivativos ao desconto de fluxos futuros por taxas livres de risco. Alguns problemas surgem em mercados incompletos, mesmo que informacionalmente eficientes. Primeiro, a garantia de existência não é acompanhada por unicidade ou um método definido de construção da medida. Um segundo ponto, extremamente relevante para esta pesquisa, se refere à definição e mensuração da incerteza. No escopo de B&S, a incerteza (ou risco) é associada à volatilidade, segundo o princípio básico de que apenas a quantidade de risco é relevante para a precificação de derivativos, e não o grau de aversão a risco presente nos mercados. No entanto, para a previsão de risco futuro é muito difícil separar as duas medidas (risco e preço de risco), especialmente em um ambiente em evolução (em que os preços de risco são variantes no tempo), como o mercado brasileiro de renda fixa. Por isso a TI foi usada para incorporar o processo histórico do preço de risco em um conjunto de informações definido *a priori,* buscando maximizar o grau remanescente de incerteza da distribuição usada para apreçamento. O conceito de Maximização de Entropia é adequado ao nosso propósito, sendo explicado brevemente a seguir.

7.3.1
Entropia de Shannon

A definição de entropia remonta a conceitos de física clássica com aplicações à Teoria Termodinâmica. No entanto, foi no âmbito da Teoria da Informação que a entropia ganhou uma base sólida de ligação com o nível de incerteza de uma distribuição. No artigo original de Shannon (1948, republicado em 1949, ano indicado na bibliografia), uma variável x pode assumir n valores discretos, com uma probabilidade p_i associada a cada valor. Shannon procura determinar uma quantidade $H(p_1,...,p_n)$ que meça de forma única o grau de incerteza representado pela distribuição total. A partir de três condições de consistência, ele consegue provar a unicidade de sua medida, dada por:

$$H(p_1,...,p_n) = -K\sum_i p_i \ln p_i \tag{119}$$

Intuitivamente, a maximização da quantidade acima representa o nível mais alto de ignorância a respeito de uma distribuição, após considerarmos um conjunto apriorístico de informações sobre a mesma.

O uso da entropia como medida de incerteza em finanças foi discutido por Thiel (1967) e Arrow (1971), em um contexto de equilíbrio econômico. Ataques mais práticos voltados ao apreçamento de derivativos foram sugeridos por Stutzer (1996, renda variável), Stutzer e Chowdhury (1999, renda fixa) e Gulko (1999, renda variável; e 2002, renda fixa). Stutzer busca minimizar a pseudo distância (critério de informação de Kullback-Leibler) entre a distribuição real dos ativos e a distribuição neutra ao risco, o que para um conjunto equiprovável de preços ou retornos equivale a maximizar a entropia de Shannon. Aplicando ao apreçamento de títulos de renda fixa, Stutzer acumula um catálogo histórico de histogramas para pinçar a distribuição mais representativa no contexto vigente de mercado. Embora seguindo a heurística de Stutzer, a abordagem de Gulko está mais próxima deste trabalho, embora ainda com diferenças fundamentais. O autor maximiza a versão contínua de (119) fornecendo o primeiro e o segundo momentos da distribuição (além da restrição natural de densidade), recuperando *a posteriori* a medida neutra ao risco, em uma solução fechada de apreçamento. No presente estudo, serão considerados os quatro primeiros momentos de uma composição de duas distribuições (retornos de corpo e cauda da ETTJ), e incorporado o critério de neutralidade ao risco no conjunto apriorístico de informações. A solução de apreçamento é dada por um método numérico.

7.3.2
Descrição do Processo

Na seção 7.1, observa-se que as opções sobre futuros de DI podem ser calculadas sobre a evolução de taxas a termo ou sobre a evolução de preços dos futuros. Considerando uma opção de compra sobre futuros de DI (lembrando que o objeto de negociação é taxa) no segmento T_1 a T_2, vamos definir o "preço equivalente" da taxa a termo, chamado $PU^f_{(t,T_1,T_2)}$ como:

$$PU^f_{(t,T_1,T_2)} = 100.000\frac{PU_{(t,T_2)}}{PU_{(t,T_1)}} \tag{120}$$

Definindo uma janela de *n* observações diárias, serão definidos log-retornos totais de preço equivalente, da data *t* a T_1, assumindo uma distribuição invariante no tempo. Para a *i*-ésima observação:

$$S_i = \ln\left(\frac{PU^f_{(i,(T_1-t),(T_2-t))}}{PU^f_{(i,i,(T_2-T_1)-t)}}\right) \tag{121}$$

O uso do logaritmo permite ampliar a distribuição de retornos totais sobre o espaço de estado $\Re = (-\infty,+\infty)$. Com apenas os dois primeiros momentos definidos – usando resultados estabelecidos a partir da definição de máxima entropia - teríamos uma distribuição Gaussiana de retornos e log-normal para preços equivalentes.

Obtido o vetor de retornos totais, foram segregados a cauda e o corpo do histograma, a partir de um parâmetro α, exatamente como feito no capítulo 6. Assim vamos achar a média de corpo e cauda ($\mu_c;\mu_e$), volatilidade de corpo e cauda ($\sigma_c;\sigma_e$) e assimetria (γ_e), definida como a diferença entre a média de cauda e a média da distribuição total.

A implementação foi dividida em duas partes: uma usou os estimadores encontrados na janela de escolhida. A segunda alterou os estimadores de volatilidade e assimetria, considerando a evolução histórica dos preços de risco no conjunto apriorístico. O racional usado para o ajuste de fatores de risco foi o de que preços de risco variantes podem ser indicadores antecedentes relevantes para a quantidade de risco futura (refletidos diretamente na volatilidade implícita das opções). Aqui devemos lembrar que o modelo de B&S refere-se apenas ao preço de volatilidade, e que sua premissa de homocedasticidade é excessivamente simplificadora. Mesmo modelos que buscam contornar o problema, como os de volatilidade estocástica (Hull e White, 1987), que sugerem a variância média como parâmetro consistente pata o modelo de B&S (desconsiderando a evolução do preço de volatilidade) apresentam resultados dúbios na análise empírica (ver Lamourex e Lastrapes, 1993). Em um mercado com descontinuidades características como o de renda fixa brasileiro, a liquidez dos derivativos segue os altos e baixos do regime de volatilidade vigente. O risco de um lançador de opções ficar impossibilitado de desarticular suas posições (*squeeze*) em cenários de estresse parece corroborar a impossibilidade de *hedging* eficiente entre o mercado de opções e o de futuros. Diversos autores estudaram as implicações de mercados imperfeitos. Smith e Whitelaw (2009) analisaram a relação causal cruzada entre preço e prêmio de risco, e seu caráter cíclico. Duarte (2004) e Cheridito *et al.* (2007), sugerem a incorporação indireta da evolução do preço de risco no vetor de estados da classe de modelagem afim proposta por Duffie e Kan (1996). Karatzas *et al.* (1991) conclui que em mercados incompletos - operacional ou informacionalmente - a função utilidade dos investidores volta a ter um papel central no apreçamento de ativos e derivativos.

No presente estudo, a existência de três fatores de risco (e não apenas da volatilidade) com apreçamento dinâmico, a limitação de observações da base disponível e a janela utilizada – que captura um único ciclo econômico até 2008 – torna inviável qualquer tentativa de modelagem empírica do processo subjacente aos preços de risco, ou de uma forma funcional de utilidade variante no tempo. No entanto, o problema que se coloca para o apreçamento de derivativos é o mesmo levantado por Stutzer: qual o histograma de retornos mais adequado para o contexto de mercado corrente?

O método de Stutzer de comparar taxas a termo futuras com taxas realizadas (T_1 períodos à frente, contando a partir da data histórica de apuração) coloca algumas dificuldades na transposição para o mercado local. Primeiro, a janela de apuração fica parcialmente determinada pela janela da taxa a termo, reduzindo a flexibilidade do processo. Segundo, em uma década de redução contínua da taxa básica (mesmo que intercalada por períodos de aperto monetário), a comparação de taxas a termo esperadas com realizadas distorceria significativamente o perfil dos histogramas.

Nesta pesquisa foi fixado um período de referência, sendo calculado como multiplicador dos estimadores de risco a razão entre os preços de risco da janela corrente e os do período usado como base. Na forma proposta, a janela de observações fica desacoplada da janela da taxa a termo, e o catálogo de histogramas é substituído por ajustes baseados na evolução histórica dos preços de risco. O método de determinação dos ajustes ainda tem um alto grau de subjetividade, ligado à escolha do período referencial para os preços de risco iniciais, mas ilustra a flexibilidade do modelo entrópico. No trabalho, o ano escolhido para o cálculo dos preços base de risco foi o de 2003, em que a incerteza gerada pela crise de transição política ainda estava sendo capturada pela janela histórica de observações, mas os temores iniciais de mercado sobre a condução da economia haviam sido parcialmente dissipados.

Para estimação dos preços de risco foi usado o mesmo processo do capítulo 6, sob uma janela móvel trimestral. Alguns parâmetros tiveram que ser flexibilizados. O intervalo de cauda foi alterado para 0,95, e a janela de observação para 252 dias úteis. A significância de corte dos estimadores foi fixada em 15%. Acima desse valor, o multiplicador foi mantido em 1. Um cuidado adicional foi tomado com o sinal do multiplicador de assimetria, que deve respeitar a relação entre os sinais do período base e da janela recente de apuração.

Segue a tabela de multiplicadores dos estimadores, para cada trimestre:

Tabela 13 – Multiplicadores dos estimadores de risco

	2007				2008			
	Trim 1	Trim 2	Trim 3	Trim 4	Trim 1	Trim 2	Trim 3	Trim 4
δ_c	1,79	2,01	1,95	2,02	2,32	2,56	2,74	2,89
δ_e	1,00	1,00	1,00	0,80	1,20	1,00	1,00	1,00
γ_e	3,23	3,47	3,95	4,45	5,22	5,45	6,45	6,57
	2009				2010			
	Trim 1	Trim 2	Trim 3	Trim 4	Trim 1	Trim 2	Trim 3	Trim 4
δ_c	2,94	3,00	2,41	2,71	2,33	1,89	1,56	1,30
δ_e	1,00	0,56	0,90	0,55	0,18	1,00	1,89	2,01
γ_e	4,16	1,00	-1,36	-2,14	-1,09	1,00	1,00	1,00

Os multiplicadores foram usados com um trimestre de defasagem, para evitar qualquer antecipação de filtragem. Assim foram obtidos novos estimadores diários de volatilidade e assimetria: $\sigma_c^{'};\sigma_e^{'};\gamma_e^{'}$

Considerando $\pi(S)$ a densidade de probabilidade dos retornos totais no espaço $\Re$, temos a densidade neutra ao risco obtida por maximização de entropia dada pela solução da seguinte otimização:

$$\arg\max \quad -\int_{\Re}\pi(S)\ln\pi(S)\,dS, \tag{122}$$

sujeita a

$$\int_{\Re}\pi(S)\,dS = 1, \tag{123}$$

$$\int_{\Re}\pi(S)\,S\,dS = (2\alpha-1)\mu_{cn} + (2-2\alpha)\mu_{en}, \tag{124}$$

$$\int_{\Re}\pi(S)\,S^2\,dS = (2\alpha-1)(\mu_{cn}^2+\sigma_{cn}^2) + (2-2\alpha)(\mu_{en}^2+\sigma_{en}^2), \tag{125}$$

$$\int_{\Re}\pi(S)\,S^3\,dS = (2\alpha-1)(\mu_{cn}^3+3\mu_{cn}\sigma_{cn}^2) + (2-2\alpha)(\mu_{en}^3+3\mu_{en}\sigma_{en}^2), \tag{126}$$

$$\int_{\Re}\pi(S)\,S^4\,dS = (2\alpha-1)(\mu_{cn}^4+6\mu_{cn}^2\sigma_{cn}^2+3\sigma_{cn}^4) + (2-2\alpha)(\mu_{en}^4+6\mu_{en}^2\sigma_{en}^2+3\sigma_{en}^4) \tag{127}$$

A equação (123) representa a restrição de densidade. Em (124) temos uma aproximação da condição martingal incorporada *a priori* na otimização. A média da distribuição de retornos totais não pode ser obtida da série histórica, mas calculada a cada data t como:

$$\mu_{dn(t)} = \ln\left(\frac{PU^{f}_{(t,T_1,T_2)}}{PU^{f}_{(i,t,(T_2-T_1))}}\right) \tag{128}$$

Obtida a média de não arbitragem da distribuição, e sabendo o valor da assimetria de cauda histórica, podemos calcular diretamente as médias de corpo e cauda ajustadas a não arbitragem:

$$\mu_{cn} = \frac{\mu_{dn} - (2-2\alpha)(\mu_{dn} + \gamma_e)}{(2\alpha - 1)} \tag{129}$$

$$\mu_{en} = \mu_{dn} + \gamma_e \tag{130}$$

As restrições (125) a (127) representam a composição de momentos não centrados.

A mesma otimização foi repetida usando os fatores de risco ajustados pelos multiplicadores de preço. A solução de máxima entropia foi calculada por um algoritmo descrito no apêndice II. O espaço de retornos foi discretizado e associado ao vetor de probabilidades $\pi(S_i)$. Para uma partição em n retornos, o preço da opção de compra sobre futuros de DI em t pode ser representado por:

$$V_t^{ODI} = \exp\left[-\left(\frac{100.000}{PU_{(t,T_1)}} - 1\right)\right]\sum_{i=1}^{n}\left\{\pi(S_i)\left[\frac{100.000}{(1+K)^{T2-T1/252}} - PU_{(t,T1)}\exp(S_i)\right]^{+}\right\} \tag{131}$$

7.4
Resultados dos Modelos

Os três modelos definidos foram batizados BGM, Entropia e Entropia Ajustada, e usaram uma janela de observação de 252 dias. Sua aderência foi testada sobre uma base de opções sobre futuros de DI, compreendendo do período de março de 2007 a dezembro de 2012. Só foram comparadas opções de compra no estudo, por sua maior liquidez. Todos os preços foram apurados em mercados de balcão, seja por negócios fechados ou por apreçamento via *calls* de fechamento. Como discutido, a maior restrição à comunicação entre o mercado de futuros DI e o de opções é a falta de liquidez do último. No entanto, os *calls* de fechamento e o ajuste da estrutura de volatilidade feito pelas pontas de mesa mais ativas na negociação de opções de DI reflete toda a movimentação de troca de *spreads* ao longo do pregão, sendo relativamente representativo mesmo quando poucos negócios são fechados no dia.

Na base foram considerados todos os vencimentos e *strikes* de cada série, dos tipos I, II e III. Foram observadas 55.911 opções no total, antes da filtragem inicial. A filtragem excluiu da base opções com preços abaixo de 0,03 (para não distorcer a estatística de erros percentuais) e com volatilidades implícitas acima de 300%. As estatísticas de aderência foram baseadas em erros médio absolutos (MAE), erros médios percentuais absolutos (MAPE), e percentuais/erros médios de *overpricing* e *underpricing* (opções calculadas com preço acima e abaixo das obervadas, respectivamente). Para a análise de extremos de *moneyness* (razão entre o valor do futuro e o *strike*), a estatística MAE se mostrou um indicador mais informativo do que a MAPE, pelos altos erros percentuais em opções de baixo valor. Contra opções próximas do dinheiro, a MAPE recupera sua importância como indicador comparativo.

As opções foram divididas em prazos para vencimento (6, 12, 18, 24, 30 e 36 meses), tipo (I, II e III) e 10 categorias de *moneyness*, entre 84% (mínimo da base) e 155% (máximo). O resultado foi um mosaico de 180 tabelas, que se fossem reportadas integralmente trariam poucos benefícios analíticos. Portanto a pesquisa se preocupou em apresentar resultados chave, que ilustrassem as características básicas de cada modelo e sua aderência ao longo de períodos diversos de estudo.

A primeira tabela informa os resultados consolidados, para a base inteira estudada:

Tabela 14 – Estatística consolidada global

n obs	MAPE			MAE		
35.641	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	23%	40%	32%	65,31	145,40	107,78
desvio erro	27%	39%	40%	80,67	170,52	155,63
1o quartil	1%	4%	1%	5,47	21,25	5,74
3o quartil	34%	84%	56%	100,22	207,66	141,70
% overpricing	29%	32%	15%	29%	32%	15%
% underpricing	71%	68%	85%	71%	68%	85%
erro overpricing	22%	5%	24%	76,77	79,22	17,39
erro underpricing	23%	57%	33%	60,64	176,43	123,29

E as tabelas segregadas por tipo:

Tabela 15 – Estatística consolidada – Tipo I

n obs	MAPE			MAE		
2.576	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	27%	31%	28%	12,63	15,37	12,84
desvio erro	31%	36%	79%	10,80	16,58	14,56
1o quartil	2%	3%	1%	2,49	4,59	1,29
3o quartil	44%	57%	35%	20,87	18,07	19,71
% overpricing	5%	30%	48%	5%	30%	48%
% underpricing	95%	70%	52%	95%	70%	52%
erro overpricing	4%	7%	37%	1,22	5,78	11,15
erro underpricing	29%	41%	20%	13,22	19,51	14,38

Tabela 16– Estatística consolidada – Tipo II

n obs	MAPE			MAE		
13.403	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	25%	38%	26%	39,14	60,26	35,13
desvio erro	29%	38%	34%	42,82	62,21	44,12
1o quartil	2%	4%	2%	3,91	13,40	4,06
3o quartil	42%	79%	42%	63,09	89,40	52,47
% overpricing	26%	30%	28%	26%	30%	28%
% underpricing	74%	70%	72%	74%	70%	72%
erro overpricing	24%	4%	21%	38,84	39,60	18,70
erro underpricing	26%	53%	28%	39,24	69,10	41,54

Tabela 17 – Estatística consolidada – Tipo III

n obs	MAPE			MAE		
19.668	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	20%	43%	35%	90,04	220,46	179,27
desvio erro	25%	40%	35%	95,32	192,95	162,22
1o quartil	1%	5%	5%	8,97	63,70	49,30
3o quartil	29%	90%	66%	144,91	329,01	265,76
% overpricing	34%	33%	36%	34%	33%	36%
% underpricing	66%	67%	64%	66%	67%	64%
erro overpricing	22%	5%	5%	97,83	112,07	109,91
erro underpricing	19%	62%	52%	86,00	274,98	219,02

Opções no dinheiro tiveram uma estatística de erros menor no modelo BGM:

Tabela 18 – Estatística consolidada; moneyness entre 99% e 101%

n obs	MAPE			MAE		
2.595	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	28%	56%	41%	88,41	208,35	152,35
desvio erro	18%	22%	25%	89,20	208,10	179,94
1o quartil	16%	42%	22%	21,74	47,46	26,75
3o quartil	38%	72%	58%	128,44	320,85	205,78
% overpricing	30%	2%	21%	30%	2%	21%
% underpricing	70%	98%	79%	70%	98%	79%
erro overpricing	29%	27%	31%	92,84	7,50	22,47
erro underpricing	28%	57%	43%	86,55	211,82	186,24

A entropia ajustada – principalmente para opções tipo I e II - é geralmente mais aderente ao comportamento do *smile*. Alguns exemplos para prazos curtos e longos:

Tabela 19 - Tipo I; Prazo 6; *moneyness* entre 90% e 95%

n obs	MAPE			MAE		
43	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	98%	93%	43%	7,43	7,00	3,42
desvio erro	1%	5%	29%	1,30	1,03	2,61
1o quartil	98%	90%	18%	6,53	6,45	1,50
3o quartil	99%	98%	65%	8,25	7,80	5,12
% overpricing	0%	0%	63%	0%	0%	63%
% underpricing	100%	100%	37%	100%	100%	37%
erro overpricing	NA	NA	52%	NA	NA	4,26
erro underpricing	98%	93%	28%	7,43	7,00	2,00

Tabela 20 - Tipo I; Prazo 6; *moneyness* entre 115% e 125%

n obs	MAPE			MAE		
174	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	0%	2%	0%	1,26	8,47	1,22
desvio erro	1%	1%	1%	5,55	5,01	4,64
1o quartil	0%	1%	0%	0,00	4,31	0,02
3o quartil	0%	3%	0%	0,03	12,46	0,15
% overpricing	18%	97%	13%	18%	97%	13%
% underpricing	82%	3%	87%	82%	3%	87%
erro overpricing	0%	2%	1%	0,00	8,20	2,11
erro underpricing	0%	4%	0%	1,53	16,02	1,10

Tabela 21 - Tipo II; Prazo 6; *moneyness* entre 90% e 95%

n obs	MAPE			MAE		
721	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	52%	83%	52%	17,10	30,71	14,99
desvio erro	31%	16%	51%	17,46	26,29	16,40
1o quartil	19%	74%	19%	2,73	8,46	2,81
3o quartil	81%	96%	72%	28,93	42,26	21,76
% overpricing	28%	0%	41%	28%	0%	41%
% underpricing	72%	100%	59%	72%	100%	59%
erro overpricing	33%	NA	63%	15,34	NA	15,90
erro underpricing	59%	83%	44%	17,80	30,71	14,35

Tabela 22 - Tipo II; Prazo 6; *moneyness* entre 115% e 125%

n obs	MAPE			MAE		
843	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	1%	2%	1%	8,07	18,91	8,54
desvio erro	2%	2%	2%	15,00	14,47	15,12
1o quartil	0%	1%	0%	0,00	8,32	0,12
3o quartil	1%	3%	1%	6,59	24,03	7,40
% overpricing	27%	88%	35%	27%	88%	35%
% underpricing	73%	12%	65%	73%	12%	65%
erro overpricing	1%	2%	1%	4,72	20,01	8,85
erro underpricing	1%	1%	1%	9,31	10,50	8,38

Tabela 23 - Tipo II; Prazo 24; *moneyness* entre 90% e 95%

n obs	MAPE			MAE		
60	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	44%	72%	39%	114,08	176,75	102,34
desvio erro	19%	13%	24%	55,62	57,72	63,78
1o quartil	32%	64%	20%	73,42	134,02	50,67
3o quartil	56%	81%	60%	150,63	219,38	165,92
% overpricing	0%	0%	12%	0%	0%	12%
% underpricing	100%	100%	88%	100%	100%	88%
erro overpricing	NA	NA	3%	NA	NA	5,63
erro underpricing	44%	72%	44%	114,08	176,75	115,11

Tabela 24 - Tipo II; Prazo 24; *moneyness* entre 115% e 125%

n obs	MAPE			MAE		
50	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	8%	8%	6%	63,60	64,55	47,42
desvio erro	4%	6%	4%	33,28	49,92	30,87
1o quartil	3%	3%	4%	23,61	21,78	27,04
3o quartil	12%	15%	8%	90,00	99,97	70,18
% overpricing	0%	92%	24%	0%	92%	24%
% underpricing	100%	8%	76%	100%	8%	76%
erro overpricing	NA	9%	2%	NA	69,00	13,76
erro underpricing	8%	2%	7%	63,60	13,39	58,06

Seria interessante analisar separadamente os anos de 2009 e 2010, em que ocorreu uma transição importante na condução de política monetária frente a crises. A mudança de percepção do mercado em relação ao preço da assimetria deveria se refletir em preços mais baixos para opções dentro do dinheiro em 2009:

Tabela 25 - Estatística consolidada – 2009; *moneyness* entre 115% e 125%

n obs	MAPE			MAE		
1.099	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	6%	3%	5%	82,05	42,00	71,50
desvio erro	5%	3%	6%	71,15	48,99	105,08
1o quartil	2%	1%	0%	19,21	13,36	4,04
3o quartil	10%	4%	7%	123,38	46,56	83,75
% overpricing	81%	71%	23%	81%	71%	23%
% underpricing	19%	29%	77%	19%	29%	77%
erro overpricing	7%	2%	2%	94,96	26,15	13,59
erro underpricing	2%	5%	6%	27,05	80,93	88,73

Em 2010, a significância da curtose poderia aumentar o apreçamento de séries longe do dinheiro:

Tabela 26 - Estatística consolidada – 2010; *moneyness* entre 90% e 95%

n obs	MAPE			MAE		
1.036	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	72%	89%	64%	102,11	139,18	100,39
desvio erro	16%	12%	48%	92,55	132,10	114,14
1o quartil	61%	83%	35%	22,60	31,70	14,44
3o quartil	84%	98%	85%	150,75	199,02	121,61
% overpricing	0%	0%	18%	0%	0%	18%
% underpricing	100%	100%	82%	100%	100%	82%
erro overpricing	NA	NA	74%	NA	NA	8,88
erro underpricing	72%	89%	62%	102,11	139,18	120,68

Tabela 27 - Estatística consolidada – 2010; *moneyness* entre 115% e 125%

n obs	MAPE			MAE		
1.076	BGM	Entropia	Entropia Aju	BGM	Entropia	Entropia Aju
erro médio	6%	4%	4%	51,47	32,51	33,02
desvio erro	6%	4%	4%	64,34	44,33	35,60
1o quartil	1%	1%	2%	2,27	7,19	10,48
3o quartil	9%	5%	6%	81,39	35,91	36,14
% overpricing	3%	55%	80%	3%	55%	80%
% underpricing	97%	45%	20%	97%	45%	20%
erro overpricing	0%	2%	4%	0,01	12,36	25,11
erro underpricing	6%	6%	6%	52,87	57,08	65,39

Além das tabelas mostradas acima, todo o conjunto de informações obtido com a base de opções foi usado para traçar o quadro conclusivo a seguir:

7.5
Conclusões

O resultado geral mostra que os preços estimados de opções foram em média inferiores aos negociados em balcão. Vários motivos contribuem para o resultado. Barbedo *et al*, comentando o mercado de opções de IDI, sugere que os agentes formadores de preço nos *calls* de balcão geralmente são lançadores de opções, portanto o preço se aproxima do de venda na divulgação ao fim do dia. Outro ponto extremamente relevante se refere às restrições de liquidez, já comentadas na seção 7.3.2, que justificam um prêmio adicional elevado para a montagem de estratégias com assimetria contrária.

Na comparação de modelos, o BGM obteve a melhor aderência consolidada, mas é bastante possível que parte do resultado venha da apuração de volatilidades espúrias nos segmentos a termo da curva. Como as volatilidades implícitas médias ficaram substancialmente acima das realizadas, uma falha sistemática de modelo que superestime volatilidades vai apresentar uma estatística consolidada mais próxima dos resultados observados. Uma evidência de que o modelo BGM pode ter sido afetado pela sensibilidade da curva a termo é a sua grande superioridade em opções do tipo III, em relações aos outros modelos testados.

No caso dos modelos de entropia, os dois tipos conseguiram gerar algum nível de *smile* no espaço de distância do dinheiro das séries. Até 2008, o formato da curva de volatilidades implícitas em relação ao *moneyness* das opções era basicamente crescente, sem inflexões na proximidade do dinheiro. A partir de 2009, e principalmente em 2010, o formato tradicional de *smile* (observado em opções de renda variável, por exemplo) começou a se manifestar, e foi capturado parcialmente por ambos os modelos.

O modelo ajustado apresentou grande flexibilidade de adequação a preços. Embora a forma de ajuste proposta tenha sido relativamente arbitrária, outras composições foram testadas, com aderência satisfatória. Em particular, um modelo alternativo com o parâmetro alfa variando em função do nível de *moneyness* das opções se mostrou bem adaptado ao *smile* de séries com prazos e tipos muito diversos, sob várias janelas históricas. Para a implementação justificada do modelo, no entanto, seria preciso estimar uma função utilidade endógena (paramétrica ou não) para todo o espectro da distribuição de retornos, senão estaríamos abandonando qualquer teoria de formação de preços de opções e passando para a área de calibragem pura. O objetivo deste capítulo foi o oposto: tentar inferir parcialmente, a partir apenas da evolução histórica da ETTJ, seu poder explicativo sobre a dinâmica do mercado de opções.