

5

Análise de Caudas e Operações de Imunização de Curva

O capítulo está dividido em duas seções. A primeira analisa a dinâmica de caudas da curva local a partir da Teoria de Valores Extremos (TVE), concluindo que não só operações direcionais, mas também posições conjugadas de curva possuem caudas mais pesadas que as previstas pela distribuição Normal, além de assimétricas.

Na segunda seção, a partir de ferramentas de avaliação de risco de mercado (Valor em Risco – *VaR*), foram obtidos os modelos mais aderentes à dinâmica de caudas, tanto em estatística de violações quanto em magnitude de perdas esperadas. A conclusão de que um modelo histórico de risco ponderado homogeneamente – que basicamente é um histograma truncado de retornos – supera os modelos paramétricos tradicionais e rivaliza com a TVE é muito importante para o seu uso no capítulo seguinte, que trata da estimação de preços de risco para a ETTJ local.

5.1

Análise da Dinâmica da ETTJ a partir da Teoria de Valores Extremos

Estratégias no mercado de renda fixa incluem, além de posições direcionais (compradas ou vendidas em vencimentos isolados), operações sobre o formato da curva à vista de juros. Como exemplo, podemos citar operações de inclinação (ímmunes a movimentos paralelos da curva) e de curvatura (ímmunes tanto a movimentos paralelos quanto a movimentos de rotação da curva), além de estratégias – menos usuais – envolvendo a imunização de fatores de ordem superior. Esta seção aborda, sob a ótica de gestão de risco, o comportamento dos componentes principais que regem a dinâmica da estrutura temporal de juros, isolados a partir da parametrização da curva em um polinômio de fatores ortogonais (Legendre). Potenciais limitações dos modelos paramétrico-Gaussianos de *VaR* (Value-at-Risk) na mensuração do risco de operações parcialmente

imunizadas são evidenciadas usando a Teoria de Valores Extremos na análise da estrutura de caudas da distribuição de variação dos fatores.

Introduzida no ambiente de Finanças Quantitativas por Embrechts et al. (1997), existem diversas publicações relatando o uso da Teoria dos Valores Extremos para o mercado brasileiro. Pode-se citar Ferreira (1999), Mendes (2000) e Martins (2000), cujo foco principal é o uso da TVE no mercado de ações. Dentre os trabalhos ligados a eventos extremos relacionados à estrutura a termo de taxa de juros do Brasil encontra-se Carvalho (2006).

O uso da Teoria dos Valores Extremos (TVE) na análise de eventos raros representa uma alternativa superior a outros tipos de metodologias, em especial quando a suposição de normalidade para as distribuições de retornos de ativos financeiros se mostra uma simplificação significativamente distante dos dados observados.

No caso de aplicação da TVE para a curva de juros, a dimensão temporal adicional permite analisar a sua estrutura sob diversos aspectos. Usando Análise de Componentes Principais obtemos os conhecidos fatores explicativos principais de sua dinâmica (Litterman e Scheinkman, 1998): nível, inclinação, curvatura e dupla inflexão - fatores que respondem por mais de 99% da variância conjugada da curva, sendo desnecessário o uso de componentes adicionais para o presente estudo. Almeida *et al.* (2001), parametrizou a curva de títulos de mercados emergentes usando polinômios de Legendre, isolando seus componentes principais a partir dos coeficientes estimados para cada fator.

A proposta desta seção é transpor a parametrização de Legendre para a curva brasileira de juros, e fazer uma análise das distribuições de diferenças dos quatro primeiros polinômios de Legendre usando a Teoria de Valores Extremos (com estudos separados para as caudas superiores e inferiores das distribuições). Visto que a dinâmica de nível da curva (movimentos paralelos) é fortemente influenciada pela trajetória da taxa de curtíssimo prazo, o interesse maior do trabalho se concentra nos movimentos de inclinação e curvatura, e suas implicações para o risco de operações parcialmente imunizadas.

5.1.1

Polinômios de Legendre

O polinômio de Legendre de grau n pode ser definido no intervalo compacto $[-1,1]$ de acordo com a seguinte equação:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left((x^2 - 1)^n \right), \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Aplicando diretamente (22), temos os quatro primeiros polinômios:

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Apesar dos polinômios de Legendre estarem associados ao intervalo $[-1,1]$, pode-se estender sua definição ao intervalo $[0,u]$ imediatamente. Para tal, basta utilizar a transformação $x = \frac{2t}{u} - 1$ para $t \in [0, u]$. Temos então:

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left[\left(\left(\frac{2t}{u} - 1 \right)^2 - 1 \right)^n \right], \quad \forall t \in [0, u] \quad (23)$$

Portanto qualquer polinômio de grau n pode ser reproduzido de forma exata por uma combinação linear dos n primeiros polinômios de Legendre. O uso de um número “suficientemente grande” de polinômios de Legendre permite uma aproximação muito boa de qualquer função contínua em um intervalo compacto.

A estrutura temporal de juros pode então ser aproximada por um somatório de polinômios de Legendre:

$$C_n(t) = \sum_{n=0}^m c_n L_n(t), \quad \forall t \in [0, u] \quad (24)$$

Os polinômios de Legendre formam uma base ortogonal, mitigando o problema da multicolinearidade entre fatores. Se estimarmos a estrutura temporal de juros usando apenas os quatro primeiros polinômios de Legendre teremos a dinâmica dos quatro coeficientes representando respectivamente movimentos paralelos da curva (L_0), de rotação (L_1), de curvatura (L_2) e de dupla inflexão (L_3).

5.1.2

Teoria de Valores Extremos

A Teoria dos Valores Extremos veio a ser incorporada a modelagem de risco por sua capacidade preditiva da microestrutura de caudas dos ativos, fornecendo uma forma funcional capaz de extrapolar os dados extremos disponíveis na amostra, com precisão maior que a dos modelos tradicionais. Na estimativa de risco, as caudas superior e inferior da distribuição de retornos são tratadas de forma independente, sem nenhuma premissa inicial de simetria.

Ordenados os retornos de uma carteira com n observações e considerando M_n o maior retorno, estima-se a distribuição dos máximos recorrendo ao resultado central da TVE, o Teorema de Fisher-Tippett:

Considerando (X_n) uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., se existirem constantes de padronização $c_n > 0, d_n \in \mathfrak{R}$ e uma distribuição não degenerada tal que:

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \quad (25)$$

então H pertence a uma das seguintes distribuições:

$$\text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = 0, \text{ se } x \leq 0; \alpha > 0 \quad (26)$$

$$\text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \text{ se } x > 0; \alpha > 0 \quad (27)$$

ou

$$\text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \text{ se } x \leq 0; \alpha > 0 \quad (28)$$

$$\text{Weibull: } \Psi_{\alpha}(x) = 1, \text{ se } x > 0; \alpha > 0 \quad (29)$$

ou

$$\text{Gumbel: } \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), x \in \mathfrak{R} \quad (30)$$

Invertendo a abordagem anterior, podemos dizer que uma variável aleatória X pertence ao domínio de atração de máximo de H se existirem constantes $c_n > 0, d_n \in \mathfrak{R}$ que induzam:

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H \quad (31)$$

É possível introduzir uma família paramétrica que englobe as três distribuições, recaindo em cada caso apenas com a mudança de um parâmetro de interesse. Essa distribuição é chamada Distribuição Generalizada do Valor Extremo (GVE). Conforme Embrechts *et al.* (1997), podemos definir H_k :

$$H_k = \exp\{-(1 + kx)^{-1/k}\}, \text{ se } k \neq 0 \quad (32)$$

$$H_k = \exp\{-\exp(-x)\}, \text{ se } k = 0 \quad (33)$$

O parâmetro x pode ser normalizado via transformação de escala e locação:

$$x_p = \frac{x - u}{\sigma} \quad (34)$$

generalizando a distribuição.

Se $k > 0$, a GVE corresponde à distribuição de Fréchet, com caudas mais pesadas que a Normal. Essa é a distribuição de interesse, evidenciada pelos dados empíricos obtidos sobre gráficos Q-Q de normalidade dos retornos.

O parâmetro k pode ser obtido de formas diversas. Algumas metodologias robustas requerem a divisão em sub-amostras das observações iniciais. Como o número de dados da base utilizada é reduzido, optamos por usar um método conhecido por Estimador de Hill (Hill, 1975), na versão gráfica sugerida por Embrechts *et al.* (1997).

Supondo uma amostra de variáveis aleatórias i.i.d. $X_1 \dots X_n$ com distribuição F pertencente ao domínio de atração de uma Fréchet, temos que:

$$F(x) = x^{-k} L(x); x > 0 \quad \text{se } L(x) \text{ é uma função de baixa variação} \quad (35)$$

O parâmetro k também é conhecido como índice de caudas, e o estimador de Hill pode ser obtido por máxima verossimilhança, supondo a função $L(x) = C$ (constante) e $F(x)$ válida para o domínio $x > u > 0$; $u = X_{q,n}$. Os estimadores de k e C , são condicionais ao valor de q (o parâmetro q é chamado de estatística de ordem e representa o q -ésimo indexador do conjunto ordenado de variáveis aleatórias). Para uma amostra de tamanho n temos:

$$\hat{k}_h(q) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \ln(X_{j,n} - \ln X_{q,n})^{-1} \quad (36)$$

$$\hat{C} = \frac{q}{n} (X_{q,n})^{\hat{k}_h(q)} \quad (37)$$

$$\hat{F}(u) \approx \frac{q}{n} \left(\frac{x}{X_{q,n}} \right)^{\hat{k}_h(q)} \quad (38)$$

E os quantis podem ser diretamente encontrados:

$$\hat{x}_p = \left(\frac{n}{q} (1-p) \right)^{-1/\hat{k}_h(q)} X_{q,n} \quad (39)$$

A estimativa pelo método descrito é feita a partir da representação gráfica da equação (36). O parâmetro k pode ser estimado a partir do ponto em que se estabiliza, e o q resultante usado como entrada para atualizações posteriores. Naturalmente o método envolve algum grau de subjetividade. Como premissa, procurou-se usar a parcimônia na escolha de q com patamares ambíguos, lembrando que estamos interessados na estatística de caudas da distribuição, portanto um valor de q muito elevado poderia tratar de uma região da distribuição em que outros modelos de risco apresentam aderência satisfatória.

5.1.3

Base de Dados

A base foi formada por série histórica de dados compreendendo o período de 01/04/2003 a 29/09/2006 (874 observações). As curvas diárias foram estruturadas em vértices de 21 dias úteis, com o vértice inicial em 63 dias e o final em 1008 dias. Os dois primeiros meses da curva foram retirados da base, para que o coeficiente de nível não capturasse apenas a trajetória da taxa de curtíssimo prazo – em última instância determinada pela autoridade monetária – mas também as expectativas e ajustes de mercado (nos vencimentos mais curtos) para essa trajetória.

Os dados para a montagem da base foram obtidos dos contratos futuros de DI (ver capítulo 7), com algumas extrapolações via taxas a termo constantes (vide equação 89) para os vértices mais longos no início da base. O espaçamento regular entre contratos negociados e vértices escolhidos permitiu a interpolação da curva por *splines* cúbicas.

Dada a representatividade da base em termos de liquidez, foi utilizado o método de mínimos quadrados ordinários para a estimação dos coeficientes do polinômio de Legendre. A dinâmica dos coeficientes no tempo foi obtida a partir da distribuição de sua variação absoluta (diferença) diária. O uso das diferenças é uma aproximação linear aceitável para a dinâmica de resultados de operações reais de mercado, direcionais ou parcialmente imunizadas.

5.1.4

Resultados

A análise de variância dos coeficientes para o período analisado sugere uma contribuição explicativa em relação à dinâmica da curva de aproximadamente 89% para o fator de nível, 7% para inclinação, 3% para curvatura e 1% para os fatores restantes.

Todos os parâmetros indicaram distribuições de cauda do tipo Fréchet, mais pesadas do que as previstas pela Gaussiana. Os resultados do parâmetro de cauda k e da estatística q estão sumarizados na tabela abaixo:

Tabela 1 – Resultados da TVE

	Parametrização	k	q	Distribuição
Retornos Diários	Cauda inferior de L_0	2,06	40	Fréchet
	Cauda superior de L_0	1,62	50	Fréchet
	Cauda inferior de L_1	1,93	70	Fréchet
	Cauda superior de L_1	2,14	35	Fréchet
	Cauda inferior de L_2	1,86	70	Fréchet
	Cauda superior de L_2	1,74	45	Fréchet
	Cauda inferior de L_3	1,56	45	Fréchet
	Cauda superior de L_3	1,92	60	Fréchet

Uma forma muito mais ilustrativa de mostrar a aderência da TVE à dinâmica de caudas de operações conjugadas de curva é traçar graficamente os dados observados contras as previsões de uma distribuição Normal e da TVE. Seguem os gráficos:

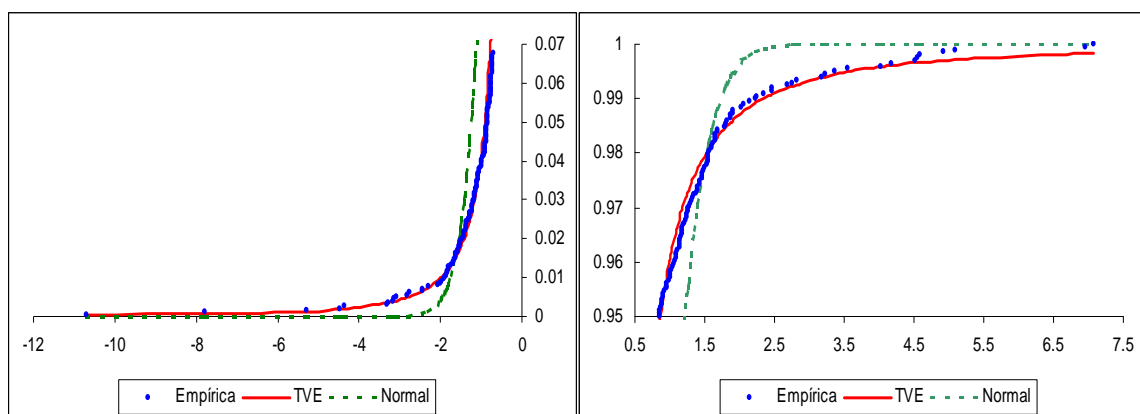


Figura 4 - Cauda inferior e superior estimadas da distribuição dos retornos absolutos diários de L_0

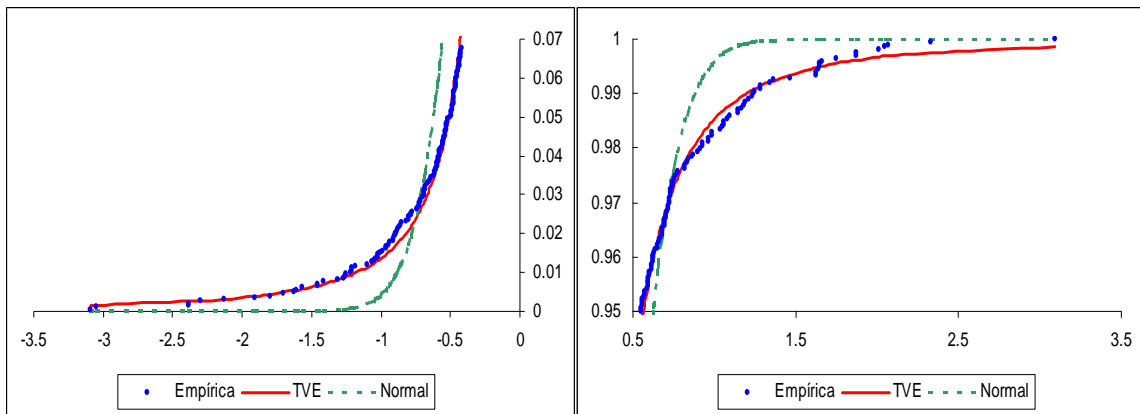


Figura 5 - Cauda inferior e superior estimadas da distribuição dos retornos absolutos diários de L_1

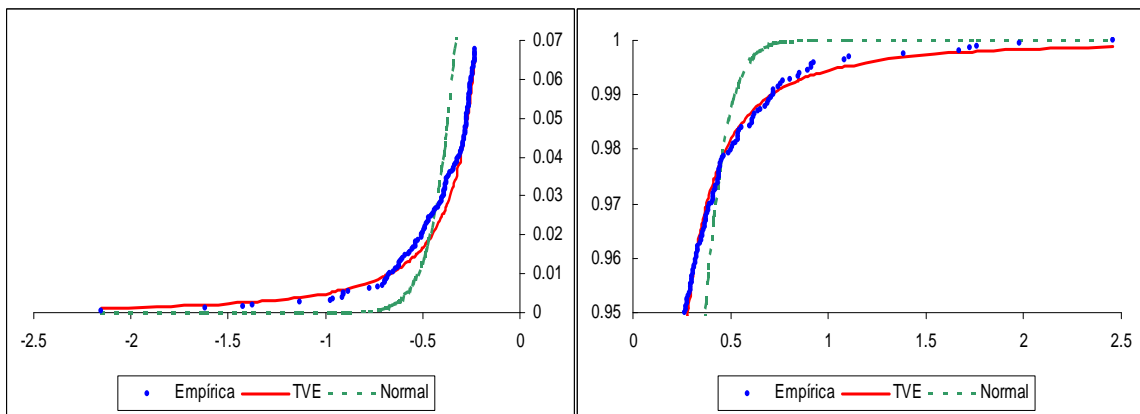


Figura 6 - Cauda inferior e superior estimadas da distribuição dos retornos absolutos diários de L_2

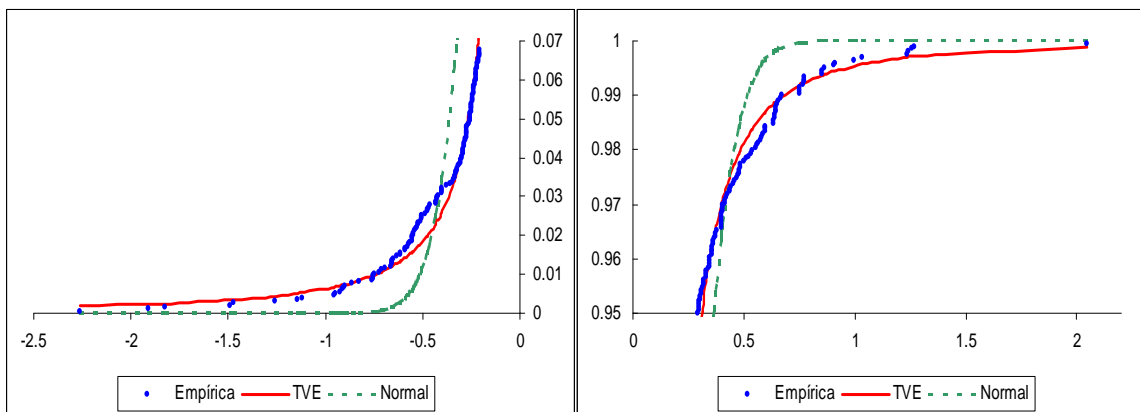


Figura 7 - Cauda inferior e superior estimadas da distribuição dos retornos absolutos diários de L_3

Concluindo a seção, na parametrização de curva utilizada, a distribuição de diferenças dos quatro primeiros coeficientes do polinômio de Legendre apresentou caudas mais pesadas que as previstas pela distribuição Normal, permitindo uma análise a partir da Teoria dos Valores Extremos que se mostrou significativamente mais aderente às observações.

Na prática, operações especulativas envolvendo o último coeficiente (ou seja, imunes a movimentos paralelos, de inclinação e de curvatura) são raras, pois o custo de entrada poucas vezes justifica o retorno esperado. O primeiro coeficiente (nível), embora seja o maior responsável pela dinâmica observada na curva, é fortemente influenciado pelos movimentos descontínuos da taxa de curtíssimo prazo. Movimentos paralelos de curva respondem primariamente como ajustes de expectativa a decisões da autoridade monetária no curto prazo. Do ponto de vista de risco, em parte esses são “eventos extremos com data marcada”, e geralmente fazem parte do leque de cenários montados pelos gestores de risco. O interesse maior, portanto, recai no segundo e terceiro coeficientes – equivalentes respectivamente a operações imunes a movimentos paralelos e imunes a movimentos paralelos e de inclinação - que também apresentaram caudas pesadas, e risco eventualmente subestimado por modelos paramétricos tradicionais.

5.2

Comparação de Modelos de VaR Aplicados a Operações de Imunização de Curva

Nesta seção vamos testar a aderência de modelos de Valor em Risco (*VaR*) na avaliação de operações conjugadas de curva. Novamente a Teoria de Valores Extremos será aplicada aos movimentos principais que regem a dinâmica da ETTJ, e os resultados serão comparados com modelos tradicionalmente usados para o cálculo de risco de mercado de uma carteira. A análise da estrutura a termo de juros a partir de sua dinâmica global será realizado tanto através da parametrização por polinômios de Legendre vista na seção anterior quanto via Análise de Componentes Principais.

Posições direcionais em taxas de juros estão sujeitas às mesmas condições que determinam à dinâmica de outros mercados, mas incorporam algumas peculiaridades. A taxa negociada é formada a partir das expectativas sobre a trajetória da taxa de financiamento de curtíssimo prazo, e esta é determinada em última instância pelo Banco Central. A cada reunião da autoridade monetária, portanto, o mercado reajusta seus cenários, e eventualmente migra para novos pontos de equilíbrio. Sob o aspecto de gestão de risco, esse comportamento gera algumas dificuldades de modelagem. A introdução de choques de preços com data e hora marcada geralmente é capturada de forma pobre por modelos de volatilidade, condicionais ou não. Para flanquear o problema, a maioria dos gestores de risco complementa seus sistemas de *VaR* com cenários de impacto sobre um leque de decisões possíveis na determinação da taxa básica.

A rigor, uma decisão sobre a taxa de curtíssimo prazo dissociada das expectativas de mercado deveria provocar um ajuste paralelo na curva de juros (todos os segmentos se deslocando com a mesma magnitude), mantidas as premissas de comportamento futuro do ciclo monetário. As consequências para operações imunes ao fator de nível seriam nulas. A prática mostra que decisões não antecipadas influenciam as expectativas sobre todo o processo de ajuste da taxa básica, induzindo movimentos não paralelos de curva. Um exemplo recorrente: cortes de juros mais agressivos do que os esperados podem levar a uma revisão das perspectivas futuras de inflação (Banco Central “atrás da curva”), aumentando a inclinação positiva da estrutura a termo. Dessa forma, operações parcialmente imunizadas também estão – ainda que indiretamente - expostas às decisões da autoridade monetária, refletindo sua descontinuidade característica. Outros fatores, como heterogeneidade de liquidez e a própria geometria da curva (integração entre fatores) contribuem para a dinâmica não paralela da curva. Esta seção busca evidências de que modelos tradicionais de *VaR* paramétrico eventualmente subestimam o risco de operações de imunização, tanto em estatística de violações como em magnitude de perdas, e que a Teoria de Valores Extremos ou abordagens não paramétricas podem ser mais aderentes às observações, sob determinados níveis de significância.

A dinâmica de operações de curva foi replicada através de dois métodos. O primeiro baseia-se na parametrização da estrutura a termo via polinômios de

Legendre, oferecendo uma aproximação bastante realista do comportamento de estratégias de imunização de movimentos “puros” de curva (amplamente utilizadas no mercado).

O segundo método sintetiza operações imunizadas usando Análise de Componentes Principais (ACP), a partir da matriz de covariância da estrutura a termo. Embora seja menos usado pelo mercado, o cálculo da razão de *hedging* de uma operação de imunização via ACP permite isolar efetivamente os fatores principais que respondem pela variância conjugada da curva, tendo um uso eventualmente distinto das operações de imunização contra fatores idealizados.

Os dois métodos serviram de base para a estimação dos modelos de *VaR* tradicionais e sua comparação com a Teoria dos Valores Extremos.

5.2.1

Comparação de Modelos

Quatro classes de operações foram usadas na avaliação dos modelos de risco. Estratégias direcionais, de inclinação (ímmunes a movimentos paralelos de curva), de curvatura (ímmunes a movimentos paralelos e de rotação) e de dupla curvatura (ímmunes a movimentos paralelos, de rotação e de curvatura). O interesse maior da pesquisa se concentrou nos movimentos de inclinação e curvatura. Como mencionado, posições direcionais dependem fortemente dos ajustes de expectativas em relação às decisões da autoridade monetária, e geralmente são avaliadas a partir de cenários idealizados pela gestão de risco. Operações de dupla curvatura são pouco implementadas na prática, dado o alto custo de transação e demora no processo de migração de equilíbrio.

O conceito de Valor em Risco define a perda máxima esperada de uma carteira, sob um horizonte de tempo e intervalo de confiança pré-determinados. Modelos usuais de *VaR* em geral tem pouco a informar sobre a microestrutura de caudas das distribuições. A Teoria de Valores Extremos oferece um tratamento sistemático da magnitude de eventos mais raros (significâncias mais refinadas), levando em consideração a informação de longo prazo implícita na amostra.

Os resultados obtidos a partir da Teoria dos Valores Extremos foram comparados com metodologias tradicionalmente usadas por gestores de risco: *VaR* paramétrico não-condicional, *VaR* paramétrico condicional (via *EWMA* e *n-Garch*) e *VaR* histórico. Note-se que o modelo de volatilidade condicional *EWMA* não foi incluído como um caso especial do *Garch*, por sua ampla utilização na gestão de risco, tendo sido o modelo inicialmente proposto pelo grupo de pesquisa do J.P.Morgan, *Riskmetrics*, fonte original do conceito de Valor em Risco.

Uma comparação de modelos envolve duas abordagens principais: validação estatística do número de violações sob o intervalo de confiança desejado e análise de perdas esperadas. Ambas foram usadas no trabalho, sob diversos intervalos de confiança. O objetivo primário da pesquisa foi determinar em que níveis de significância a Teoria de Valores Extremos supera os modelos tradicionais de *VaR*, e as implicações dos resultados para a gestão de risco de renda fixa.

5.2.2

Modelos de Valor em Risco

O conceito de *VaR* foi introduzido originalmente pelo grupo de pesquisa do banco J.P. Morgan (1994), hoje conhecido por RiskMetrics. A idéia básica era obter uma medida de risco consolidado para diversos ativos, que pudesse ser usada como padrão de comparação entre carteiras. De fato, o modelo foi rapidamente adotado por várias instituições financeiras e se tornou linguagem corrente nas discussões sobre risco de mercado. A definição de *VaR* para uma dada carteira é a perda máxima esperada para essa carteira, sob um intervalo de confiança e horizonte de tempo previamente definidos:

$$\Pr(\Delta\Gamma_t \leq VaR_t) = \alpha \quad (40)$$

onde $\Delta\Gamma_t$ é a variação no valor da carteira no horizonte t , e α é o nível de significância desejado.

O *VaR* pode ser expresso em termos de retornos financeiros ou percentual de retorno da carteira. Também pode ser medido de forma absoluta (em torno de

uma carteira com média de retornos hipoteticamente nula) ou relativa, descontando o retorno médio da carteira no horizonte de tempo desejado.

Após a publicação do *RiskMetrics*, diversas abordagens para a mensuração do risco de mercado foram sugeridas, e as vantagens e limitações de cada modelo amplamente discutidas. Embora usando ferramentas estatísticas extensivamente baseadas na Teoria de Carteira de Markowitz (1953), a proposta do *RiskMetrics* trouxe algumas inovações importantes no tratamento agregado de risco, principalmente na sistematização e decomposição de qualquer ativo em um número finito de fatores primitivos de risco. Entre os diversos modelos de *VaR*, podemos usar uma classificação geral em três famílias, como descritas:

***VaR* Paramétrico**

Assume uma distribuição a priori para os retornos dos ativos. Decomposta a carteira em fatores primitivos de risco e calculados seus retornos, encontra-se a matriz de covariância Σ do conjunto multivariado. Usando um exemplo de distribuição Gaussiana (a mais usada), se considerarmos α o multiplicador do desvio padrão para o intervalo de confiança desejado (baseado em uma Normal Padrão), temos o *VaR* absoluto na seguinte formulação:

$$VaR_{\alpha} = \sqrt{w' \Sigma w} \cdot \alpha \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (41)$$

w é um vetor coluna de pesos para cada fator e Δt é o horizonte de tempo desejado.

O *VaR* paramétrico permite uma grande flexibilidade na manipulação de seus parâmetros, principalmente na versão Gaussiana. As limitações do modelo envolvem a escolha da distribuição dos retornos, principalmente. Em geral os retornos de ativos financeiros apresentam caudas mais pesadas que as previstas pela Normal. Distribuições alternativas (t-student e hiperbólicas são algumas variações usadas) geralmente diminuem a tratabilidade do modelo, e sua relação custo/refinamento da informação deve ser cuidadosamente ponderada.

Outra questão importante no cálculo do *VaR* paramétrico é a estimativa de correlações e volatilidades dos retornos - especialmente a última. A abordagem mais simples considera a volatilidade sem autocorrelação serial (não condicional).

Nesse caso em geral é usada uma janela móvel para a atualização do cálculo da variância dos retornos, ponderando de forma homogênea cada observação. A observação empírica, no entanto, indica dependência temporal do segundo momento dos retornos de séries financeiras, e modelos condicionais de volatilidade costumam ser usados para a estimação da volatilidade. O *RiskMetrics* sugere, em seus artigos originais, o método *EWMA* (Exponentially Weighted Moving Average) para a atualização de volatilidade. A sua forma recursiva é a seguinte:

$$\sigma_t = \sqrt{(1 - \lambda)r_t^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2} \quad (42)$$

Sendo λ o parâmetro de decaimento no tempo dos pesos das observações, estimado pela minimização do erro quadrático total entre os quadrados dos retornos observado e a variância prevista pelo modelo.

Note-se que o *EWMA* é uma forma degenerada de modelo Garch (1,1), sem intercepto. Esta família é muito usada em estimativas de volatilidade, e sua forma geral (Garch(p,q)) com inovações Gaussianas pode ser escrita como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2; \quad \omega > 0; \quad \alpha_i, \beta_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \quad (43)$$

O modelo Garch ser estimado por maximização da log-verossimilhança com a imposição de restrições aos parâmetros da variância condicional. Os parâmetros p e q representam as ordens das defasagens, e podem ser obtidos via minimização de um critério de informação como o BIC (*Bayesian Criterion Information*):

$$BIC = -\frac{2}{T}(\psi(\theta^*) - k \ln T) \quad (44)$$

$\psi(\theta^*)$ é o valor da log-verossimilhança no ponto de máximo, T é o número de observações e k o número de parâmetros.

Em geral o mercado usa $p=q=1$ em modelos Garch para séries financeiras, por sua parcimônia e aderência às observações, embora séries específicas possam requerer parâmetros diversos.

As correlações entre fatores também podem ser ponderadas no tempo, via *EWMA* ou Garch multivariado. No entanto algumas restrições devem ser impostas, como o uso de um mesmo parâmetro de decaimento para todas as séries, a fim de evitar problemas de consistência na matriz de covariância (que deve ser positiva definida).

***VaR* Histórico**

O *VaR* histórico é um modelo direto e intuitivo, usando a distribuição real dos retornos dos ativos. Tomando-se o conjunto de retornos ordenados $X = \{X_1, \dots, X_T\}; X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_T$; obtemos o estimador de X_α diretamente do quantil desejado da amostra ordenada (interpolando entre observações adjacentes, se necessário). O *VaR* equivalente ao quantil obtido pode ser financeiro ou percentual, coerente com o perfil de retornos obtido.

O *VaR* histórico tem uma implementação muito simples, os fatores primitivos de risco são inicialmente agregados (correlação implícita mantida) e depois o resultado consolidado da carteira é ordenado e o quantil obtido. Além da baixa demanda computacional, o uso da estrutura real de caudas da carteira consolidada contorna um grande problema do modelo paramétrico.

Uma limitação importante do *VaR* histórico é que a seleção da janela amostral é crucial para a aderência do modelo. Janelas muito longas tendem a gerar uma inércia grande no resultado de *VaR*, além de eventualmente incorporarem contextos de mercado distantes da realidade atual. Janelas curtas podem gerar discontinuidades nos resultados não desejadas. Além disso, consolidar ativos com histórias passadas diversas em uma mesma janela pode tornar o modelo pouco coerente. Modelos ponderados no tempo de *VaR* histórico podem ser utilizados, mas sua instabilidade potencial na determinação do tamanho do conjunto de extremos tira parte do apelo da implementação. Com relação à estrutura de caudas, em uma janela de T observações o modelo histórico não fornece nenhuma informação a respeito de quantis inferiores a $1/T$.

***VaR* por Simulação**

O *VaR* simulado gera aleatoriamente a trajetória no tempo dos fatores de risco (mantida a estrutura de correlações) e avalia a distribuição resultante no

horizonte desejado. O processo de geração aleatória pode se basear em uma distribuição *a priori* para o processo estocástico, ou usar a distribuição real dos fatores, sorteando com reposição seus retornos (*bootstrap*).

Os modelos por simulação são muito utilizados em carteiras com alto grau de não linearidade no comportamento de seus ativos (como carteiras de opções). A avaliação plena dos processos permite capturar distribuições não usuais de ativos, que eventualmente podem não admitir solução analítica de apreçamento.

A maior limitação dos modelos de simulação (além das premissas sobre o processo estocástico subjacente a cada ativo) é a demanda computacional, que pode se tornar inviável para uma carteira muito grande e de estrutura complexa.

Nesta seção foram usados os modelos paramétricos com volatilidade não condicional, *EWMA* e Garch, além do modelo histórico, na comparação com a distribuição obtida pela Teoria dos Valores Extremos.

5.2.3

Análise de Componentes Principais

A Análise de Componentes Principais é uma ferramenta de estatística multivariada que busca reduzir a dimensionalidade de um conjunto de dados, encontrando os fatores principais que determinam a sua variância conjunta. Esses fatores (ortogonais) são obtidos através de uma transformação linear sobre a matriz de covariância dos dados. O Teorema da Decomposição Espectral determina que qualquer matriz simétrica A ($n \times n$), pode ser definida por:

$$A = \Psi L \Psi' \quad (45)$$

onde L é uma matriz diagonal de autovalores de A (ordenados de forma decrescente) e Ψ é uma matriz ortogonal, ordenada por colunas de autovetores que geram uma base ortonormal em \mathfrak{R}^n .

Intuitivamente, se aplicarmos a decomposição de (45) a uma matriz A de covariância de vértices fixos da ETTJ, cada coluna da matriz de autovetores representa um fator principal determinando a dinâmica conjunta dos segmentos da

curva. A matriz de autovalores fornece os pesos ou poder explanatório de cada componente principal para a variância total da curva.

Litterman e Scheinkman (1988) aplicaram a técnica de ACP para obter os fatores determinantes na evolução curva de títulos norte-americanos. A conclusão foi que os quatro primeiros fatores explicam mais de 99,5% da variabilidade da curva, e podem ser interpretados intuitivamente como (em ordem de peso): variação de nível, variação de inclinação, variação de curvatura e variação de dupla curvatura.

A ACP será usada para o presente estudo na determinação das quantidades de *hedging* de operações parcialmente imunizadas, e sua aplicação será detalhada na seção seguinte. É importante notar que os fatores sugeridos por Litterman e Scheinkman são idealizados, a inspeção gráfica dos componentes principais mostra movimentos um pouco mais híbridos. Por isso ela será usada como ferramenta auxiliar em operações de imunização e comparada a estratégias similares usando movimentos “limpos” ou idealizados (via polinômios de Legendre).

5.2.4

Operações de Imunização

Operações de imunização são estratégias protegidas contra determinados movimentos principais da curva de juros, mas sensíveis a outros. Para a montagem de uma estratégia de imunização é crucial conhecer a sensibilidade dos títulos (ou futuros de juros) a variações na taxa negociada. Considerando VF o valor futuro de um título sem pagamento intermediário de cupons, VP o seu valor presente, r a taxa negociada anualizada e n o número de dias úteis para o vencimento (lembrando que estamos usando convenções locais: capitalização composta e dias úteis), temos a relação:

$$VP = \frac{VF}{(1+r)^{n/252}} \quad (46)$$

A aproximação de primeira ordem para a sensibilidade do valor presente em relação a variações de taxa é imediata. Considerando $n/252 = t$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial r} VP = \frac{-tVF}{(1+r)^{t+1}} \quad (47)$$

E para a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} VP = \frac{t(t+1)VF}{(1+r)^{t+2}} \quad (48)$$

Chamando $t/(1+r)$ de duração modificada (DM) e $t(t+1)/(1+r)^2$ de convexidade (C), usa-se a expansão de Taylor para obter uma aproximação de segunda ordem para a sensibilidade do VP do título a variações de taxa:

$$\Delta VP \approx -DM.VP.\Delta r + \frac{1}{2}.C.VP.(\Delta r)^2 \quad (49)$$

As razões de *hedging* foram calculadas usando apenas aproximações lineares, de primeira ordem, para a sensibilidade dos títulos. A assimetria introduzida pela convexidade não é desejável para o propósito do estudo, visto que as operações podem ser montadas no mercado futuro de juros compradas ou vendidas, com perfeita simetria. Os resultados da carteira foram obtidos via avaliação plena, dispensando aproximações de qualquer ordem, mas no cálculo das quantidades de *hedging* apenas a duração modificada foi usada como constante de proporcionalidade.

Um exemplo inicial de operação imunizada: se desejada uma operação imune a movimentos paralelos de curva, no mínimo dois vértices da curva deverão ser utilizados. Os financeiros de cada título devem ser ponderados pelas razões das respectivas sensibilidades, com sinais trocados. Assim, para dois vencimentos t_1 e t_2 , com títulos com sensibilidades de primeira ordem (equação 47) a variações de taxa $\partial r : S_1; S_2$, vamos arbitrar a quantidade do primeiro como Q_1 . A quantidade do segundo título será obtida resolvendo a equação:

$$Q_1.VP_1.S_1 + Q_2.VP_2.S_2 = 0 \quad (50)$$

Este seria um exemplo de operação imunizada contra um movimento “puro” de curva (paralelo). Generalizando, para encontrar as quantidades de *hedging* contra os n primeiros fatores “puros” de curva vamos considerar o vetor coluna ϖ de dimensão $(n+1)$, onde o i -ésimo elemento corresponde ao produtório $Q_i V P_i S_i$. Vamos assumir também uma matriz Λ , de dimensão $(n \times n+1)$, com cada elemento da linha i e coluna $j = L_{i-1}(x_j) =$ polinômio de Legendre de grau $i-1$ para o vencimento x_j (transposto para o intervalo $[-1,1]$). Arbitrando a quantidade inicial para algum dos $n+1$ ativos necessários à imunização, resta resolver o sistema:

$$\Lambda \varpi = 0 \quad (51)$$

Para o *hedging* usando Análise de Componentes Principais, decomposta a matriz de covariância da ETTJ, vamos considerar uma matriz Θ de dimensão $(n \times n+1)$, obtida a partir da matriz Ψ de autovetores de A . Transpondo Ψ , vamos obter a relação $\Theta_{i,j} = \Psi'_{i,I(j)}$, onde $I(j)$ representa a coluna da matriz transposta correspondente ao vértice de vencimento do ativo j . Assim, novamente arbitramos a quantidade de um dos vértices e resolvemos:

$$\Theta \varpi = 0 \quad (52)$$

No primeiro caso estamos nos imunizando contra movimentos idealizados de curva, e no segundo contra os fatores principais de sua dinâmica.

5.2.5

Implementação

Para a implementação dos modelos foi usada a mesma janela de dados da seção 5.1, mas tendo como vértice inicial 126 dias e final 756 dias. A janela foi dividida em dois períodos: o primeiro (*in-sample*) vai de 01/04/2003 a 30/12/2004 (438 observações). O segundo (*out-of-sample*) de 03/01/2005 a 29/09/2006 (436 observações). Todos os modelos foram parametrizados pela base *in-sample* e sua aderência comparada com a base fora da amostra.

Para as estratégias imunizadas, foram escolhidos os seguintes vértices (em dias úteis):

L_0 = Direcional: 378 dias

L_1 = Imunização contra movimentos paralelos: 126 e 756 dias

L_2 = Imunização contra movimentos paralelos e de rotação: 126, 378 e 756 dias

L_3 = Imunização contra movimentos paralelos, de rotação e curvatura: 126, 252, 504 e 756 dias

Os vértices foram escolhidos por serem equidistantes, mantendo a simetria de cada operação. O valor futuro de cada contrato foi trazido a valor presente pelas taxas vigentes no último dia da base *in-sample*.

Usando as equações (51) e (52), foram encontradas as seguintes quantidades de contratos para cada classe de estratégia (posições compradas em *VP* estão positivas):

Tabela 2 – Quantidades de *hedging* – Legendre

Legendre				
vértice	L0	L1	L2	L3
126		100	100	100
252				-128
378	100		-70	
504				90
756		-25	25	-25

Tabela 3 – Quantidades de *hedging* - ACP

ACP				
vértice	L0	L1	L2	L3
126		100	100	100
252				-111
378	100		-59	
504				85
756		-13	26	-26

No caso da Análise de Componentes Principais, a aplicação à base *in-sample* resultou nos seguintes autovetores (três primeiros em poder explanatório):

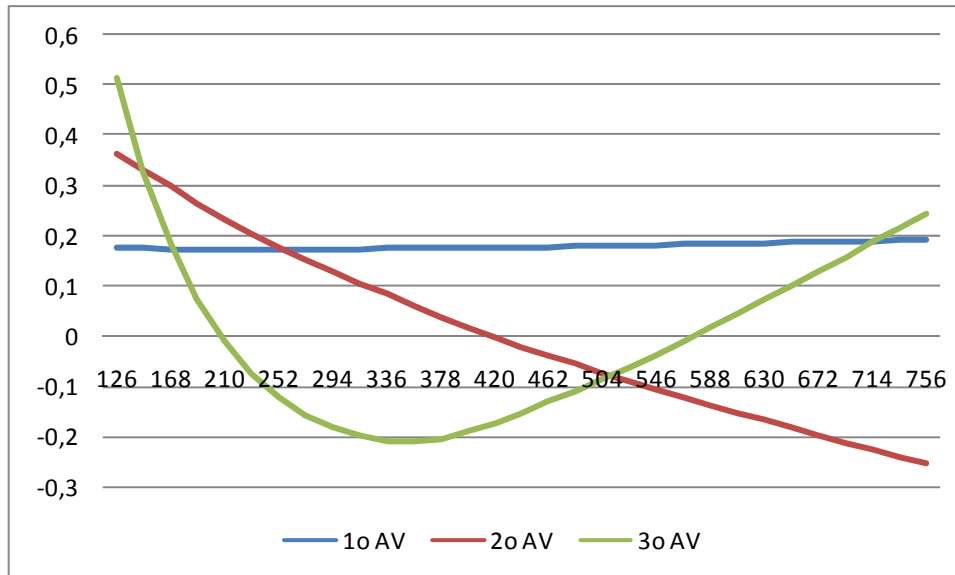


Figura 8 – Autovetores mais significativos da ACP

Que correspondem aos movimentos sugeridos por Litterman e Scheinkman, e representam 99,65% da variabilidade da curva local.

Encontradas as razões de *hedging*, os resultados foram calculados para cada carteira consolidada sobre uma base hipotética V_o . Os modelos de risco foram implementados sobre os resultados já consolidados de todos os vértices. Como a base é fixa para cada estratégia, sem adendos de novos fatores de risco, isso evitou alguns problemas de consistência na reconciliação de parâmetros de correlação.

Obtidos os resultados agregados por estratégia, as caudas superiores e inferiores de retornos foram analisadas de forma independente, visto que as posições poderiam ser compradas ou vendidas. Cabe notar que dependendo da forma da curva de juros, cada estratégia poderia ter um custo de carregamento associado. Esse custo foi desprezado, por ser imaterial em relação aos movimentos de taxas.

Os modelos de risco utilizadas partiram das seguintes premissas (parâmetros estimados para cada estratégia):

VaR não condicional: janela móvel de 252 dias

VaR histórico: janela de 436 dias, para capturar informação sobre o intervalo de confiança de 0,25%

VaR condicional (EWMA): parâmetros de decaimento obtidos in-sample, por minimização do erro quadrático.

VaR condicional (Garch): Usado o modelo Garch (1,1), parametrizado *in-sample* e reparametrizado no meio da amostra de teste.

TVE: q calculado para cada cauda *in-sample* e k atualizado diariamente, sobre uma janela móvel (poderia ser usada uma janela crescente, diminuindo a variância do estimador).

Os resultados de cada modelo foram avaliados sob duas medidas: número de violações e magnitude de perdas esperadas.

5.2.6

Resultados

Uma das medidas mais utilizadas de validação, a frequência de violações observada para cada modelo foi comparada com a frequência esperada. Cada observação da amostra de teste tem α de chance de superar o *VaR* (se o modelo for perfeito). Podemos considerar uma variável aleatória X_t com distribuição de Bernoulli, assumindo valor 1 caso o envelope de *VaR* seja quebrado, e 0 caso contrário. Em T observações temos que:

$$\sum_{t=1}^T X_t \sim \text{distribuição binomial com média } T\alpha \text{ e variância } T\alpha(1-\alpha) \quad (53)$$

Podemos testar o modelo binomial por razão de verossimilhança, assumindo a hipótese nula de nível de significância igual ao nominal do *VaR* (α)

contra a proporção de violações efetivamente observada (p). A estatística possui distribuição qui-quadrada com 1 grau de liberdade:

$$LR = -2 \ln[(1 - \alpha)^{(1-\hat{p})^T} \alpha^{\hat{p}^T}] + 2 \ln[(1 - \hat{p})^{(1-\hat{p})^T} \hat{p}^{\hat{p}^T}] \quad (54)$$

Kupiec (1995) usou a estatística acima para mapear regiões de validação (limites superiores e inferiores de violações) sob determinados níveis de significância.

Os dados de todas as estratégias foram comparados em termos de estatística de violações, e estão descritos a seguir. O primeiro cabeçalho refere-se à metodologia usada na composição das razões de *hedging* (Legendre ou ACP). O segundo cabeçalho informa o modelo de *VaR* usado. Cada tipo de operação de imunização foi analisada com segregação de caudas superiores e inferiores, e a estatística *LR* de violações computada. Os resultados estão tabelados a seguir:

Tabela 4 – Estatística de Violações – Modelo não Condicional

legendre							
nao condicional							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		7	3	3	3
		frequencia		1,61%	0,69%	0,69%	0,69%
		LR		0,000163	0,487915	0,598493	0,132497
	cauda inferior	dias		14	5	5	4
		frequencia		3,21%	1,15%	1,15%	0,92%
		LR		0,067365	0,763406	0,101648	0,031964
L1	cauda superior	dias		21	7	4	2
		frequencia		4,82%	1,61%	0,92%	0,46%
		LR		0,859644	0,242792	0,268694	0,434869
	cauda inferior	dias		17	2	1	1
		frequencia		3,90%	0,46%	0,23%	0,23%
		LR		0,273377	0,203709	0,369734	0,930242
L2	cauda superior	dias		16	9	7	7
		frequencia		3,67%	2,06%	1,61%	1,61%
		LR		0,181835	0,050777	0,009396	0,000156
	cauda inferior	dias		14	4	3	3
		frequencia		3,21%	0,92%	0,69%	0,69%
		LR		0,067365	0,860512	0,598493	0,132497
L3	cauda superior	dias		13	7	5	5
		frequencia		2,98%	1,61%	1,15%	1,15%
		LR		0,037125	0,242792	0,101648	0,006351
	cauda inferior	dias		8	3	1	1
		frequencia		1,83%	0,69%	0,23%	0,23%
		LR		0,000528	0,487915	0,369734	0,930242

ACP							
nao condicional							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		7	3	3	3
		frequencia		1,61%	0,69%	0,69%	0,69%
		LR		0,000163	0,487915	0,598493	0,132497
	cauda inferior	dias		14	5	5	4
		frequencia		3,21%	1,15%	1,15%	0,92%
		LR		0,067365	0,763406	0,101648	0,031964
L1	cauda superior	dias		16	6	4	4
		frequencia		3,67%	1,38%	0,92%	0,92%
		LR		0,181835	0,455193	0,268694	0,031964
	cauda inferior	dias		13	3	1	1
		frequencia		2,98%	0,69%	0,23%	0,23%
		LR		0,037125	0,487915	0,369734	0,930242
L2	cauda superior	dias		22	5	5	5
		frequencia		5,05%	1,15%	1,15%	1,15%
		LR		0,964996	0,763406	0,101648	0,006351
	cauda inferior	dias		15	3	0	0
		frequencia		3,44%	0,69%	0,00%	0,00%
		LR		0,114191	0,487915		
L3	cauda superior	dias		15	7	6	4
		frequencia		3,44%	1,61%	1,38%	0,92%
		LR		0,114191	0,242792	0,033055	0,031964
	cauda inferior	dias		8	1	1	1
		frequencia		1,83%	0,23%	0,23%	0,23%
		LR		0,000528	0,051218	0,369734	0,930242

Tabela 5 – Estatística de Violações – Modelo EWMA

legendre							
EWMA							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		24	11	8	8
		frequencia		5,50%	2,52%	1,83%	1,83%
		LR		0,634048	0,007364	0,002367	2,01E-05
	cauda inferior	dias		27	16	10	10
		frequencia		6,19%	3,67%	2,29%	2,29%
		LR		0,26983	1,58E-05	0,000109	2,39E-07
L1	cauda superior	dias		27	12	10	7
		frequencia		6,19%	2,75%	2,29%	1,61%
		LR		0,26983	0,002481	0,000109	0,000156
	cauda inferior	dias		17	6	4	4
		frequencia		3,90%	1,38%	0,92%	0,92%
		LR		0,273377	0,455193	0,268694	0,031964
L2	cauda superior	dias		29	13	9	6
		frequencia		6,65%	2,98%	2,06%	1,38%
		LR		0,131198	0,000776	0,000535	0,00107
	cauda inferior	dias		19	6	6	2
		frequencia		4,36%	1,38%	1,38%	0,46%
		LR		0,529689	0,455193	0,033055	0,434869
L3	cauda superior	dias		34	20	16	6
		frequencia		7,80%	4,59%	3,67%	1,38%
		LR		0,01288	3,85E-08	1,46E-09	0,00107
	cauda inferior	dias		24	5	5	4
		frequencia		5,50%	1,15%	1,15%	0,92%
		LR		0,634048	0,763406	0,101648	0,031964

ACP							
EWMA							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		24	11	8	8
		frequencia		5,50%	2,52%	1,83%	1,83%
		LR		0,634048	0,007364	0,002367	2,01E-05
	cauda inferior	dias		27	16	10	10
		frequencia		6,19%	3,67%	2,29%	2,29%
		LR		0,26983	1,58E-05	0,000109	2,39E-07
L1	cauda superior	dias		25	11	8	6
		frequencia		5,73%	2,52%	1,83%	1,38%
		LR		0,491574	0,007364	0,002367	0,00107
	cauda inferior	dias		16	6	3	2
		frequencia		3,67%	1,38%	0,69%	0,46%
		LR		0,181835	0,455193	0,598493	0,434869
L2	cauda superior	dias		32	16	10	8
		frequencia		7,34%	3,67%	2,29%	1,83%
		LR		0,035559	1,58E-05	0,000109	2,01E-05
	cauda inferior	dias		23	8	6	6
		frequencia		5,28%	1,83%	1,38%	1,38%
		LR		0,793747	0,116608		
L3	cauda superior	dias		34	20	16	6
		frequencia		7,80%	4,59%	3,67%	1,38%
		LR		0,01288	3,85E-08	1,46E-09	0,00107
	cauda inferior	dias		24	5	5	4
		frequencia		5,50%	1,15%	1,15%	0,92%
		LR		0,634048	0,763406	0,101648	0,031964

Tabela 6 – Estatística de Violações – Modelo Garch

legendre							
garch							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		7	4	2	1
		frequencia		1,61%	0,92%	0,46%	0,23%
		LR		0,000163	0,860512	0,901354	0,930242
	cauda inferior	dias		17	6	4	3
		frequencia		3,90%	1,38%	0,92%	0,69%
		LR		0,273377	0,455193	0,268694	0,132497
L1	cauda superior	dias		18	6	3	0
		frequencia		4,13%	1,38%	0,69%	0,00%
		LR		0,389859	0,455193	0,598493	
	cauda inferior	dias		13	2	1	1
		frequencia		2,98%	0,46%	0,23%	0,23%
		LR		0,037125	0,203709	0,369734	0,930242
L2	cauda superior	dias		15	8	7	5
		frequencia		3,44%	1,83%	1,61%	1,15%
		LR		0,114191	0,116608	0,009396	0,006351
	cauda inferior	dias		6	1	0	0
		frequencia		1,38%	0,23%	0,00%	0,00%
		LR		4,35E-05	0,051218		
L3	cauda superior	dias		13	8	7	4
		frequencia		2,98%	1,83%	1,61%	0,92%
		LR		0,037125	0,116608	0,009396	0,031964
	cauda inferior	dias		12	0	0	0
		frequencia		2,75%	0,00%	0,00%	0,00%
		LR		0,018995			

ACP							
garch							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		7	4	2	1
		frequencia		1,61%	0,92%	0,46%	0,23%
		LR		0,000163	0,860512	0,901354	0,930242
	cauda inferior	dias		17	6	4	3
		frequencia		3,90%	1,38%	0,92%	0,69%
		LR		0,273377	0,455193	0,268694	0,132497
L1	cauda superior	dias		15	6	3	2
		frequencia		3,44%	1,38%	0,69%	0,46%
		LR		0,114191	0,455193	0,598493	0,434869
	cauda inferior	dias		12	1	1	1
		frequencia		2,75%	0,23%	0,23%	0,23%
		LR		0,018995	0,051218	0,369734	0,930242
L2	cauda superior	dias		14	6	5	4
		frequencia		3,21%	1,38%	1,15%	0,92%
		LR		0,067365	0,455193	0,101648	0,031964
	cauda inferior	dias		9	1	0	0
		frequencia		2,06%	0,23%	0,00%	0,00%
		LR		0,001509	0,051218		
L3	cauda superior	dias		13	8	7	3
		frequencia		2,98%	1,83%	1,61%	0,69%
		LR		0,037125	0,116608	0,009396	0,132497
	cauda inferior	dias		8	0	0	0
		frequencia		1,83%	0,00%	0,00%	0,00%
		LR		0,000528			

Tabela 7 - Estatística de Violações – Modelo Histórico

legendre							
historico							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		9	2	2	1
		frequencia		2,06%	0,46%	0,46%	0,23%
		LR		0,001509	0,203709	0,901354	0,930242
	cauda inferior	dias		9	2	2	1
		frequencia		2,06%	0,46%	0,46%	0,23%
		LR		0,001509	0,203709	0,901354	0,930242
L1	cauda superior	dias		19	2	1	1
		frequencia		4,36%	0,46%	0,23%	0,23%
		LR		0,529689	0,203709	0,369734	0,930242
	cauda inferior	dias		11	1	1	0
		frequencia		2,52%	0,23%	0,23%	0,00%
		LR		0,00896	0,051218	0,369734	
L2	cauda superior	dias		18	5	2	2
		frequencia		4,13%	1,15%	0,46%	0,46%
		LR		0,389859	0,763406	0,901354	0,434869
	cauda inferior	dias		12	3	2	2
		frequencia		2,75%	0,69%	0,46%	0,46%
		LR		0,018995	0,487915	0,901354	0,434869
L3	cauda superior	dias		14	3	1	1
		frequencia		3,21%	0,69%	0,23%	0,23%
		LR		0,067365	0,487915	0,369734	0,930242
	cauda inferior	dias		10	1	1	1
		frequencia		2,29%	0,23%	0,23%	0,23%
		LR		0,003864	0,051218	0,369734	0,930242

ACP							
historico							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		9	2	2	1
		frequencia		2,06%	0,46%	0,46%	0,23%
		LR		0,001509	0,203709	0,901354	0,930242
	cauda inferior	dias		9	2	2	1
		frequencia		2,06%	0,46%	0,46%	0,23%
		LR		0,001509	0,203709	0,901354	0,930242
L1	cauda superior	dias		16	5	2	0
		frequencia		3,67%	1,15%	0,46%	0,00%
		LR		0,181835	0,763406	0,901354	
	cauda inferior	dias		7	1	0	0
		frequencia		1,61%	0,23%	0,00%	0,00%
		LR		0,000163	0,051218		
L2	cauda superior	dias		22	5	5	5
		frequencia		5,05%	1,15%	1,15%	1,15%
		LR		0,964996	0,763406	0,101648	0,006351
	cauda inferior	dias		15	3	0	0
		frequencia		3,44%	0,69%	0,00%	0,00%
		LR		0,114191	0,487915		
L3	cauda superior	dias		13	4	2	1
		frequencia		2,98%	0,92%	0,46%	0,23%
		LR		0,037125	0,860512	0,901354	0,930242
	cauda inferior	dias		10	0	0	0
		frequencia		2,29%	0,00%	0,00%	0,00%
		LR		0,003864			

Tabela 8 - Estatística de Violações – TVE

legendre							
tve							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		9	2	1	1
		frequencia		2,06%	0,46%	0,23%	0,23%
		LR		0,001509	0,203709	0,369734	0,930242
	cauda inferior	dias		9	2	2	2
		frequencia		2,06%	0,46%	0,46%	0,46%
		LR		0,001509	0,203709	0,901354	0,434869
L1	cauda superior	dias		20	1	1	1
		frequencia		4,59%	0,23%	0,23%	0,23%
		LR		0,68851	0,051218	0,369734	0,930242
	cauda inferior	dias		14	1	1	0
		frequencia		3,21%	0,23%	0,23%	0,00%
		LR		0,067365	0,051218	0,369734	
L2	cauda superior	dias		19	6	4	3
		frequencia		4,36%	1,38%	0,92%	0,69%
		LR		0,529689	0,455193	0,268694	0,132497
	cauda inferior	dias		12	2	0	0
		frequencia		2,75%	0,46%	0,00%	0,00%
		LR		0,018995	0,203709		
L3	cauda superior	dias		16	3	1	1
		frequencia		3,67%	0,69%	0,23%	0,23%
		LR		0,181835	0,487915	0,369734	0,930242
	cauda inferior	dias		5	1	1	1
		frequencia		1,15%	0,23%	0,23%	0,23%
		LR		9,81E-06	0,051218	0,369734	0,930242

ACP							
tve							
	n	436	ic	5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
		violacoes	esperadas	21,8	4,36	2,18	1,09
L0	cauda superior	dias		9	2	1	1
		frequencia		2,06%	0,46%	0,23%	0,23%
		LR		0,001509	0,203709	0,369734	0,930242
	cauda inferior	dias		9	2	2	2
		frequencia		2,06%	0,46%	0,46%	0,46%
		LR		0,001509	0,203709	0,901354	0,434869
L1	cauda superior	dias		12	2	1	0
		frequencia		2,75%	0,46%	0,23%	0,00%
		LR		0,018995	0,203709	0,369734	
	cauda inferior	dias		10	1	1	1
		frequencia		2,29%	0,23%	0,23%	0,23%
		LR		0,003864	0,051218	0,369734	0,930242
L2	cauda superior	dias		22	2	1	1
		frequencia		5,05%	0,46%	0,23%	0,23%
		LR		0,964996	0,203709	0,369734	0,930242
	cauda inferior	dias		11	0	0	0
		frequencia		2,52%	0,00%	0,00%	0,00%
		LR		0,00896			
L3	cauda superior	dias		15	3	1	1
		frequencia		3,44%	0,69%	0,23%	0,23%
		LR		0,114191	0,487915	0,369734	0,930242
	cauda inferior	dias		5	1	1	1
		frequencia		1,15%	0,23%	0,23%	0,23%
		LR		9,81E-06	0,051218	0,369734	0,930242

Uma segunda forma de avaliar a aderência dos modelos considera a magnitude das perdas que superam o VaR . Embora os modelos condicionais de volatilidade não admitam soluções analíticas para perdas esperadas, no caso de um modelo não condicional Gaussiano, a perda esperada para um caso de violação pode ser formalizada como:

$$E[r_t | r_t < \sigma_t Z_\alpha] = -\sigma_t \frac{f(Z_\alpha)}{F(Z_\alpha)} \quad (55)$$

onde $f(x)$ é a função densidade de uma $N(0,1)$; $F(x)$ é a função distribuição de uma $N(0,1)$ e Z_α é o quantil α de uma $N(0,1)$.

Para o modelo histórico, a estimativa de perdas esperadas é imediata, bastando ponderar a estrutura de caudas após o limite de VaR por seus respectivos quantis.

Para a Teoria de Valores Extremos, é possível derivar a expectativa de perdas supondo-se que a cauda da distribuição dos retornos possa ser aproximada assintoticamente por uma distribuição do tipo Pareto:

$$F(x) = 1 - Cx^{-k} \quad (56)$$

e o resultado da integração de (56) pode ser reescrito como:

$$E[R | R < VaR] = \frac{kVaR}{k-1} \quad (57)$$

A partir das equações acima, a soma dos erros absolutos entre perdas esperadas e realizadas foi usada na comparação entre modelos, com os resultados descritos a seguir:

Tabela 9 – Magnitude de Perdas Esperadas - VaR Histórico e TVE

legende					
perdas esperadas					
erro absoluto		5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
L0	n cond	4,23%	1,68%	1,97%	1,89%
	historico	2,58%	1,35%	0,93%	0,27%
	tve	3,21%	0,87%	0,82%	1,24%
L1	n cond	2,16%	0,79%	0,42%	0,27%
	historico	0,50%	0,11%	0,07%	0,02%
	tve	1,36%	0,09%	0,15%	0,12%
L2	n cond	1,05%	0,64%	0,55%	0,65%
	historico	0,80%	0,32%	0,17%	0,06%
	tve	0,93%	0,37%	0,38%	0,26%
L3	n cond	1,04%	0,78%	0,44%	0,48%
	historico	0,74%	0,32%	0,22%	0,07%
	tve	1,10%	0,46%	0,13%	0,06%

ACP					
perdas esperadas					
erro absoluto		5,00%	1,00%	0,50%	0,25%
L0	n cond	4,23%	1,68%	1,97%	1,89%
	historico	2,58%	1,35%	0,93%	0,27%
	tve	3,21%	0,87%	0,82%	1,24%
L1	n cond	0,89%	0,38%	0,18%	0,25%
	historico	0,33%	0,05%	0,01%	
	tve	0,43%	0,03%	0,07%	0,08%
L2	n cond	1,12%	0,31%	0,17%	0,21%
	historico	0,31%	0,06%	0,03%	0,01%
	tve	0,89%	0,09%	0,02%	0,07%
L3	n cond	0,85%	0,47%	0,43%	0,28%
	historico	0,39%	0,18%	0,13%	0,04%
	tve	0,67%	0,15%	0,11%	0,11%

Na comparação de modelos, os do tipo Garch apresentaram aderência satisfatória em níveis de confiança mais elevados (5% a 1%). No caso de níveis mais refinados (0,5% e 0,25%) os modelos histórico e TVE rivalizaram na qualidade das previsões, tanto em estatística de violações quanto em magnitude de perdas esperadas. Na tabela de perdas esperadas, verifica-se que o modelo histórico foi superior ao TVE nos intervalos de 5% e 0,25%, enquanto o segundo apresentou melhor poder explicativo nos intervalos de significância de 1% e 0,5%.

Entre modelos de imunização, nota-se que o *hedge* feito contra componentes principais apresenta retornos com caudas menos pesadas do que as estratégias de imunização contra movimentos “puros” ou idealizados da curva de juros, até intervalos de 1%. Segmentos mais refinados apresentaram caudas igualmente pesadas (em termos proporcionais) nos dois modelos.

5.3

Conclusões

A análise de caudas da ETTJ apresentou alguns resultados relevantes para a continuação da pesquisa. As caudas pesadas e assimétricas se manifestam tanto em operações direcionais quanto em operações de imunização de curva. Mais importante ainda, a descontinuidade característica do mercado de juros de manifesta de forma mais aguda em operações parcialmente travadas, seja via parametrização polinomial ou Análise de Componentes Principais (medida pela relação entre risco ordinário de mercado e regimes de exceção).

Outra observação importante foi a aderência estatística do *VaR* histórico, que superou a TVE em diversas métricas, justificando o uso da distribuição real dos ativos (sob uma janela representativa) no mapeamento da estrutura e evolução da distribuição caudas da ETTJ, com um papel potencialmente relevante no apreamento de derivativos de renda fixa.