4
Modelagem de Curva

Neste capítulo temos um rápido resumo dos principais modelos de evolução dinâmica da ETTJ disponíveis na literatura. O objetivo do capítulo não é o estudo quantitativo aprofundado dos modelos, mas a avaliação das nuances qualitativas de cada processo, e suas implicações para o comportamento da curva – sempre que possível discutindo sua representatividade sob a ótica local.

Outros elementos importantes de análise de curva, como modelos de ajuste e parametrização, e técnicas de interpolação e extrapolação, foram discutidos nos capítulos seguintes, dentro do contexto em que foram utilizados.

4.1
Evolução da Taxa de Curto Prazo

Os processos estocásticos que determinam a evolução das taxas à vista ou a termo de juros (mirando o apreçamento de derivativos) são conhecidos por Modelos de Estrutura a Termo. Nesta seção vamos nos concentrar na modelagem da taxa de curto prazo *r*, observando que, por (12) e (13), a evolução da taxa curta determina e evolução da ETTJ como um todo. Respeitando a notação tradicional a processos de Itô, todos os modelos serão representados diretamente sob a medida neutra ao risco.

(a) Modelo de Vasicek (1977):

$$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t \tag{14}$$

O modelo de Vasicek tem uma grande tratabilidade matemática, por se basear em processo afim do tipo Ornstein-Uhlenbeck. Pelo mesmo motivo ele permite taxas negativas, que são bastante incômodas em economias com taxas básicas muito baixas. No Brasil atual, a possibilidade de que a evolução da taxa cruze o primeiro quadrante parece uma curiosidade remotamente possível e de poucas consequências.

Outra característica importante do modelo de Vasicek – que o distingue diretamente de modelos de renda variável – é o parâmetro de reversão à média θ, com velocidade k. Novamente transpondo para o ambiente local, podemos perceber que a parametrização de θ é extremamente problemática, a não ser que entremos em um modelo não estacionário de média de longo prazo – tratado parcialmente no modelo de Hull e White (1990).

(b) Modelo de Cox, Ingersoll e Ross – CIR (1985):

$$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t \tag{15}$$

Parecido com o modelo de Vasicek, o CIR impede taxas negativas levando a volatilidade ao limite de zero para taxas muito baixas, com reflexão imediata em direção ao parâmetro de reversão. O artigo original foi muito celebrado, por conjugar condições de equilíbrio macro com as premissas usuais de não arbitragem. Sua solução para opções sobre títulos de renda fixa, além de fechada, proporcionou *insights* importantes, que levaram à generalização de toda uma classe de modelos com derivativos apreçados pela transformada de Duffie e Kan (1996).

(c) Modelo de Ho e Lee (1986):

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t \tag{16}$$

O subscrito de tempo no parâmetro determinístico permite ao modelo de Ho e Lee se adequar diretamente a ETTJ vigente na data de apuração. Por isso ele é considerado um modelo de não arbitragem (em um sentido um pouco diferente do seu uso em premissas de neutralidade ao risco: aqui não arbitragem significa que a curva de juros é usada para alimentar a parametrização do modelo, sendo perfeitamente aderente a sua especificação inicial).

(d) Modelo de Hull e White (1990):

$$dr_t = k[\theta_t - r_t]dt + \sigma dW_t \tag{17}$$

Extensão direta do modelo de Vasicek, novamente o subscrito de tempo permite aderência à curva inicial. Uma consequência importantíssima do modelo é a reversão para uma média dependente do tempo (ou do estado presente da curva), apresentando características muito mais próximas da evolução da ETTJ brasileira do que a modelagem de médias estáticas.

(e) Modelo de Black, Derman e Toy - BDT (1990):

$$d \ln r_t = \left[\theta_t + \frac{\sigma'_t}{\sigma_t} \ln r_t \right] dt + \sigma_t dW_t \qquad (18)$$

O modelo BDT é um modelo não estacionário, em que a volatilidade da taxa também é uma função do tempo. A formulação contínua em (18) tira um pouco do sabor original do artigo, proposto como um algoritmo de construção de uma árvore binomial, sem grandes aprofundamentos teóricos (incluindo no texto uma prosaica sugestão de “tentativa e erro” para a busca de fatores recombinantes para a árvore). Uma consequência relevante do modelo é que a reversão à média depende diretamente do nível de volatilidade de taxas, com grande apelo para a dinâmica da curva local, como veremos nos capítulos 5 e 6.

(f) Modelo de Black e Karasinski (1991):

$$d \ln r_t = [\theta_t + k_t \ln r_t] dt + \sigma_t dW_t \qquad (19)$$

O modelo de Black e Karasisnki também foi proposto como uma construção de árvore binomial, só que sem nós equidistantes, permitindo segregar a evolução da volatilidade no tempo da taxa de reversão à média.

Os processos tratados acima estão longe de esgotar a modelagem de taxas de curto prazo, que inclui diversas variantes e extensões dos modelos citados, e também modelos de mais de um fator - Brennan e Schwartz (1982) e Brennan e Longstaff (1992), por exemplo. No entanto, o universo escolhido representa bem os temas centrais tratados na modelagem de taxas de juros: reversão à media global e local, ajuste à curva inicial e dependência temporal do parâmetro de volatilidade.

4.2
A Metodologia de Heath, Jarrow e Morton

A abordagem proposta por Heat, Jarrow e Morton (1992), abreviada para HJM, permite a modelagem da dinâmica inteira da curva de juros, extraindo as condições para a evolução conjugada de seus diversos segmentos.

Partindo de uma formulação direta para a evolução da taxa a termo instantânea:

$$f_{(t,T)} = f_{(0,T)} + \int_0^t \alpha_{(s,T)} ds + \int_0^t \sigma_{(s,T)} dW_s \tag{20}$$

Heat, Jarrow e Morton estabelecem as condições de regularidade para a existência e unicidade de um processo contínuo conjunto para as taxas a termo instantâneas de uma dada curva inicial:

$$df_{(t,T)} = (\sigma_{(t,T,f(t,T))} \int_t^T \sigma_{(t,T,f(t,u))} du) dt + \sigma_{(t,T,f(t,T))} dW_t \tag{21}$$

Com a surpreendentemente simples conclusão de que a tendência do processo depende apenas da função de volatilidade.

O modelo HJM permite uma flexibilização imensa para a dinâmica de curva, incluindo processos não Markovianos (que não dependem apenas do estado presente das variáveis relevantes) e englobando a maior parte dos modelos contínuos como casos especiais de sua forma funcional original. A tratabilidade matemática do modelo depende da especificação do processo escolhido, e pode admitir soluções fechadas ou aproximações numéricas.

Concluindo o capítulo, devemos notar que a grande maioria dos processos de modelagem de curva são contínuos, graças ao ferramental de cálculo estocástico (ou cálculo de Itô, em lugar do cálculo clássico) disponível para soluções elegantes de apreçamento de ativos e derivativos de renda fixa. Consequentemente, temos majoritariamente processos de Wiener ajustados representando o componente aleatório de todos os modelos (com algumas concessões a contadores de Poisson para processos com saltos), com outras funções de densidade determinadas unicamente pelo primeiro e segundo momento das distribuições usadas como base. Uma questão que esta Tese levanta é até que ponto é possível mimetizar momentos de ordem superior a partir da mistura de distribuições derivadas da Gaussiana, especialmente quando esses momentos são extremamente relevantes na modelagem de curva. Eventualmente, modelos que se aproximem da distribuição real dos retornos e sua evolução histórica, respeitando as condições de não arbitragem, podem ser mais aderentes à dinâmica dos ativos de renda fixa brasileiros, com maior poder explicativo e maior precisão no apreçamento destes produtos.