9
Referências bibliográficas

ALMEIDA, C.; DUARTE, A. & FERNANDES, C. **Decomposing and Simulating the Movements of Term Structures in Emerging Eurobonds Markets**. Journal of Fixed Income*,* v.8, pp. 21-31, 1998.

ALMEIDA, C. **Estimação, Teste e Aplicações em Mercados Emergentes: A Estrutura a Termo da Taxa de Juros**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, 2001.

ALMEIDA, C. **Time-Varying Risk Premia in Emerging Markets: Explanation by a Multi-Factor Affine Term Structure Model.** International Journal of Theoretical and Applied Finance*,* v.7, pp. 919-947, 2004.

ALMEIDA, C.; GOMES, R.; LEITE, A.; SIMONSEN, A. & VICENTE, J. **Does Curvature Enhance Forecasting?** International Journal of Theoretical and Applied Finance*,* v.12, pp. 1171-1196, 2009.

ALMEIDA, C. & VICENTE, J. **Term Structure Movements Implicit in Asian Option Prices.** Quantitative Finance, v. 12, pp. 119-134, 2012.

ALMEIDA, C. & VICENTE, J. **The Role of No-Arbitrage on Forecasting: Lessons From a Parametric Term Structure Model**. Journal of Banking & Finance, v. 32, pp. 2695-2705, 2008.

ALMEIDA, C. & VICENTE, J. **The Role of Fixed Income Options on the Risk Assessment of Bond Portfolios.** Sexto Encontro Brasileiro de Finanças, Vitória, 2006.

ARROW, K. **The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing.** Review of Economic Studies, April, pp. 91-96, 1964.

AVELLANEDA, M.; FRIEDMAN, C.; HOLMES, R. & SAMPERI, D. **Calibrating Volatility Surfaces via Relative-Entropy Minimization.** Applied Mathematical Finance, v. 4 pp. 37-64, 1997.

AZEVEDO, R. F. **Apreçamento Não-Paramétrico de Derivativos de Renda Fixa Baseado em Teoria da Informação.** Dissertação de Mestrado, Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro, 2010.

BARBACHAN, J. & ORNELAS, J. **Apreçamento de Opções de IDI usando o Modelo CIR.** Estudos Econômicos, v.33, 2003.

BARBEDO, C.; VICENTE, J. & LION, O. **Pricing Asian Interest Rate Options with a Three-Factor HJM Model.** Revista Brasileira de Finanças, v.8, pp. 9-23, 2010.

BESSADA, O.; COSENZA, C. & Neves, C. **Aplicação do Modelo de Black, Derman & Toy à Precificação de Opções sobre Títulos de Renda Fixa.** Banco Central do Brasil, Working Paper 74, 2003.

BECK, N. & KATZ, J. **What To Do (and Not To Do) with Time-Series Cross-Section Data.** American Political Science Review, v. 89, pp. 634-647, 1995.

BEKAERT, G.; HODRICK, R. & MARSHALL, D. **Peso Problem Explanations for Term Structure Anomalies**. Journal of Monetary Economics, v. 48, pp. 241-270, 2001.

BETANCOURT, R. & KELEJIAN, H. **Lagged Endogenous Variables and the Cochrane-Orkutt Procedure**. Econometrica, v. 49, pp. 1073-78, 1981.

BLACK, F.; DERMAN, E. & TOY, W. **A One-Factor Modelo of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options.** Financial Analysts Journal, January-February, pp. 33-39, 1990.

BLACK, F. & SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. The Journal of Political Economy, v. 81(3), pp. 637-654, 1973.

BLACK, F. & KARASISNKI, P. **Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal.** Financial Analysts Journal, July-August, pp. 52-59, 1991.

BRACE, A. **Engineering BGM.** Chapman & Hall/CRC, 2008.

BRACE, A.; GATAREK, D. & MUSIELA, M. **The Market Model of Interest Rate Dynamics.** Mathematical Finance, v. 7(2), pp. 127-55, 1997.

BRENNAN, M. & SCHWARTZ, E. **An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test os Market Efficiency.** Journal of Financial and Quantitative Analysis, v.17, pp. 301-329, 1982.

BRIGO, D. & MERCURIO, F. **Interest Rate Models: Theory and Practice.** Springer Verlag, 2001.

BRITO, R.; DUARTE, A. & GUILLÉN, O. **Overreaction of Yield Spreads and Movements of Brazilian Interest Rates**. Brazilian Review of Econometrics, v. 24(1), pp. 1-55, 2004.

BUCHEN, P. & KELLY, M. **The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices.** Journal of Financial and Quantitative Analysis, v.31, pp. 143-159, 1996.

9. Referências Bibliográficas

CAMPBELL, J. & SHILLER, R. **Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View**. Review of Economic Studies, v. 58, pp. 495-514, 1991.

CARVALHO, R. **Teoria dos Valores Extremos: Valor em Risco para Ativos de Renda-Fixa.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2006.

CARVALHO, R.; GANEM, M. & BAIDYA, T. **Análise da Dinâmica da Estrutura a Termo de Juros Brasileira sob a Ótica da Teoria de Valores Extremos.** Sexto Encontro Brasileiro de Finanças, Vitória, 2006.

CHERIDITO, P.; FILIPOVIC, D. & KIMMEL, R. **Market Price of Risk Specifications for Affine Models: Theory and Evidence**. Journal of Financial Economics, v. 83, pp. 123-170, 2007.

CHIANG, I. **Skewness and Co-Skewness in Bond Returns.** Financial Management Association, 2008.

CHRISTOFFERSEN, P. **Evaluating Interval Forecasts**. International Economic Review, v. 39, pp. 841-862, 1998.

COCHRANE, D. & ORCUTT, G. **Application Of Least Squares Regression to Relationships Containing Autocorrelated Error Terms**. Journal of the American Statistical Association, v.44, pp. 32–61, 1949.

COCHRANE, J. & PIAZZESI, M. **Bond Risk Premia**. American Economic Review, v. 95(1), pp. 138-160, 2005.

COOK, T. & HAHN, T. **Interest Rate Expectations and the Slope of the Money Market Yield Curve**. Federal Reserve Bank of Richmond Economic Review, v. 76(5), pp. 3-26, 1990.

COX, J.; INGERSOLL, J. & ROSS, S. **A Theory of the Term Structure of Interest Rates.** Econometrica, v. 53, pp. 385-407, 1985.

CUTHBERTSON, K. **The Expectations Hypothesis of the Term Structure: the UK Interbank Market**. Economic Journal, v. 106, pp. 578-592, 1996.

DAI, Q. & SINGLETON, K. **Expectations Puzzles, Time-Varying Risk Premia and Affine Models of the Term Structure**. Journal of Financial Economics, v.63, pp. 415-441, 2002.

DIEBOLD, F. & LI, C. **Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields**. Journal of Econometrics, v. 130, pp. 337-364, 2006.

DIEBOLD, F.; RUDEBUSCH, G. & ARUOBA, B. **The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach**. Journal of Econometrics, v.131, pp. 309-338, 2006.

DUARTE, J. **Evaluating an Alternative Risk Preference in Afinne Term Structure Models**. Review of Financial Studies, v. 17, pp. 370-404, 2004.

DUFFIE, D. & KAN, R. **A Yield Factor Model of Interest Rates.** Mathematical Finance, v.6, 1996.

EMBRECHTS, P.; KLUPPELBERG, C. & MIKOSCH, T. **Modelling Extremal Events for Insurance and finance**. Springer Verlag, Berlin, 1997.

EVANS, C. & MARSHALL, D. **Monetary Policy and the Term Structure of Nominal Interest Rates: Evidence and Theory**. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, v. 49, pp. 53-111, 1998.

FERREIRA, R. **Eventos Extremos nos Mercados Acionários Latino Americanos**. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRJ, 1999.

FILIPOVIC, D. **Term-Structure Models: A Graduate Course.** Springer, New York, 2010.

FISHER, I. **The Theory of Interest**. The Macmillan Co., New York, 1930.

FISHER, M. **Forces That Shape the Yield Curve: Parts 1 and 2**. Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 2001-3, 2001.

GANEM, M.; BAIDYA, T. **Comparação de Modelos de VaR Aplicados a Operações de Imunização de Curva no Mercado Brasileiro de Renda Fixa.** Sétimo Encontro Brasileiro de Finanças, São Paulo, 2007.

GANEM, M.; BAIDYA, T. **Assimetria e Prêmio de Risco na Estrutura a Termo de Juros Brasileira.** Revista Brasileira de Finanças, v.9, pp. 277-301, 2011.

GERLACH, S. & SMETS, F. **The Term Structure of Euro-Rates: Some Evidence in Support of the Expectations Hypothesis**. Journal of International Money and Finance, v. 16, pp. 305-321, 1997.

GIBBS, J. **Elementary Principles of Statistical Mechanics.** Bicentennial Publications, New Haven, 1902.

GLUCKSTERN, M. C. **Aplicação do Modelo de Hull-White à Precificação de Opções sobre IDI.** Tese de Doutorado, EAESP, São Paulo, 2001.

GUILLEN, O. & TABAK, B. **Characterizing the Brazilian Term Structure of Interest Rates**. Banco Central do Brasil, Working Paper 158, 2008.

GULKO, L. **The Entropy Theory of Stock Option Pricing.** International Journal of Theoretical and Applied Finance, v.2, pp. 331-355, 1999.

GULKO, L. **The Entropy Theory of Bond Option Pricing.** International Journal of Theoretical and Applied Finance, v.5, pp. 355-383, 2002.

HAMILTON, J. **Time Series Analysis**. Princeton University Press, Princeton, 1994.

HARRISON, M. & KREPS, D. **Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets**. Journal of Economic Theory, v. 20, pp. 381-408, 1979.

HARRISON, M. & PLISKA, S. **Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading**. Stochastic Processes and their Applications, v.11(3), pp. 215-260, 1981.

HAYEK, F. **Prices and Production**. George Routledge and Sons, London, 1931.

HEAT, D.; JARROW, R. & MORTON, A. **Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation**. Journal of Financial and Quantitative Analysis, v. 25(4), pp. 419-440, 1990.

HILL, B. **A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution.** The Annals of Statistics, v.3, pp. 1163-1174, 1975.

HO, T. & LEE, S. **Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims.** Journal of Finance, v. 41, pp. 1011-1029, 1986.

HULL, J. **Options, Futures, and Other Derivatives**. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.

HULL, J. & WHITE, A. **Pricing Interest Rate Derivatives Securities.** Review of Financial Studies, v.3, pp. 573-592, 1990.

HULL, J. & WHITE, A. **The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility.** Journal of Finance, v.42, pp. 281-300, 1987.

JAMSHIDIAN, F. **LIBOR and Swap Market Models and Measures.** Finance and Stochastics, v. 1, pp. 293-330, 1997.

JAYNES, E. T. **Information Theory and Statistical Mechanics.** The Physical Review, v. 106(4), pp. 620-630, 1957.

KARATZAS, I.; SHREVE, J.; LEHOCZKY, J. & XU, G. **Martingale and Duality Methods fou Utility Maximization in an Incomplete Market**. SIAM J. Control Optimization, v. 29, pp. 702-730, 1991.

KEYNES, M. **The General Theory of Employment, Interest and Money**. Harcourt, Brace and Co., London, 1936.

KUPIEC, P. **Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models**. Journal of Derivatives, v. 2, pp. 73-84, 1998.

LAMOREUAX, C. & LASTRAPES, W. **Forecasting Stock-Return Variance: Toward and Understanding of Stochastic Implied Volatility.** The Review of Financial Studies, v. 6-2, pp. 293-326, 1993.

LAURINI, M. & HOTTA, L. **Extensões Bayesianas do Modelo de Estrutura a Termo de Diebold e Li**. IBMEC, Working Paper 40, 2007.

LEITE, A.; GOMES, R. & VICENTE, J. **Previsão da Curva de Juros: Um Modelo Estatístico com Variáveis Macroeconômicas**. Banco Central do Brasil, Working Paper 186, 2009.

LITTERMAN, R. & SCHEINKMAN, J. **Common Factors Affecting Bond Returns**. Goldman Sachs, Working Paper, 1998.

LONGSTAFF, A. & SCHWARTZ, E. **Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model**. Journal of Finance, v.47, pp. 1259-1282, 1992.

MARKOWITZ, H. **Portfolio Selection**. The Journal of Finance, v. 7(1), pp. 77–91, 1952.

MARTINS, F. **A Teoria dos Valores Extremos: Uma Abordagem Condicional para a Estimação de Valor em Risco no Mercado Acionário Brasileiro.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, 2000.

MENDES, B. **Computing Risk Measures using Extreme Value Theory: An Application to Latin American Stock Markets**. Emerging Markets Quarterly, v.4(2), pp. 25-42, 2000.

MERTON, R. **Theory of Rational Option Pricing**. The Bell Journal of Economics and Management Science, v. 4(1), pp. 141-183, 1973.

MILTERSEN, K.; SANDMANN, K. & SONDERMANN, D. **Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log Normal Interest Rates.** Journal of Finance, v. 52, pp. 409-430, 1997.

MOHAMAD-DJAFARI, A. & DEMOMENT, G. **Estimating Priors in Maximum Entropy Image Processing.** Proceedings of ICASSP, pp. 2069-2072, 1990.

NELSON, C. & SIEGEL, A. **Parsimonious Modeling of Yield Curves**. Journal of Business, v. 60, pp. 473-489, 1985.

PARKS, R. **Efficient Estimation of a System of Regression Equations when Disturbances Are Both Serially and Contemporaneously Correlated**. Journal of the American Statistical Association, v. 62, pp. 500-509, 1967.

PLISKA, S. **Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models**. Wiley-Blackwell, 1997.

RAPOSO, E. **Banco Central do Brasil. O Leviatã Ibérico.** Editora PUC-Rio; Hucitec Editora, Rio de Janeiro, 2011.

REBONATO, R. **The LIBOR Market Model and Beyond.** Princeton University Press, Princeton, 2002.

RUBINSTEIN, M. **Implied Binomial Trees.** Journal of Finance, v. 49, pp. 771-818, 1994.

SHANNON, C. & WEAVER, W. **The Mathematical Theory of Communication.** University of Illinois Press, Urbana, 1949.

SHARPE, W. **Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk**. Journal of Finance, v. XIX (3), pp. 425–42, 1964.

SILVA, M. E. **Precificação de Opções sobre o Futuro de DI com o Modelo de Black, Derman & Toy.** Resenha BM&F, 115, 1997.

SMITH, D. & WHITELAW, R. **Time-Varying Rosk Aversion and the Risk-Return Relation.** Working Paper (2009).

SOLA, M. & DRIFFILL J. **Testing the term Structure of Interest Rates Using a Stationary Vector Autoregression with Regime Switching**. Journal of Economic Dynamics and Control, pp. 601-628, 1994.

SOUZA, L. & SILVA, M. **Teoria dos Valores Extremos para Cálculo de VaR.** 1999.

STUTZER, M. **A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation.** Journal of Finance, v. 51, 1996.

STUTZER, M. & CHOWDHURY, M. **A Simple Nonparametric Approach to Bond Futures Option Pricing.** Journal of Finance, 84, 1999.

THEIL, H. **Economics and Information Theory.** North-Holland, Amsterdam, 1967.

TSAY, R. **Analysis of Financial Time Series**. John Wiley & Sons, New York, 2002.

VEREDA, L.; LOPES, H. & FUKUDA, R. **Estimating VAR Models for the Term Structure of Interest Rates.** Insurance: Mathematics and Economics, v.42, pp. 548-559, 2008.

VASICEK, O. **An Equilibrium Characterization of the Term Strucuture.** Journal of Financial Economics, v. 5, pp. 177-188, 1977

VICENTE, J. & TABAK, B. **Forecasting Bond Yields in the Brazilian Fixed Income Market.** Banco Central do Brasil, Working Paper 141, 2008.

ZELLNER, A. & HIGHFIELD, R. **Calculation of Maximum Entropy Distributions and Approximation of Marginal Posterior Distributions.** Journal of Econometrics, v.37, pp. 195-209, 1988.

10
Apêndice I – Especificação da Regressão (Capítulo 6)

Considerando um sistema de V equações de regressão (sendo V o número de vértices fixos escolhidos da ETTJ) com t = 1...N observações temporais, podemos representar a i-ésima equação na forma:

$$y_i = X_i \beta_i + u_i \qquad \text{(AI.1)}$$

Onde y_i é um vetor N x 1 de observações da i-ésima variável dependente, X_i é uma matriz N x ki observações de ki variáveis independentes (no caso presente três: constante, desvio de corpo e assimetria de caudas), β_i é um vetor ki x 1 de coeficientes de regressão desconhecidos e u_i é um vetor de ruído (média zero) com dimensão N x 1.

Podemos descremos o sistema completo de V equações por $y = X\beta + u$, ou:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_V \end{bmatrix} \qquad \text{(AI.2)}$$

Assumindo que u_i na equação (AI.1) siga um processo autoregressivo estacionário de primeira ordem:

$$u_{it} = \rho_i u_{it-1} + \varepsilon_{it} \qquad \text{(AI.3)}$$

E especificando o valor inicial de u_i:

$$u_{i1} = (1-\rho_i^2)^{-1/2} \varepsilon_i \qquad \text{(AI.4)}$$

Podemos reescrever (AI.1) como:

$$y_i = X_i \beta_i + P_i \varepsilon_i \qquad \text{(AI.5)}$$

Onde E[ε_i]=0; E[$\varepsilon_i\ \varepsilon_i$']= $\sigma_{ii}I$ e P_i é dada por:

$$P_i = \begin{bmatrix} (1-\rho_i^2)^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_i(1-\rho_i^2)^{-1/2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_i^2(1-\rho_i^2)^{-1/2} & \rho_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \rho_i^{N-1}(1-\rho_i^2)^{-1/2} & \rho_i^{N-2} & \rho_i^{N-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(AI.6)}$$

O sistema (AI.2) fica:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_V \end{bmatrix} \qquad \text{(AI.7)}$$

Regredindo por MQO (AI.1) e (AI.3), podemos encontrar o estimador $\hat{\rho}_i$, que fornece a estrutura para cada matriz $\hat{P}_i$. Tratado o problema de autocorrelação temporal, a matriz de covariância contemporânea Σ_c pode ser estimada através da regressão transformada:

$$\hat{P}_i^{-1} y_i = \hat{P}_i^{-1} X_i \beta_i + \hat{P}_i^{-1} P_i \varepsilon_i \qquad \text{(AI.8)}$$

Equivalente a:

$$y_i^* = X_i^* \beta_i + \varepsilon_i^* \qquad \text{(AI.9)}$$

Encontrados os resíduos por MQO de (AI.9), cada elemento s_{ij} de $\hat{\Sigma}_c$ é dado por:

$$s_{ij} = \frac{(y_i^* - X_i^* \hat{\beta}_i)'(y_j^* - X_j^* \hat{\beta}_j)}{(N-k_i)^{1/2}(N-k_j)^{1/2}} \qquad \text{(AI.10)}$$

E a matriz de covariância total, corrigida temporal e espacialmente, é estimada pela relação (usando $\otimes$ como operador do produto de Kronecker):

$$\hat{\Omega} = \hat{P}(\hat{\Sigma}_c \otimes I)\hat{P}' \tag{AI.11}$$

Onde $\hat{P}$ é a matriz diagonal em blocos de $\hat{P}_i$, com dimensão VN x VN.

Finalmente, o vetor de betas de (AI.2) é dado por:

$$\hat{\beta} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}y \tag{AI.12}$$

No caso da regressão restrita, para atender às condições de não arbitragem foram feitas as simplificações necessárias ao modelo acima, impondo β_1= β_2=...= β_V. Os resíduos da regressão final restrita e irrestrita geraram a estatística F para o teste de hipótese da tabela 12.

O modelo de Parks foi questionado por Beck e Katz (1995), sob o argumento de que a correção em dois tempos leva a uma propagação de erros que pode comprometer a estatística dos estimadores. As objeções levantadas valem particularmente para quadros em que a dimensão espacial das observações se aproxima da dimensão temporal (comum em panels geopolíticos, por exemplo). No caso da curva de juros, a relação entre N e V nas sub-bases usadas é de 5/1 aproximadamente, uma razão que sustenta a eficiência da estimação.

O problema da correlação defasada entre fatores de risco e inovações do prêmio foi abordado através de um algoritmo iterativo, seguindo o processo sugerido por Cochrane e Orcutt (1949) para o caso unidimensional. A regressão final usando o vetor beta encontrado em (AI.12) gera novos resíduos que podem realimentar as etapas de estimação da matriz de covariância total a partir de (AI.3), em um processo numérico de refinamento. Betancourt e Kelejian (1981) observam que o algoritmo utilizado, mesmo na presença de endogeneidade defasada, converge para um valor de máximo local da função de verossimilhança dos estimadores. Testando diferentes parâmetros iniciais de correlação temporal, podemos obter o máximo global de verossimilhança, estimador consistente dos betas. Na implementação prática, o processo de parametrização inicial (AI.1 a AI.4) se mostrou suficiente para a convergência global dos estimadores (usando a invariância da segunda casa decimal como sinalizador de saída), obtida geralmente após seis a dez iterações. O estimador dos betas, embora consistente, não possui as mesmas propriedades assintóticas de um modelo puramente exógeno, e particularmente no caso de estruturas de *panel data*, suas métricas de eficiência ainda constituem uma frente aberta de pesquisa na literatura corrente.

11
Apêndice II – Algoritmo de Maximização de Entropia

O algoritmo implementado é uma adaptação dos passos sugeridos em Zellner (1988) e Mohammad-Djafari (1990). A maximização apresentada em (112) pode ser generalizada a $N+1$ restrições da forma:

$$\int \pi(S)\Omega_n(S)\,dS = \kappa_n \qquad \text{(AII.1)}$$

onde $n = 0,..., N$; $\kappa_0 = 1$; $\Omega_0(S) = 1$ e $\Omega_n(S)$ é uma função conhecida de S.

A solução do problema é dada pelo uso de multiplicadores de Lagrange na sua forma tradicional:

$$\pi(S) = \exp\left[-\sum_{n=0}^{N} \lambda_n \Omega_n(S)\right] \qquad \text{(AII.2)}$$

Os lambdas representam *N+1* parâmetros Lagrangianos, $\Lambda = [\lambda_0,...,\lambda_n]$ e podem ser resolvidos por um sistema de *N+1* equações não lineares:

$$G_n(\Lambda) = \int \Omega_n(S)\, \exp\left[-\sum_{n=0}^{N} \lambda_n \Omega_n(S)\right] dS = \kappa_n \qquad \text{(AII.3)}$$

No algoritmo as equações são solucionadas pelo método de Newton, usando a expansão de Taylor sobre os valores de partida dos lambdas, desprezando termos de ordem quadrática ou maior e resolvendo o sistema linear resultante iterativamente. Considerando o vetor de lambdas iniciais como Λ^0, temos:

$$G_n(\Lambda) \cong G_n(\Lambda^0) + (\Lambda - \Lambda^0)'\left[grad\ \ G_n(\Lambda)\right]_{(\Lambda=\Lambda^0)} = \kappa_n \qquad \text{(AII.4)}$$

O vetor de diferenças entre lambdas estimados segue a notação:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda^0 \qquad \text{(AII.5)}$$

E o vetor de diferenças das esperanças de funções:

$$\Psi = \left[k_0 - G_0(\Lambda^0),...,k_N - G_N(\Lambda^0)\right]' \qquad \text{(AII.6)}$$

Considerando ainda $n,i = 0,... ,N$; vamos definir a matriz simétrica X:

$$\mathrm{X} = \left(\frac{\partial G_n(\Lambda)}{\partial \lambda_i}\right)_{(\Lambda=\Lambda^0)} \qquad \text{(AII.7)}$$

Em notação matricial temos (AII.4) representado por:

$$\mathrm{X}\Delta = \Psi \qquad \text{(AII.8)}$$

O sistema é resolvido iterativamente, refinando o vetor de lambdas até que o vetor de diferenças se torne suficientemente pequeno, dentro da precisão pretendida. A cada iteração:

$$\Lambda_t^0 \leftarrow \Lambda = \Lambda_{t-1}^0 + \Delta \qquad \text{(AII.9)}$$

A matriz X requer o cálculo de $N(N$-1)/2 integrais a cada iteração, dada a sua forma funcional:

$$\mathrm{X} = -\int \Omega_n(S)\ \Omega_i(S)\ \exp\left[-\sum_{n=0}^{N}\lambda_n\Omega_n(S)\right]dS \qquad \text{(AII.10)}$$

Os passos do algoritmo envolvem determinar inicialmente $S_{\max}$, $S_{\min}$ e o intervalo de discretização de S. Este é o ponto mais delicado do processo, que tem convergência rápida para funções polinomiais simples. O intervalo [$S_{\max}$, $S_{\min}$] pode truncar uma parte relevante da distribuição, se for muito curto, ou criar um problema de condicionamento da matriz X, se for muito extenso em relação ao núcleo da distribuição.

A solução que melhor se adequou à base estudada foi dada por um intervalo móvel para cada série, com a seguinte especificação:

$$S_{\min} = \mu_{dn} - 10((2\alpha - 1)\sigma_{cn} + (2 - 2\alpha)\sigma_{en};$$

$$S_{\max} = \mu_{dn} + 10((2\alpha - 1)\sigma_{cn} + (2 - 2\alpha)\sigma_{en} \qquad \text{(AII.11)}$$