5 PROPAGAÇÃO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO EM REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

5.1 Introdução de Incerteza de Medição Aplicada a Redes Neurais

Após ter-se conceituado a incerteza de medição é preciso realizar uma análise crítica identificando o que pode influenciar no resultado de uma medição. Sabendo-se que, em geral, as fontes de incerteza estão contidas nos meios e métodos de medição, no ambiente e na definição do mensurando, foi realizado um estudo com o objetivo de possibilitar a melhoria da confiabilidade dos resultados obtidos.

A incerteza está associada ao resultado da medição e não corresponde somente ao erro aleatório do sistema de medição, pois outras componentes são decorrentes da ação de grandezas de influência sobre o processo de medição, como as incertezas da tendência (ou da correção), o número de medições realizadas, a resolução limitada, entre outras.

Sabe-se que a Incerteza pode ser expressa em termos da Incerteza Padrão, da Incerteza Combinada ou da Incerteza Expandida. A Incerteza Padrão (u) de um dado efeito aleatório corresponde à estimativa equivalente a um desvio padrão da ação deste efeito sobre a indicação; A Incerteza Combinada (uc) é estimada considerando a ação simultânea de todas as fontes de incerteza e corresponde a um desvio padrão da distribuição resultante; A Incerteza Expandida (U) é estimada a partir da Incerteza Combinada multiplicada pelo coeficiente t-Student apropriado e reflete a faixa de dúvidas ainda presente nesta medição para uma probabilidade de enquadramento definida, geralmente de 95%.

Outro fator importante que deve ser considerado é a determinação quanto a dependência entre as variáveis de entrada que devem ser classificadas como estatisticamente dependentes ou independentes.

5.2 Variáveis Estatisticamente Dependentes

Variáveis aleatórias são estatisticamente dependentes se suas variações se dão de forma vinculada, ocorrendo uma relação nitidamente definida entre o crescimento de uma e o crescimento da outra de forma proporcional à primeira. Estatisticamente estas variáveis são ditas correlacionadas e seu coeficiente de correlação é unitário (+1).

Há o caso em que o crescimento da primeira variável está atrelado ao decrescimento proporcional da segunda variável. Neste caso estas variáveis possuem correlação inversa e seu coeficiente de correlação é unitário, porém negativo (-1).

Duas variáveis aleatórias podem apresentar dependência estatística parcial, isto é, nem são totalmente dependentes nem totalmente independentes. Nestes casos, o coeficiente de correlação entre estas variáveis pode assumir qualquer valor não inteiro entre -1 e +1.

A indicação de um módulo ou sistema de medição é uma variável aleatória. As variações observadas em uma série de indicações obtidas de medições sucessivas, realizadas nas mesmas condições e do mesmo mensurando, são manifestações desta parcela aleatória. Os fatores que provocam esta aleatoriedade são diversos, podendo ter origem interna no próprio sistema de medição, ou resultarem de efeitos externos provocados por grandezas de influência, como variações ambientais, variações da tensão da rede elétrica, etc.

Nos casos onde dois ou mais módulos da cadeia de medição estão expostos às mesmas grandezas de influência, e seus comportamentos são particularmente sensíveis a uma ou mais destas grandezas de influência, é muito provável que as indicações destes módulos apresentem dependência estatística. Flutuações aleatórias das grandezas de influência podem provocar alterações correspondentes em cada módulo. Estas alterações serão ditas correlacionadas. Quando as principais grandezas de influência são mantidas constantes, as variações em cada módulo possuem uma série de causas secundárias, o que resulta em independência estatística. É sempre possível caracterizar de forma segura o tipo de dependência estatística calculando, para cada caso, o coeficiente de correlação linear.

De uma forma simplificada, em medições indiretas é comum tratar como estatisticamente dependentes as medições de diferentes parâmetros efetuadas pelo mesmo instrumento. Em contrapartida, as medições efetuadas por diferentes sistemas de medição são tratadas como estatisticamente independentes (não correlacionadas).

Recomenda-se combinar as incertezas padrão de cada variável de entrada e, somente após obter a incerteza padrão combinada, estimar a incerteza expandida. Em termos genéricos, pode-se escrever:

$$u(x1 \pm x2 \pm x3 \pm \ldots) = u(x1) + u(x2) + u(x3) + \ldots \qquad \text{(A.14)}$$

Ou seja: *na soma ou subtração de qualquer número de grandezas de entrada estatisticamente dependentes, a incerteza padrão combinada do resultado pode ser estimada pela soma algébrica das incertezas padrão individuais de cada grandeza envolvida.*

É também possível mostrar que:

$$u(k1.x1 \pm k2.x2 \pm k3.x3 \pm \ldots) = k1.u(x1) + k2.u(x2) + k3.u(x3) + \ldots \qquad \text{(A.15)}$$

onde k1, k2, k3, … , são constantes multiplicativas.

5.3 Variáveis Estatisticamente Independentes

Variáveis aleatórias são estatisticamente independentes se suas variações se comportam de forma totalmente desvinculadas, não afetando a relação entre o crescimento momentâneo e aleatório entre elas. Estatisticamente, estas variáveis são independentes ou não correlacionadas, e seu coeficiente de correlação é igual a zero.

As grandezas de entrada são estatisticamente independentes entre si quando não guardam nenhuma forma de sincronismo, sendo remotas as chances que as variações aleatórias levem a uma combinação em que todos os valores extremos sejam atingidos ao mesmo tempo. Para este caso, é possível demonstrar que a forma mais apropriada para combinar estes efeitos é por meio da soma das variâncias. A estimativa para a incerteza padrão combinada será menor do que seria obtido se as grandezas de entrada fossem tratadas como estatisticamente dependentes.

Embora exista uma expressão geral para a estimativa da incerteza padrão associada à combinação de grandezas de entrada estatisticamente independentes, há casos onde as equações são simplificadas.

O valor médio da soma de duas variáveis aleatórias pode ser estimado pela soma dos valores médios de cada variável. A variância da soma pode ser estimada a partir da soma das variâncias de cada variável.

A incerteza padrão associada às grandezas de entrada estatisticamente independentes tem um comportamento estatístico semelhante ao do desvio padrão quando estas são combinadas.

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias estatisticamente independentes. Y será calculado pela soma: $Yy = (X_1 + X_2)$e Z pela diferença: $Z = (X_1 - X_2)$, onde “Y” e “Z” também serão variáveis aleatórias. É possível demonstrar que as médias de “Y” e “Z” podem ser estimadas por:

$$\mu_y = \mu_{X1} + \mu_{X2} \quad \text{(A.16)}$$

$$\mu_z = \mu_{X1} - \mu_{X2} \quad \text{(A.17)}$$

Sendo “X1” e “X2” estatisticamente independentes, é possível demonstrar que os desvios padrões de “Y” e “Z” podem ser calculados a partir dos desvios padrões de “X1” e “X2” por:

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{X1}^2 + \sigma_{X2}^2} \quad \text{(A.18)}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_{X1}^2 + \sigma_{X2}^2} \quad \text{(A.19)}$$

As equações acima mostram que, se X1 e X2 são variáveis estatisticamente independentes, o desvio padrão da sua soma e da sua diferença coincidem, e obtidos pela raiz quadrada da soma dos quadrados de ambos. É possível mostrar que a expressão (A.20) pode ser generalizada para estimar a soma (ou subtração ou combinações de somas e subtrações) de um número limitado de termos:

$$\sigma_{(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_{1\pm})} = \sqrt{\sigma_{X1}^2 + \sigma_{X2}^2 + \cdots + \sigma_{Xp}^2} \quad \text{(A.20)}$$

5.4 Propagação da Incerteza de Medição

A Incerteza de Medição está dividida em funções conhecidas e funções não conhecidas, sendo estas determinante para o seguimento da análise. Na figura 18 mostra-se qual caminho deve ser percorrido para a definição do método mais adequado.

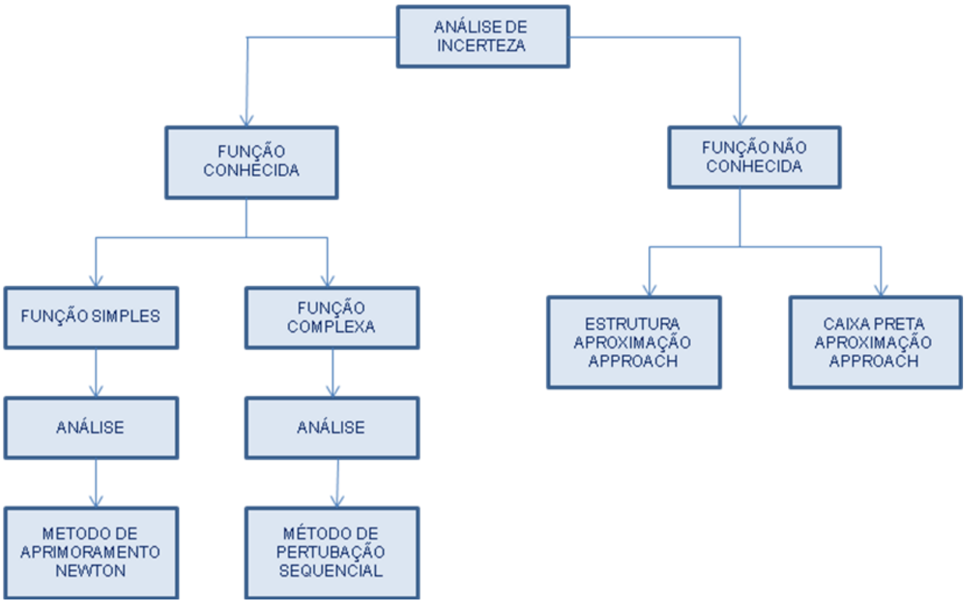

Figura 18 - Fluxograma de Análise da Incerteza (Joni, 2009)

A Rede Neural Artificial aproxima-se mais do método numérico de perturbação sequencial por possibilitar o cálculo e análise da Incerteza sem necessidade de saber a função específica dos dados.

5.5 Incerteza de Medição em Redes Neurais

O estudo desenvolvido para essa dissertação parte de um conjunto de dados obtidos em (Barbosa, 2008), e teve como objetivo de demonstrar a importância de considerar a incerteza de medição dos dados de entrada contribuindo para a obtenção de resultados mais confiáveis.

Tais dados de entrada possuem como base as análises realizadas em laboratórios acreditados, estando assim a incerteza da medição disponível nos certificados de calibração dos equipamentos correspondentes. De posse dessas informações é possível analisar as redes treinadas a partir da perturbação de cada variável de entrada, bem como determinar a propagação da incerteza de medição pela rede.

5.5.1 Incerteza de Medição em Redes Neurais – Método Analítico

Com o objetivo de determinar a melhor metodologia a ser utilizada, considerou-se a inserção desta perturbação de maneira sistemática em cada variável de entrada, sendo que inicialmente o estudo previa o uso do método analítico.

Com base na literatura existente, considerando normas foi elaborada a metodologia abaixo que deve considerar os seguintes passos para os cálculos de incerteza:

- Expressar em termos matemáticos a dependência do mensurando (grandeza de saída) com as grandezas de entrada;
- Identificar e aplicar todas as correções significativas;
- Relacionar todas as fontes de incerteza das variáveis de entrada;
- Calcular a incerteza padrão para as grandezas medidas;
- No caso de valores individuais, por exemplo, valores resultantes de medições prévias, valores de correção ou valores da literatura, adotar a incerteza padrão fornecida ou possa ser calculada. Prestar atenção à forma utilizada na apresentação da incerteza. Se não houver nenhum dado disponível a partir do qual a incerteza padrão possa ser calculada, declarar o valor da incerteza com base na experiência científica, literatura existente;
- Grandezas de entrada para as quais a distribuição de probabilidade seja conhecida ou possa ser suposta, calcular a incerteza padrão. Se somente os limites inferior e superior forem fornecidos ou possam ser estimados, calcular a incerteza padrão;
- Calcular a incerteza para cada grandeza de entrada;
- Calcular a incerteza expandida por meio da multiplicação da incerteza padrão associada à grandeza de saída por um fator de abrangência *k* definido para este caso;
- Relatar o resultado da medição no certificado de calibração incluindo a estimativa do mensurando, a incerteza expandida associada e o fator de abrangência;
- Calcular o coeficiente de sensibilidade que descreve o quanto a estimativa de saída y é influenciada por variações da estimativa de entrada x_i ;

  $x_i\, u(x_i) u(x_i) c_i\; 2\; u(x_i) x_i \pm u(x_i)$
- Os coeficientes de sensibilidade c_i são definidos analiticamente pela expressão (A.21).

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}\; |X_i = x_1 \ldots X_n = x_n \qquad \text{(A.21)}$$

- Onde c_i é o coeficiente de sensibilidade associado com a estimativa de entrada x_i isto é, a derivada parcial da função modelo *f* com relação à variável avaliada para as estimativas de entrada $|X_i$;
- Existem casos, que ocorrem raramente em calibração, onde a função modelo é fortemente não linear ou alguns dos coeficientes de sensibilidade são insignificantes e termos de ordem superior devem ser incluídos na equação acima.
- A grandeza $u_i\ (y)(i = 1, 2, \ldots, N)$ é a contribuição à incerteza padrão associada à estimativa de saída y, resultante da incerteza padrão associada à estimativa de entrada:

$$u_i\ (y) = c_i\ u(x_i) \tag{A.22}$$

- Considerando a formulação descrita acima, e apresentada novamente abaixo por facilidade de leitura, o cálculo da propagação da incerteza envolve o cálculo da Incerteza Padrão da estimativa de saída, sabendo que, para grandezas de entrada não correlacionadas o quadrado da incerteza padrão associada com a estimativa de saída y é dado por:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2\ (y) \tag{A.23}$$

Para exemplificar, será considerada a rede neural artificial com duas entradas e dois neurônios na camada escondida descrita na seção 3.5 do capítulo 3 é mostrada novamente na figura 19.

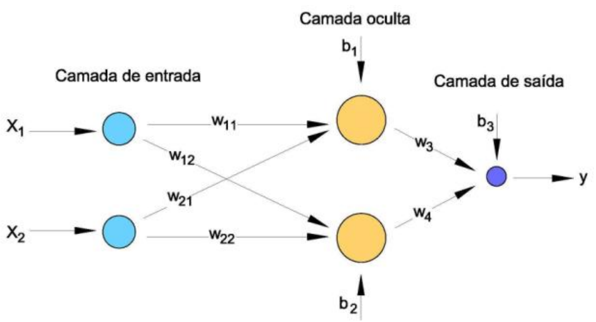

Figura 19 – Rede Neural Modelo Perceptron Mult-Layer

Como já deduzido, esta rede implementa um mapeamento entrada-saída que pode ser descrito pela equação:

$$y = f(x_1, x_2) = \varphi\{b_3 + w_3 \cdot \varphi[b_1 + w_{11} \cdot x_1 + w_{21} \cdot x_2] + w_4 \cdot \varphi[b_2 + w_{12} \cdot x_1 + w_{22} \cdot x_2]\}$$ (A.24)

Para calcular a propagação das incertezas de medição das entradas até a saída da rede neural, inicialmente é necessário calcular os coeficientes de sensibilidade, dados pelas derivadas parciais da variável de saída em relação a cada variável de entrada:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$ (A.25)

Então, calculando a função *f* da Rede Neural, com o auxílio da regra da cadeia, obtém-se:

$$c_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi[g(x_1, x_2)]}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi[x_1]}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \varphi'(x_1) \cdot \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$ (A.26)

Onde

$$g(x_1, x_2) = b_3 + w_3 \cdot \varphi[b_1 + w_{11} \cdot x_1 + w_{21} \cdot x_2] + w_4 \cdot \varphi[b_2 + w_{12} \cdot x_1 + w_{22} \cdot x_2]$$ (A.27)

Agora, tem-se:

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = w_3 \cdot \varphi'(x_1) \cdot \frac{\partial net_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + w_4 \cdot \varphi'(x_1) \cdot \frac{\partial net_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$ (A.28)

Onde

$$net_1(x_1, x_2) = b_1 + w_{11} \cdot x_1 + w_{21} \cdot x_2$$
$$net_2(x_1, x_2) = b_2 + w_{12} \cdot x_1 + w_{22} \cdot x_2$$ (A.29)

Prosseguindo, vem:

$$\frac{\partial net_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = w_{11}$$
$$\frac{\partial net_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} = w_{12}$$ (A.30)

Finalmente:

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = w_3 \cdot \varphi'(x_1) \cdot w_{11} + w_4 \cdot \varphi'(x_1) \cdot w_{12}$$ (A.31)

E pode-se calcular o coeficiente de sensibilidade c_1 como:

$$c_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \varphi'(x_1) \cdot [w_3 \cdot \varphi'(x_1) \cdot w_{11} + w_4 \cdot \varphi'(x_1) \cdot w_{12}]$$ (A.32)

Calculando c_2 de forma similar, tem-se que:

$$c_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \varphi'(x_2)\cdot[w_3 \cdot \varphi'(x_2)\cdot w_{21} + w_4 \cdot \varphi'(x_2)\cdot w_{22}] \tag{A.33}$$

Agora, pode-se calcular o efeito das incertezas de medição das variáveis de entrada na variável de saída, encontrando as incertezas-padrão na saída:

$$u_1(y) = c_1 \cdot u(x_1) = \{\varphi'(x_1)\cdot[w_3 \cdot \varphi'(x_1)\cdot w_{11} + w_4 \cdot \varphi'(x_1)\cdot w_{12}]\}\cdot u(x_1)$$

$$u_2(y) = c_2 \cdot u(x_2) = \{\varphi'(x_2)\cdot[w_3 \cdot \varphi'(x_2)\cdot w_{21} + w_4 \cdot \varphi'(x_2)\cdot w_{22}]\}\cdot u(x_2) \tag{A.34}$$

Como visto anteriormente, a incerteza padrão associada com a estimativa de saída y é dada por:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2\,(y) \tag{A.35}$$

Pode-se notar que, mesmo para uma rede neural muito simples, com somente duas variáveis de entrada, uma camada escondida com dois neurônios e uma saída, a formulação analítica é significativamente extensa. Ao se considerarem as redes neurais realmente empregadas nesta aplicação (com 3 variáveis de entradas e 5 neurônios na camada escondida), tal metodologia analítica torna-se inviável para a estimativa da propagação da incerteza.

Sendo assim, optou-se por uma metodologia utilizando o cálculo numérico, descrita na próxima seção, que possibilitou a obtenção dos resultados que serão apresentados no capítulo 6.

5.5.2 Incerteza de Medição em Redes Neurais – Método Numérico

Dada uma rede neural adequadamente treinada, a metodologia aqui apresentada para análise da propagação da incerteza das variáveis de entrada nesta rede neural se inicia com a obtenção das incertezas de cada uma de suas variáveis de entrada, por meio dos certificados de calibração das mesmas. De posse dos valores de incerteza das variáveis de entrada da rede, deve-se inicialmente estimar numericamente os coeficientes de sensibilidade (que na seção anterior foram deduzidos analiticamente). Para tal, aplicam-se perturbações nas entradas de uma rede neural já treinada, e verifica-se como a resposta da rede (saída) é alterada em função destas perturbações.

Para cada entrada x_i, as perturbações consistem em se fazer, por exemplo,

$$x_i' = x_i + u(x_i)$$
$$x_i'' = x_i - u(x_i)$$
$$\Delta x_i = x_i' - x_i''$$
(A.36) (A.37)

Onde $u(x_i)$ é a incerteza de medição da variável x_i, mantendo as demais variáveis de entrada com seus valores originais, e observar como a saída da rede y é afetada em função destas perturbações em cada variável de entrada, ou seja:

$$y_i' = y\left(x_i{}'\right)$$
$$y_i'' = y\left(x_i{}''\right)$$
$$\Delta y_i = y_i' - y_i''$$
(A.38)

Finalmente, o coeficiente de sensibilidade c_i pode ser estimado por:

$$c_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$
(A.39)

Repetindo-se este procedimento para as *n* variáveis de entrada, obtêm-se todos os coeficientes de sensibilidade necessários, e então pode-se calcular a propagação das incertezas de medição u das variáveis de entrada:

$$u_1(y) = c_1 \cdot u(x_1)$$

$$u_2(y) = c_2 \cdot u(x_2)$$
(A.40)

E a incerteza padrão associada com a estimativa de saída y é dada por:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2\,(y)$$
(A.41)

Os resultados obtidos serão apresentados no capítulo 6 a seguir.