3
Séries temporais

A análise de séries temporais é uma área da estatística dedicada ao estudo de dados orientados no tempo (MONTGOMERY, 2004).

3.1.
Princípios fundamentais

Conforme Box et al. (1994), uma série temporal é um conjunto de observações obtidas sequencialmente ao longo do tempo. Em outras palavras, esses autores descrevem uma série temporal como a realização particular de um processo estocástico. Este, por sua vez, trata-se de um conjunto de todas as possíveis trajetórias que se pode observar (MORETTIN e TOLOI, 2006), veja Figura 18.

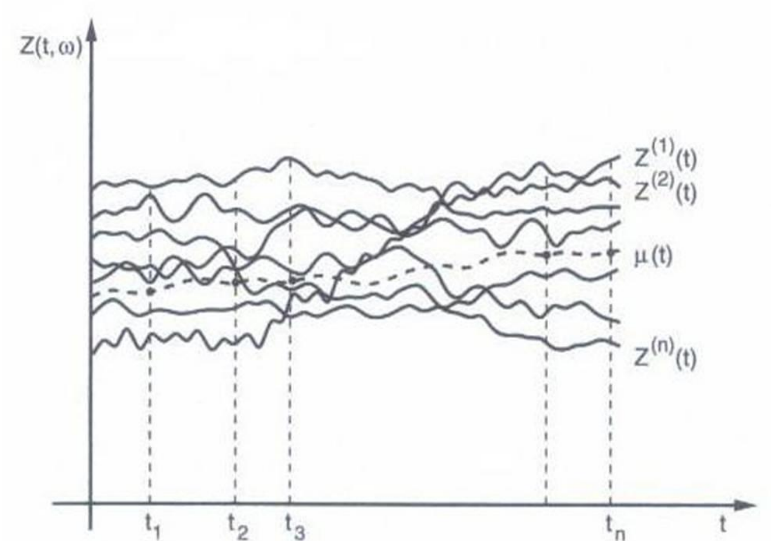

Figura 18 – Processo estocástico interpretado como uma família de trajetórias
Fonte: Morettin e Toloi (2006)

Uma característica intrínseca de uma série temporal é as observações adjacentes serem dependentes.

A série temporal analisada pode ser contínua (observações obtidas em qualquer intervalo de tempo) ou discreta (observações obtidas em intervalos de tempo discreto e equidistantes). Em geral, segundo Nelson (1975 apud

FIGUEREDO, 2008), as observações extraídas de uma série são discretas. Matematicamente, uma série temporal discreta é representada por: $Z_t = (Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n)$, sendo: Z, a variável observável e $t = 1, \cdots, n$, o parâmetro tempo.

Além disso, a série temporal pode ser classificada como: (i) determinística, quando os valores da série podem ser escritos por uma função matemática do tempo $y = f(tempo)$ ou (ii) estocástica, quando a série é escrita em termos de um componente aleatório associado à função matemática do tempo $y = f(tempo, \varepsilon)$.

Uma importante classe de modelos estocásticos para descrever séries temporais são os chamados modelos estacionários, os quais assumem que o processo permanece em equilíbrio ao redor de um nível médio constante (BOX et al., 1994). Entretanto, conforme Morettin e Toloi (2006, p. 4) “a maior parte das séries que encontramos na prática apresenta alguma forma de não-estacionariedade” veja Figura 19. Nesse caso, há necessidade de transformar os dados originais visto que os procedimentos de análise estatística de séries temporais em geral supõem que estas sejam estacionárias.

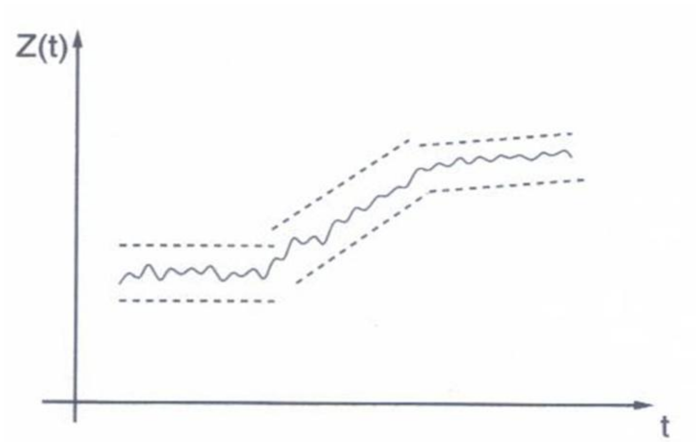

Figura 19 – Série não estacionária quanto ao nível e inclinação
Fonte: Morettin e Toloi (2006)

Na literatura, há alguns testes – como, por exemplo, teste da raiz unitária e teste da normalidade – que verificam a condição de estacionariedade da série. E, transformações – por exemplo, logarítmicas e Box-Cox – que possibilitam a tornar a série estacionária. Para aprofundamento, veja Morettin e Toloi (2006).

Conforme Morettin e Toloi (2006), a análise de séries temporais pode ser realizada em dois enfoques: no domínio do tempo ou no domínio da frequência.

No primeiro enfoque, os modelos propostos são os paramétricos e, no segundo, utilizam-se os modelos não paramétricos.

Pode-se dizer que os principais objetivos da análise de séries temporais são: (i) descrever o comportamento da série de dados por meio de cálculos estatísticos e da representação gráfica da série; (ii) identificar o processo gerador da série; (iii) estimar os valores futuros da série temporal e (iv) monitorar os valores das séries a fim de verificar alterações nas características da mesma.

3.2. Equação de previsão

A equação de previsão consiste em estabelecer valores futuros para a variável observável considerando o histórico de observações desta. Trata-se de obter o valor esperado de Z para o instante t+τ. Assim, obtém-se a eq. (7):

$$\hat{Z}_t(\tau) = E\{Z_{t+\tau}|\underline{Z}_t\} \tag{7}$$

O horizonte de previsão (τ) é o comprimento do tempo contado a partir de uma origem pré-determinada. Ressalta-se que conforme o horizonte de previsão aumenta a precisão da previsão diminui (SOUZA, 2010).

3.2.1. Erro de previsão

O erro de previsão τ-passos-a-frente é definido pela eq. (8):

$$\varepsilon_\tau(t) = Z_t - \hat{Z}_{t-\tau}(\tau) \tag{8}$$

Alguns autores se referem ao erro de previsão por ruído ou, ainda, resíduo.

Segundo Souza (2010), pelo o erro de previsão estimado se verifica o desempenho do modelo testado. Se o modelo foi adequadamente escolhido e os parâmetros corretamente estimados, então, $E(\varepsilon_t) = 0$. Na hipótese de $E(\varepsilon_t) = 0$, tem-se: $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$.

3.3. Modelos paramétricos de previsão para séries temporais

Os valores futuros para a variável observável é estabelecido através de um modelo matemático capaz de representar o comportamento e as características desta. Na literatura existem inúmeros modelos de previsão, veja Gooijer e Hyndman (2006).

Os modelos de previsão podem seguir a abordagem clássica ou bayesiana de previsão. A abordagem clássica se caracteriza por utilizar somente dados do histórico da variável observável. E, a bayesiana, por assumir mais de um modelo estrutural e utilizar além dos dados históricos da variável observável outros fatores externos que forneçam informações relevantes sobre o comportamento desta. Enquadra-se nesta abordagem o modelo linear dinâmico de Harrison & Stevens e, naquela abordagem, os modelos estruturais e os modelos de Box & Jenkins.

Nesta pesquisa, será adotado o modelo estrutural da abordagem clássica.

3.3.1. Modelos estruturais

Os modelos estruturais consideram as observações de uma série temporal $Z_1, \cdots, Z_n$ como somatório dos componentes: nível, sazonalidade e erro aleatório, conforme eq. (9):

$$Z_t = \mu(t) + \rho_t + \varepsilon_t \tag{9}$$

Sendo:
$\mu(t)$: $nível\ médio\ (constante, linear, quadrático)$. Trata-se de um parâmetro desconhecido e indica o comportamento da série ao longo do tempo;
ρ_t: $componente\ sazonal$. Indica a repetição de um padrão na série dentro de um mesmo período sazonal;
ε_t: $erro\ aleatório\ ou\ ruído$, com $E(\varepsilon_t) = 0$ e $Var(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$
$t = 1, \cdots, n$

Ao analisar o comportamento da série de dados ao longo do tempo, pode-se a partir da eq. (9) obter três casos particulares do modelo: modelos para séries localmente constantes, modelos para séries com tendência, modelos para séries com sazonalidade.

Identificado o modelo que melhor representa a série temporal em estudo, então, estimam-se os seus parâmetros. Posteriormente, realiza-se a previsão e, por fim, avalia-se o desempenho preditivo do modelo considerando as métricas descritas no Anexo A.

Programas computacionais são utilizados para realizar a estimação paramétrica, previsão e avaliar o desempenho preditivo do modelo adotado.

Nas subseções seguintes (3.3.1.1, 3.3.1.2 e 3.3.1.3) serão descritos os procedimentos de estimação paramétrica, previsão e atualização de parâmetros dos casos particulares do modelo definido pela eq. (9). Convém ressaltar que estimativas iniciais do nível, da tendência e dos fatores sazonais devem ser fornecidas para realizar a previsão e atualização dos parâmetros, para detalhamento veja Barros (2004) e Morettin e Toloi (2006).

3.3.1.1.
Modelos para séries localmente constantes

Nesse caso, $\mu\,(t) = a_1;\ \forall t = 1, 2, \cdots, n$

Assim, o modelo para séries localmente constantes é dado pela equação:

$$Z_t = a_1 + \varepsilon_t \tag{10}$$

A Figura 20 ilustra o comportamento desse tipo de série.

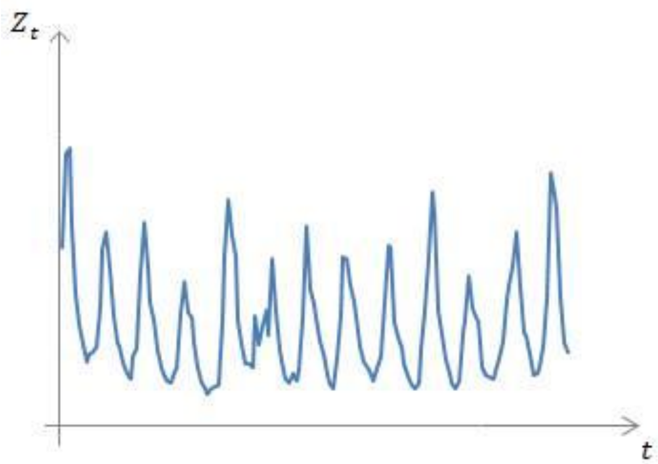

Figura 20 – Série localmente constante
Fonte: Elaboração própria

A previsão pontual τ-passos-a-frente feita no instante t é obtida considerando a eq. (7) e eq. (10), fazendo $t \to t + \tau$, portanto:

$$\hat{Z}_t(\tau) = E\{Z_{t+\tau}|\underline{Z_t}\} = E\{a_1 + \varepsilon_{t+\tau}|\underline{Z_t}\} = \hat{a}_1(t) \tag{11}$$

Na eq. (11), $\hat{a}_1(t)$ é o estimador do parâmetro do modelo a_1 no instante t.

Note que, uma vez determinado um estimador $\hat{a}_1(t)$, conheceremos todas as previsões $\hat{Z}_t(\tau)$. Então, baseado na série histórica de $\underline{Z_t}$, estima-se $\hat{a}_1(t)$ utilizando os seguintes métodos (MORETTIN e TOLOI, 2006; SOUZA, 1983 apud SOUZA, 2010):

(i) **Ingênuo**

O método ingênuo *(naive)* é aquele em que $\hat{a}_1(t)$ é obtido para todo t, conforme segue:

$$\hat{a}_1(t) = Z_t \tag{12}$$

Na eq. (12), Z_t representa o último valor observado. Então, pela eq. (11) e eq.(12), conclui-se que: $\hat{Z}_t(\tau) = Z_t$.

(ii) **Médias móveis simples**

O método de média móvel consiste em calcular a média aritmética das n observações mais recentes, isto é,

$$\hat{a}_1(t) = M_t = \frac{Z_{t-n+1} + \cdots + Z_{t-1} + Z_t}{n} \tag{13}$$

Por analogia, tem-se:

$$\hat{a}_1(t-1) = M_{t-1} = \frac{Z_{t-n} + Z_{t-n+1} + \cdots + Z_{t-1}}{n} \tag{14}$$

Então, fazendo a diferença entre $\hat{a}_1(t)$ e $\hat{a}_1(t-1)$, encontra-se a seguinte equação recursiva para M_t:

$$M_t = M_{t-1} + \frac{Z_t - Z_{t-n}}{n} \tag{15}$$

Sendo, M_{t-1} a média móvel de tamanho n calculada em t-1.

A nomenclatura média móvel é devido ao fato de, a cada período, a observação mais antiga ser substituída pela mais recente, calculando-se uma nova média. Trata-se de uma generalização do método anterior e que considera a série histórica ($\underline{Z_t}$).

Desta forma, pela eq. (11) e eq. (13), pode-se escrever a previsão τ-passos-a-frente, como:

$$\hat{Z}_t(\tau) = M_t \quad ; \quad \tau = 1, 2, \cdots \tag{16}$$

Tal método depende do número de observações (n) utilizadas na média. Note que, se $n = 1$, então o valor mais recente da série é utilizado como previsão de todos os valores futuros. E, se $n = T$, então a previsão será igual à média aritmética de todos os dados observados.

Em geral, o valor de n é escolhido de modo que a soma dos quadrados dos erros de previsão um passo a frente seja minimizado:

$$S\,(n) = \sum_{t=l+1}^{T} \left(Z_t - \hat{Z}_{t-1}(1)\right)^2 \tag{17}$$

Na eq. (17), l é escolhido de modo que o valor inicial utilizado na eq. (15) não influencie a previsão.

(iii) **Amortecimento exponencial simples**

O amortecimento exponencial simples é descrito matematicamente por:

$$\bar{Z}_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)\bar{Z}_{t-1} \tag{18}$$

Na eq. (18) $\bar{Z}_t$ é denominado valor exponencialmente amortecido e $\alpha = 1/n$ é a constante de amortecimento (hiperparâmetro), $0 \leq \alpha \leq 1$.

A eq. (18) também pode ser reescrita conforme segue:

$$\hat{a}_1(t) \;= M_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)\hat{a}_1(t-1) \tag{19}$$

Pela eq. (19) podemos obter por substituições sucessivas:

$$M_t = \alpha Z_t + \alpha(1-\alpha)Z_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Z_{t-2} + \cdots + \alpha(1-\alpha)^t\, M_0 \tag{20}$$

O que significa que o amortecimento exponencial simples é uma média ponderada que dá pesos maiores às observações mais recentes.

Assim, a previsão é dada pelo último valor exponencialmente amortecido, isto é,

$$\hat{Z}_t(\tau) = \alpha Z_t + (1-\alpha)\hat{Z}_{t-1}(\tau+1) \tag{21}$$

A eq. (21) pode ser interpretada como uma equação de atualização de previsão. Note que, $\hat{a}_1$ é atualizado no instante t através de uma combinação linear entre o presente “Z_t” com peso “α” e o passado, “Z_{t-1}” com peso “$1-\alpha$”.

É possível obter para cada valor de α a correspondente idade média das observações. Para isso, considere a variável aleatória I como a idade das observações Z. E, seja $t = T,\ T-1, \cdots\ ;\quad I =\ 0, 1, \cdots$. Assim, obtém-se a idade média das observações:

$$E(I) = \sum_{i=0}^{\infty} i \times \alpha\,(1-\alpha)^i = \frac{1-\alpha}{\alpha} \tag{22}$$

3.3.1.2. Modelos para séries com tendência

Nesse caso, $\mu\,(t) = a_1 + a_2 t\ ;\ \forall t = 1, 2, \cdots, n$

O modelo para séries com tendência é dado pela equação:

$$Z_t =\ a_1 + a_2 t\ + \varepsilon_t \tag{23}$$

A Figura 21 ilustra o comportamento desse tipo de série.

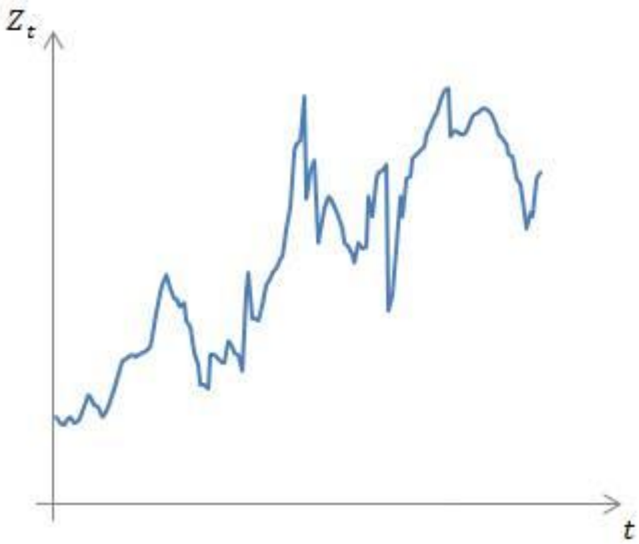

Figura 21 – Série com tendência linear
Fonte: Elaboração própria

Sendo a previsão τ-passos-a-frente no instante t, dado por:

$$\hat{Z}_t(\tau) = E\{Z_{t+\tau}|\underline{Z_t}\} = E\{a_1 + a_2(t+\tau) + \varepsilon_{t+\tau}|\underline{Z_t}\} = \hat{a}_1(t) + [t+\tau]\hat{a}_2(t) \tag{24}$$

Na eq. (24), $\hat{a}_1(t)$ e $\hat{a}_2(t)$ são estimadores do parâmetro a_1 e a_2, respectivamente, no instante t.

Em geral, adota-se translação de origem de tal forma que $t = 0$ coincida com o instante t. Desta forma, a eq. (24) pode ser reescrita como:

$$\hat{Z}_t(\tau) =\ \hat{a}_1(t) + \tau\hat{a}_2(t) \tag{25}$$

Então, baseado na série histórica de $\underline{Z}_t$, estimam-se $\hat{a}_1(t)$ e $\hat{a}_2(t)$ utilizando os seguintes métodos (MORETTIN e TOLOI, 2006; SOUZA, 1983 apud SOUZA, 2010):

(i) **Mínimo quadrado ordinário**

Trata-se de um método de estimação no qual se estima os parâmetros minimizando a soma dos quadrados dos erros, assumindo pesos iguais para todos os erros. Consiste em interpretar o modelo dado pela eq. (23) como um modelo de regressão linear.

(ii) **Médias móveis duplas**

Tal método utiliza o conceito de médias móveis de tamanho n, conforme definido no subitem (ii) da seção 3.3.1.1. Porém, como nesse caso existem dois parâmetros a serem estimados, deve-se extrair outra estatística dos dados para estimar os parâmetros desconhecidos.

A média móvel dupla de tamanho n é definida como:

$$M_t^{[2]} = \frac{M_{t-n+1} + \cdots + M_{t-1} + M_t}{n} \tag{26}$$

Para a obtenção dos estimadores, considera-se, inicialmente, a expressão para o primeiro momento de M_t:

$$\mathrm{E}\{\mathrm{M_t}\} = \frac{1}{n} E\{Z_{t-n+1} + \cdots + Z_{t-1} + Z_t\} \tag{27}$$

A eq. (27) pode ser reescrita como:

$$E\{M_t\} = \frac{1}{n} E\{\bar{Z}_t\} \tag{28}$$

Sendo

$$E\{\bar{Z}_t\} = \left(\frac{Z_t + Z_{t-n+1}}{2}\right) n \tag{29}$$

Assim,

$$E\{\bar{Z}_t\} = \left(\frac{a_1(t) + t a_2(t) + a_1(t) + (t-n+1) a_2(t)}{2}\right) n \tag{30}$$

Logo, substituindo $E\{\bar{Z}_t\}$ na eq. (28), temos:

$$E\{M_t\} = a_1(t) + ta_2(t) - \frac{(N-1)}{2} a_2(t) \tag{31}$$

De maneira análoga, determina-se $E\left\{M_t^{[2]}\right\}$:

$$E\left\{M_t^{[2]}\right\} = \frac{1}{n} E\{M_{t-n+1} + \cdots + M_{t-1} + M_t\} \tag{32}$$

Então, fazendo uso da eq. (31), temos após simplificações:

$$E\left\{M_t^{[2]}\right\} = a_1(t) - (N-1)a_2(t) + ta_2(t) \tag{33}$$

Resolvendo o sistema formado pelas eq. (31) e eq. (33), com translação de origem, encontram-se os estimadores de a_1 e a_2:

$$\hat{a}_1(t) = 2E\{M_t\} - E\left\{M_t^{[2]}\right\} \tag{34}$$

$$\hat{a}_2(t) = \frac{2}{(N-1)} \left\{E\{M_t\} - E\left\{M_t^{[2]}\right\}\right\} \tag{35}$$

(iii) **Amortecimento exponencial duplo**

De maneira análoga ao procedimento descrito no subitem (iii) da seção 3.3.1.1, defini-se sucessivamente as expressões recursivas para M_t e $M_t^{[2]}$ em função da constante de amortecimento $0 \leq \alpha \leq 1$, como segue:

$$M_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)M_{t-1} \tag{36}$$

$$M_t^{[2]} = \alpha M_t + (1-\alpha)M_{t-1}^{[2]} \tag{37}$$

Os estimadores de a_1 e a_2 têm a mesma forma que nas equações (34) e (35). Porém, M_t e $M_t^{[2]}$ são calculados através da eq. (36) e eq. (37).

(iv) **Amortecimento exponencial de Holt**

Esse método é similar ao apresentado no subitem anterior. No entanto, nesse caso, o nível e a tendência são amortecidos. A metodologia de Holt é implementada pela eq. (38) e eq. (39):

$$M_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)(M_{t-1} + \hat{a}_2(t-1)) \tag{38}$$

$$\hat{a}_2(t) = \beta(M_t - M_{t-1}) + (1-\beta)\hat{a}_2(t-1) \tag{39}$$

Sendo:

$M_t = \hat{a}_1$

$M_{t-1} = \hat{a}_1(t-1)$

α, β: constantes de amortecimento

3.3.1.3. Modelos para séries com sazonalidade

Uma série temporal que apresenta componente sazonal se caracteriza por possuir uma repetição periódica, neste texto, denotada por S.

Existem dois tipos de modelos para série com sazonalidade cuja utilização depende das características da série considerada, são eles: modelo aditivo – adequado para séries em que a variância é constante (homocedástica); e modelo multiplicativo – adequado para séries em que a variância cresce com o nível da série (heterocedástica).

O modelo aditivo e o modelo multiplicativo para essas séries são dados, respectivamente, pela eq. (40) e eq. (41)

$$Z_t = \mu(t) + \rho_t + \varepsilon_t \tag{40}$$

$$Z_t = \mu(t) \times \rho_t + \varepsilon_t \tag{41}$$

Nas eq. (40) e eq. (41), ρ_t representa o fator sazonal.

Em geral, o modelo aditivo é adequado para séries físicas e o modelo multiplicativo, para séries de consumo.

O comportamento das séries que apresentam sazonalidade é ilustrado pela Figura 22.

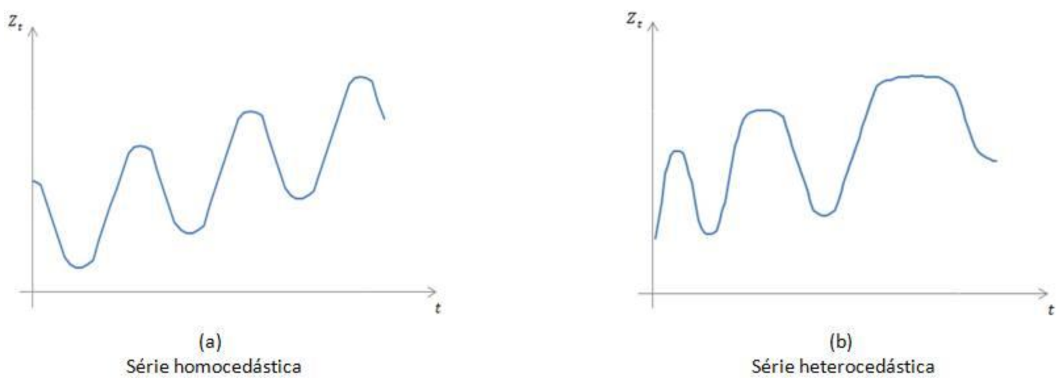

Figura 22 – Séries com sazonalidade
Fonte: Elaboração própria

Dentre as alternativas na literatura, os parâmetros das séries temporais que apresentam sazonalidade (padrão de comportamento mais complexo) podem ser estimados pelos métodos de Holt-Winters. A seguir, o método de Holt-Winters para séries sazonais com nível médio linear é descrito (MORETTIN e TOLOI, 2006; SOUZA, 1983 apud SOUZA, 2010):

(i) **Método de Holt-Winters aplicado ao modelo sazonal multiplicativo**

Considere o modelo:

$$Z_t = (a_1 + a_2 t) \times \rho_t + \varepsilon_t \tag{42}$$

A equação de previsão τ-passos-a-frente é dado por:

$$\hat{Z}_t(\tau) = E\{Z_{t+\tau}|\underline{Z_t}\} = [\hat{a}_1(t) + (t+\tau)\hat{a}_2(t)] \times \hat{\rho}_{t+\tau-S} \tag{43}$$

Sendo:
$\hat{a}_1(t)$: estimador do nível no instante t.

$\hat{a}_2(t)$: estimador da inclinação no instante t.

$\hat{\rho}_{t+\tau-S}$: estimador do fator sazonal para o período $\mathrm{t} + \tau$ atualizado no período $\mathrm{t} + \tau - S$.

Os parâmetros do modelo definido pela eq. (42) são estimados pelo método de Holt-Winters conforme equações:

$$\hat{a}_1(t) = \alpha \left[\frac{Z_t}{\hat{\rho}_{t-S}}\right] + (1-\alpha)[\hat{a}_1(t-1) + \hat{a}_2(t-1)] \tag{44}$$

$$\hat{a}_2(t) = \beta[\hat{a}_1(t) - \hat{a}_1(t-1)] + (1-\beta)\hat{a}_2(t-1)] \tag{45}$$

$$\hat{\rho}_t = \gamma \left[\frac{Z_t}{\hat{a}_1(t)}\right] + (1-\gamma)\hat{\rho}_{t-S} \tag{46}$$

Sendo:
α, β, γ: constantes de amortecimento

$\hat{\rho}_{t-S}$: estimador do fator sazonal para o período mais recente equivalente ao ciclo sazonal.

(ii) **Método de Holt-Winters aplicado ao modelo sazonal aditivo**

Considere o modelo:

$$Z_t = a_1 + a_2 t + \rho_t + \varepsilon_t \tag{47}$$

A equação de previsão τ-passos-a-frente é dado por:

$$\hat{Z}_t(\tau) = E\{Z_{t+\tau}|\underline{Z_t}\} = \hat{a}_1(t) + (t+\tau)\hat{a}_2(t) + \hat{\rho}_{t+\tau-S} \tag{48}$$

Sendo:
$\hat{a}_1(t)$: estimador do nível no instante t.

$\hat{a}_2(t)$: estimador da inclinação no instante t.

$\hat{\rho}_{t+\tau-S}$: estimador do fator sazonal para o período $\mathrm{t}+\tau$ atualizado no período $\mathrm{t}+\tau-S$.

Os parâmetros do modelo definido pela eq. (47) são estimados pelo método de Holt-Winters conforme equações:

$$\hat{a}_1(t) = \alpha[z_t - \hat{\rho}_{t-S}] + (1-\alpha)[\hat{a}_1(t-1) + \hat{a}_2(t-1)] \tag{49}$$

$$\hat{a}_2(t) = \beta[\hat{a}_1(t) - \hat{a}_1(t-1)] + (1-\beta)\hat{a}_2(t-1)] \tag{50}$$

$$\hat{\rho}_t = \gamma[z_t - \hat{a}_1(t)] + (1-\gamma)\hat{\rho}_{t-S} \tag{51}$$

Sendo:
α, β, γ: constantes de amortecimento

$\hat{\rho}_{t-S}$: estimador do fator sazonal para o período mais recente equivalente ao ciclo sazonal.