

# 1 Introdução

Os principais modelos utilizados para apreçamento de opções de taxas de juros são o modelo de Black (1976) e os modelos de estrutura a termo de taxa de juros, sendo que estes últimos podem ser classificados em modelos de Equilíbrio Geral e modelos de Não-Arbitragem.

O modelo de Black (1976), desenvolvido a partir do modelo Black & Scholes – B&S (1973), apesar de ter sido originalmente criado para o apreçamento de opções européias de futuros de *commodities*, índices etc., também pode ser aplicado para o apreçamento de opções sobre títulos pré-fixados. É digno de destaque que dentre todos os modelos de apreçamento de opções de taxa de juros, o modelo de Black (1976) ainda é o mais utilizado no mercado brasileiro, apesar de suas limitações e do posterior surgimento de modelos mais sofisticados. Isto se deve ao fato de ser um modelo de fácil implementação e tratabilidade analítica, além de gerar resultados satisfatórios. Entretanto, o modelo tem como desvantagens a assunção de taxas de juros não-estocásticas e volatilidade constante.

Com o surgimento de modelos de estrutura a termo de taxa de juros, passou a ser possível o estabelecimento de um processo estocástico para a taxa livre de risco de curto prazo, circunscrito a um ambiente com neutralidade ao risco.

Os principais modelos de Equilíbrio Geral são os de Vasicek (1977) e Cox-Ingersoll-Ross (1985), mais conhecido como CIR. Estes modelos têm como característica marcante o fato de a determinação da estrutura temporal de taxas de juros ser endógena e, portanto, ser possível especificar a evolução da estrutura de taxas de juros. Porém, como a estrutura temporal de taxas de juros é obtida como resultado do modelo, por conseguinte, ela não é exatamente igual à estrutura temporal de taxas de juros do mercado. Sendo assim, pode ser apontado como ponto fraco desses modelos o custoso trabalho de calibrar seus resultados com o mercado.

Já os modelos de Não-Arbitragem de maior destaque são: Ho-Lee (1986), Hull-White (1990), Black-Derman-Toy (1990), conhecido como BDT, e Heath-Jarrow-Morton (1992), doravante HJM. É interessante mencionar que o HJM, apesar de ter sido criado após os outros modelos de Não-Arbitragem, é um modelo geral que permite que os demais modelos sejam considerados como casos particulares do HJM. Nesses modelos, a determinação da estrutura temporal de taxas de juros é exógena, visto que esta é inserida como dado de entrada no modelo e, portanto, ajusta-se automaticamente à estrutura do mercado. Almeida (2002) ressalta o mérito do HJM ao expressar que a importância de tal modelo para os modelos de derivativos de taxas de juros pode ser comparada à importância do modelo de Black & Scholes (1973) para os modelos de derivativos de ações, moedas, índices e futuros.

Os modelos de estrutura a termo de taxa de juros podem ser de um fator ou multifatoriais. Via de regra, os modelos de um fator utilizam a variável taxa de juros de curto prazo ( $r_t$ ) para determinar toda a estrutura de taxas de juros. Já nos modelos multifatoriais, além da taxa de juros de curto prazo, outros fatores, tais como inclinação, curvatura etc., podem ser incorporados para tentar explicar o comportamento da taxa de juros de forma mais acurada.

Brennan e Schwartz (1980) e Longstaff e Schwartz (1992) são exemplos de trabalhos que desenvolveram modelos com dois fatores. Brennan e Schwartz (1980) criaram um modelo em que o processo da taxa de juros de curto prazo reverte para uma taxa de juros de longo prazo, seguindo um processo estocástico. Longstaff e Schwartz (1992), em seu modelo de dois fatores, apresentam inicialmente um modelo de equilíbrio geral da economia e depois derivam um modelo de estrutura a termo em que há uma volatilidade estocástica. Já Litterman e Scheinkman (1991) e Knez *et al.* (1994), em seus trabalhos empíricos com modelos multifatoriais, conseguiram verificar a existência dos relevantes movimentos de nível, inclinação e curvatura, bem como seus respectivos impactos na volatilidade da taxas de juros. Barcinsk (2000) testou a hipótese de três fatores no mercado brasileiro e obteve resultados semelhantes aos encontrados no mercado norte-americano.

Buhler *et al* (1999) fizeram estudos empíricos utilizando o HJM com um e dois fatores com opções de taxa de juros no mercado alemão. Seus resultados mostraram que o apreçamento através do modelo com um fator foi melhor do que com dois fatores.

Tamagushiku (2006), por sua vez, analisou a performance do HJM com um, dois e três fatores, utilizando opções de títulos australianos. A Análise de Componentes Principais foi aplicada a fim de se obter a função de volatilidade a termo da taxa de juros. Seus resultados mostram que o modelo de três fatores apreça consistentemente melhor as opções do que os modelos de um e dois fatores.

Ressalte-se que, após diversos estudos e aplicações do HJM em derivativos de taxas de juros, nos últimos anos têm sido observadas aplicações do modelo também em *commodities*. É o caso, por exemplo, de Hinz et al (2005), que propõem o apreçamento de derivativos de energia elétrica através do modelo HJM com um fator e volatilidade constante. E Trolle e Schwartz (2008), que desenvolveram um modelo de volatilidade estocástica a partir do HJM para o apreçamento de *commodities*, estabelecendo três fatores, sendo um fator o preço à vista da *commodity* e os outros dois relacionados à curva de custo de carregamento. No trabalho de Trolle e Schwartz (2008) também é testado o modelo para opções de petróleo da NYMEX, tendo sido obtidos resultados satisfatórios.

No Brasil, dentre os derivativos de juros, o que possui maior liquidez é o DI futuro, cuja referência é a taxa do CDI<sup>1</sup> de um dia. As opções de juros mais importantes no mercado brasileiro são as opções de IDI<sup>2</sup> e as opções de futuro de DI. Observa-se, contudo, que apesar de o mercado de opções de IDI apresentar crescente liquidez, a opção de futuro de DI possui baixíssima liquidez atualmente.

Dentre os principais trabalhos sobre o assunto no Brasil, destacam-se Silva (1997); Vieira e Pereira (2000); Gluckstern e Eid Jr. (2002); Barbachan e Ornelas (2003a); Barbachan e Ornelas (2003b); Almeida e Yoshino (2003); Junior et al (2003); Grosso (2006); Senger e Rosenfeld (2008); e Barbedo, Vicente e Lion (2010).

---

1 O CDI (Certificado de Depósitos Interfinanceiros) é a taxa expressa pela média diária dos depósitos interfinanceiros entre bancos no mercado brasileiro.

Silva (1997) usa o modelo de BDT (1990) para gerar uma árvore binomial de taxas de juros de curto prazo e depois calcula o preço da opção sobre o futuro de DI. Nesse modelo não há fórmula fechada e não são admitidas taxas de juros negativas.

Vieira e Pereira (2000) adaptaram para o mercado brasileiro o modelo de Vasicek (1977), que foi desenvolvido para o mercado norte-americano, para avaliação de opções de IDI. Este modelo tem a vantagem de possuir fórmula fechada, porém admite taxas de juros negativas.

Gluckstern e Eid Jr. (2002) aplicaram o modelo Hull-White (1996) para apreçar a opção de IDI através de uma árvore trinomial. Os autores concluíram que o modelo Hull-White é superior ao modelo de Black (1976), amplamente utilizado no mercado brasileiro.

Barbachan e Ornelas (2003a) desenvolveram uma fórmula fechada para apreçar opções de IDI a partir do modelo CIR (1985) para modelar a taxa de juros de curto prazo, sem permitir taxas de juros negativas.

Barbachan e Ornelas (2003b) utilizaram a distribuição Hiperbólica Generalizada (HG) para apreçar opções de IDI, derivando uma fórmula similar a de Black (1976), chegando à conclusão de que a distribuição HG se adequa melhor à normal.

Almeida e Yoshino (2003) implementaram o modelo Hull-White de um fator para apreçar opções de IDI. Os autores concluíram que, apesar da escassez de dados diários em sua amostra, é possível calibrar o modelo Hull-White somente nos períodos de estabilidade.

Junior, Greco, Lauro, Francisco e Rosenfeld (2003) aplicaram o modelo Hull-White para apreçar opções de IDI e mostraram que este modelo é superior às variações do modelo de Black & Scholes, que são largamente utilizados no mercado brasileiro.

Grosso (2006) aplicou o modelo de Black para apreçar opções de futuro de DI, utilizando o Método de Diferenças Finitas Explícito, e concluiu que, apesar das limitações do modelo de Black, foram obtidos resultados satisfatórios, contribuindo para justificar o fato de que no mercado brasileiro este modelo continua sendo o mais utilizado.

---

2 O IDI (Índice de Taxa Média Diária de Depósitos Interfinanceiros) é um índice com valor inicial de 100.000 pontos em 01/01/2000 e que é atualizado diariamente pelo valor do CDI médio do dia.

Senger e Rosenfeld (2008) implementaram os modelos de Black, Vasicek e BDT para apreçar opções de futuro de DI. Seus resultados apontaram que os preços de opções de futuro de DI calculados através do modelo de Vasicek foram inferiores aos do modelo de Black. Para o apreçamento através do modelo BDT, foi utilizada volatilidade tanto constante quanto variável no tempo. No caso em que foi considerada a volatilidade constante, não foi possível identificar se o modelo BTD super-avaliou ou sub-avaliou o preço comparado ao mercado. Já no modelo com volatilidade variável no tempo foi possível encontrar uma tendência em se produzir preços superiores aos do mercado.

Barbedo, Vicente e Lion (2010) implementaram o modelo HJM, com um, dois e três fatores, para apreçar opções de IDI pela primeira vez. Foi aplicada a Análise de Componentes Principais para a obtenção da função de volatilidade a termo da taxa de juros. Os resultados mostraram que o modelo HJM consistentemente sub-apreça as opções de IDI no mercado brasileiro de balcão e super-apreça as opções de prazo maior negociadas na BM&FBovespa.

Nesse contexto, a proposta do presente trabalho é utilizar, pela primeira vez, o modelo HJM com um fator (taxa de juros de curto prazo) e volatilidade constante, no formato do caso particular Ho-Lee, para apreçar opções de futuro de DI, comparando com os prêmios de referência divulgados pela BM&FBovespa (calculados a partir do modelo de Black), dada a atual iliquidez.

Este trabalho é dividido em seis seções. Na segunda seção são apresentados o modelo de Black e os principais modelos de Equilíbrio Geral e de Não-Arbitragem. Na terceira seção são apresentadas as especificações da opção de futuro de DI de um dia. A quarta seção é definida a metodologia e apresenta os dados utilizados. A quinta seção apresenta os resultados empíricos obtidos. A sexta seção conclui o estudo.