

Referências bibliográficas

- [1] AÏT-SAHALIA, Y.; LO, A. (1998): “Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices,” *The Journal of Finance*. v.53, n.2, p.499-547.
- [2] ARROW, K. J. (1964): “The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing,” *Review of Economic Studies*. v.31, p.91-96.
- [3] BLACK, F.; SCHOLES M. (1973): “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81:637–659.
- [4] BLACK, F. (1975): “Fact and Fantasy in the Use of Options and Corporate Liabilities,” *Financial Analysts Journal*, 31, 36-41, 61-72
- [5] BOLLERSLEV, T. (1986): “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31(3): 307-327.
- [6] BOYLE, P. P. (1977): “A monte carlo approach,” *Journal Financial Economy*, 4:323-338, 1977.
- [7] BRENNAN, M. J. (1979): “The pricing of contingent claims in discrete time models,” *Journal of Finance*, 34(1): 53-68.
- [8] COCHRANE, J. H. (2001): *Asset Pricing*, Princeton.
- [9] COPELAND, T. E.; WESTON, J. F. (1988): *Financial theory and corporate policy*. 3rd ed. New York: Addison-Wesley.
- [10] COX, J. C.; ROSS, S. A. (1976): “The valuation of options for alternative stochastic processes,” *Journal of Financial Economics*, v.3, p. 145-146.
- [11] DEBREU, G. (1959): *Theory of Value*, Cowles Foundation Monograph n. 17. EUA: John Wiley & Sons, p.104.

- [12] DIXIT, A. K. and PINDYCK, R. S. (1994): *Investment Under Uncertainty*. Princeton.
- [13] DUAN, J.C. (1995): "The garch option pricing model," *Mathematical Finance*, 5:13–32.
- [14] DUFFIE, D. (2001): *Dynamic Asset Pricing Theory*. 3rd Ed., Princeton.
- [15] EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. (1993): *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York, EUA.
- [16] ENGLE, R. E. (1982): "Autoregressive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
- [17] ENGLE, R. F., LILIEN, D. M. and ROBINS, R. P. (1987): "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model," *Econometrica*, 55, 391-407.
- [18] ENGLE, R & NG, V. (1993): "Measuring and Testing The Impact of News on Volatility," *Journal of Finance*, 48, 1749-1778.
- [19] ESSCHER, F. (1932): "On the probability function in the collective theory of risk," *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 15:175-195.
- [20] GERBER, H. U.; SHIU, E. S. W. (1994): "Option pricing by esscher transforms (with discussions)," *Transactions of the Society of Actuaries*, 46:99-191.
- [21] GERBER, H. U.; SHIU, E. S. W. (1996): "Actuarial Bridges to Dynamic Hedging and Option Pricing," *Insurance: Mathematics and Economics* 18:183-218.
- [22] HALL, P., HOROWITZ, J.L., JING, B.Y. (1995): On Blocking Rules for the Bootstrap with Dependent Data. *Biometrika*, 82, 561-574.
- [23] HARRISON, J. M.; KREPS, D. M. (1979): "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets," *Journal of Economic Theory*, 20:381–408.

- [24] HULL, J. C. (1999) *Options, Futures & Other Derivatives*. Prentice Hall. 4rd Ed.
- [25] ITÔ, K. (1951): "On a formula concerning stochastic differentials," *Nagoya Mathematics Journal*, v.3, p. 55-65.
- [26] JARROW, R.; RUD, A. (1982): "Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes," *Journal of Financial Economics* 10, 347-369.
- [27] LUCAS, R. E. (1978): "Asset prices in an exchange economy," *Econometrica* 46, 1429-1446.
- [28] LUENGERGER, D. G. (1998): *Investment Science*. Oxford.
- [29] MATOS, J. A. (2001): *Theoretical Foundations of Corporate Finance*. Princeton.
- [30] MEDEIROS, M. C., and VEIGA, A (2008): "Modeling Multiple Regimes in Financial Volatility with a Flexible Coefficient GARCH Model," *Econometric Theory*, 4, 4-45.
- [31] NEFTCI, S. N. (1996): *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. EUA: Academic Press.
- [32] NELSON, D. (1991): "Conditional Heteroscedasticity In Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, 347-370.
- [33] RABEMANANJARA, R., and J.M. ZAKOIAN (1993): "Threshold ARCH Models and Asymmetries in Volatility," *Journal of Applied Econometrics*, 8(1), 31-49
- [34] RUBINSTEIN, M. (1976): "The valuation of uncertain income streams and the pricing of options," *Bell Journal of Economics* 7, 407-425.
- [35] RUBINSTEIN, M. (1985): "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976, through August 31, 1978," *Journal of Finance*, 40, 455-480.

- [36] SIQUEIRA, J. O. (1999): Determinação Entrópica do Preço Racional da Opção Europeia Simples Ordinária sobre Ação e Bond: Uma Aplicação da Teoria da Informação em Finanças em Condição de Incerteza. Tese de Doutorado. Departamento de Administração, Universidade de São Paulo.
- [37] SUNDARAN, R. K. (1997): "Equivalent Martingale Measures and Risk-Neutral Pricing: An Expository Note," *The Journal of Derivatives*. v.5, n.1, p. 85-98.
- [38] VASCONCELLOS, MAS, GREMAUD, A.P., TONETO Jr, R., (2005): *Economia Brasileira Contemporânea*. 6ª Edição. Editora Atlas.
- [39] Von NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. (1947): *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton Press; ISBN 0-691-00362-9.

7

Apêndice A

7.1

Estatísticas Descritivas

Na figura abaixo, apresentamos os logaritmos dos retornos do índice S&P500 ao longo do tempo. Observamos três *clusters* de volatilidade. O primeiro no início (set/89 até mar/93), o segundo entre as observações na posição 2.000 a 3.300 (ago/97 até jul/93) e o último a partir de 4.800 (set/08 até dez/10). O último *cluster* corresponde ao período da última crise financeira.

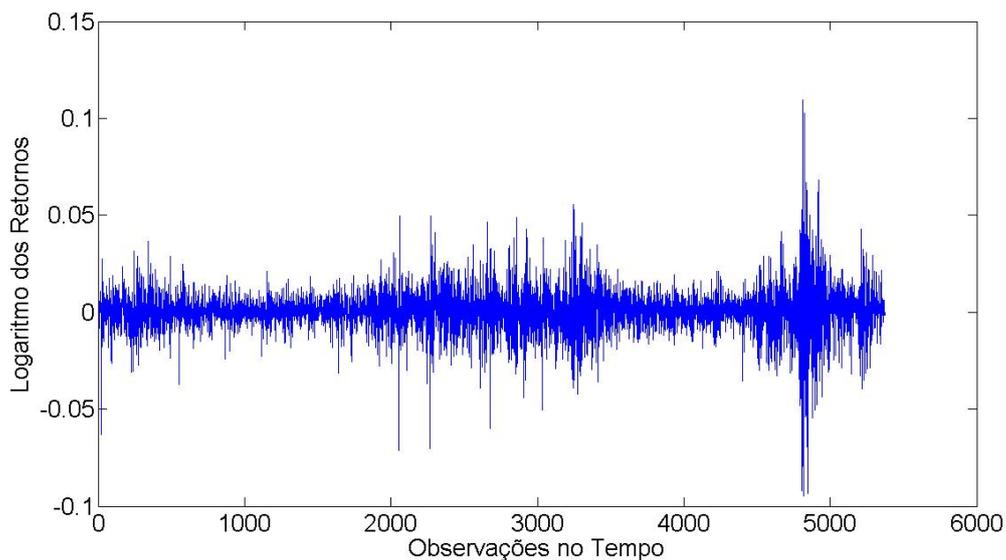


Figura A.1. Retornos da série S&P500 ao longo do tempo.

O aumento da volatilidade é refletido no histograma, que apresenta excesso de curtose ($Kurtosis = 11,94$). A assimetria negativa ($Skewness = -0.224$) indica que a cauda esquerda é a mais longa e que a maior parte dos retornos estão à direita. A partir do teste Jarque-Bera ($Probability = 0.00$), rejeitamos a hipótese nula de normalidade dos dados.

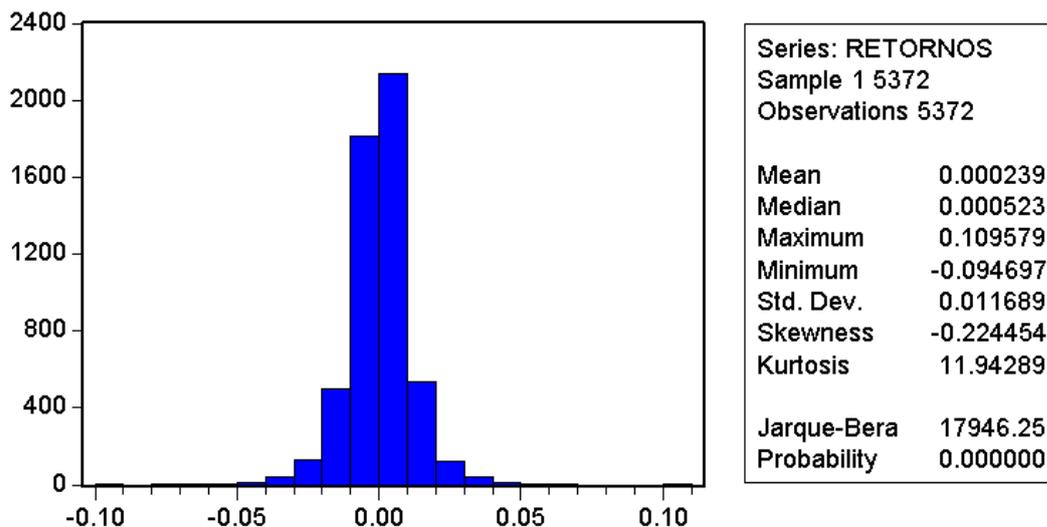


Figura A.2. Histograma dos retornos da série S&P500.

Apresentamos também o correlograma dos retornos e dos retornos ao quadrado da série. O objetivo é verificar a existência de dependência linear e não-linear. A partir do teste *Ljung-Box* (na coluna *Q-Stat*), rejeitamos a hipótese nula que diz que não existe autocorrelação. Nesse caso, os retornos têm dependência linear e não-linear.

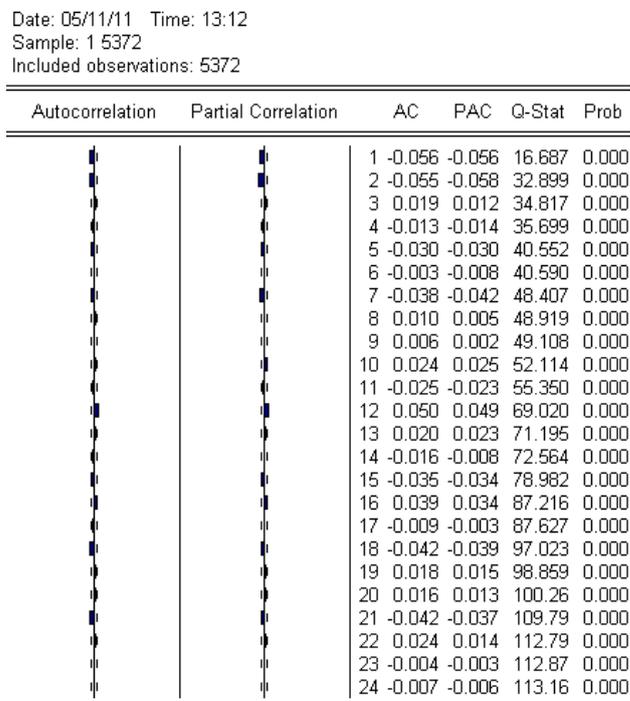


Figura A.3. Correlograma dos retornos da S&P 500.

Date: 05/11/11 Time: 13:19
 Sample: 1 5372
 Included observations: 5372

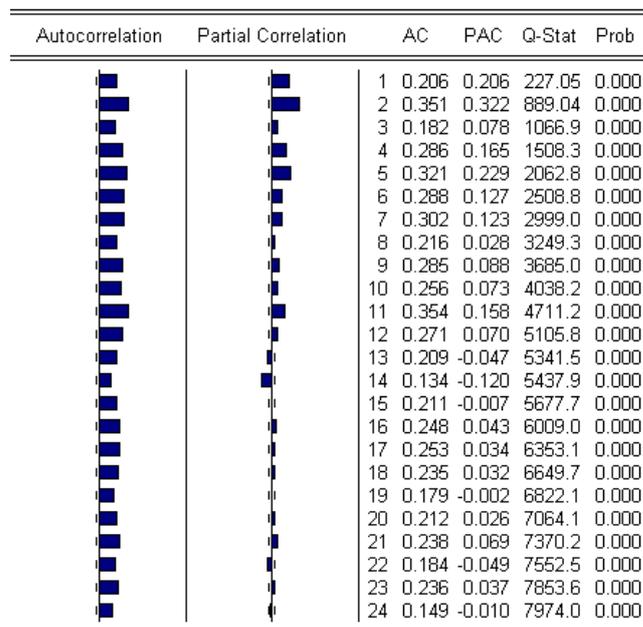


Figura A.4. Correlograma dos retornos S&P500 ao quadrado.

Nas análises anteriores, podemos constatar os principais fatos estilizados relativos a retornos financeiros. Os retornos são em geral não autocorrelacionados, mas podem apresentar dependência linear desprezível entre as suas observações. Na figura A.3, temos autocorrelações estatisticamente significantes, embora os coeficientes não sejam relevantes (observe os valores da coluna AC e PAC). Na figura A.4, os quadrados dos retornos são autocorrelacionados, isto é, apresentam um tipo de dependência não linear (uma correlação de *lag* um pequena e depois uma queda lenta). Essa característica é responsável pelos padrões alternantes da volatilidade observados no gráfico A.1. Os aglomerados de volatilidade implicam na existência de dependência da variância condicional da série, que é capturada através da estrutura de dependência existente nos modelos do tipo GARCH. No gráfico A.2, observamos a distribuição incondicional dos retornos apresentando caudas mais pesadas do que uma distribuição normal, embora seja aproximadamente simétrica, em geral é leptocúrtica.

Na figura abaixo, apresentamos os resíduos padronizados obtidos a partir da estimação dos parâmetros do GARCH-M (1,1). Visualmente, eles têm aparência de retornos sem a presença dos *clusters* de volatilidade. Nesse caso, temos a presença de vários picos negativos ao longo da série.

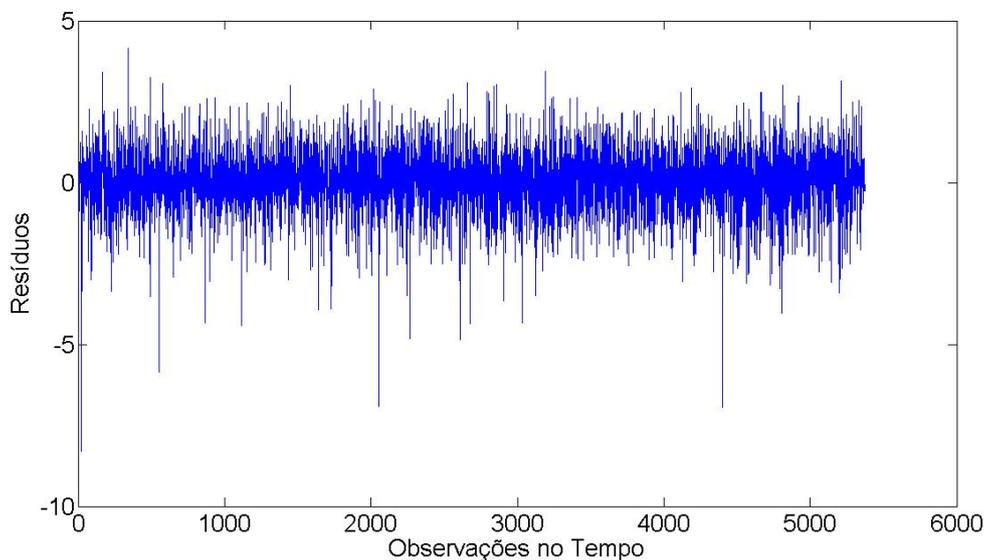


Figura A.5. Resíduos do GARCH-M na série S&P500 ao longo do tempo.

Em comparação com a série de retornos S&P500, houve uma redução no excesso de curtose ($Kurtosis = 5,65$) e na assimetria negativa ($Skewness = -0.494$). O histograma mostra que a cauda esquerda é a mais longa. Novamente, com o teste Jarque-Bera ($Probability = 0.00$), rejeitamos a hipótese nula de normalidade dos dados.

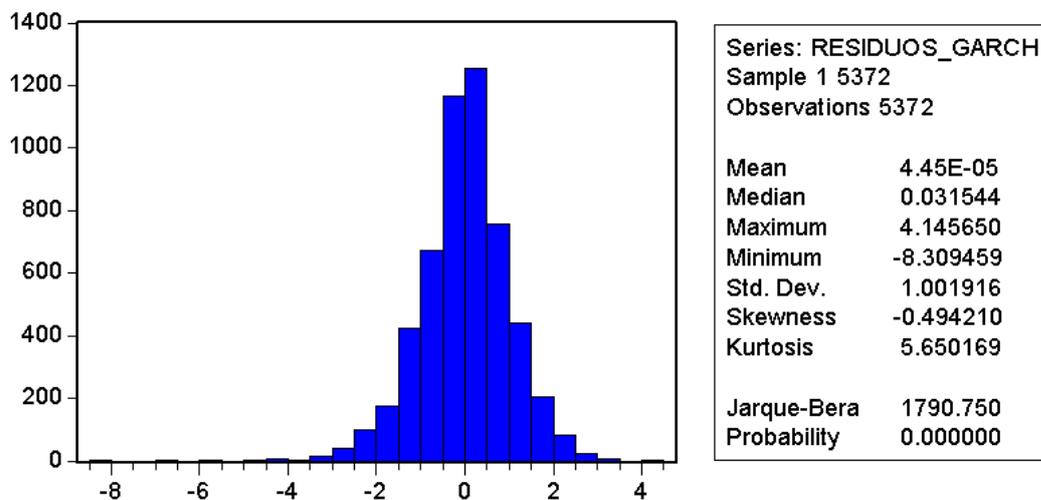


Figura A.6. Histograma dos resíduos do GARCH-M da série S&P500.

Apresentamos o correlograma dos resíduos e dos resíduos ao quadrado do GARCH-M (1,1). A partir do teste *Ljung-Box* (na coluna *Q-Stat*), não rejeitamos a hipótese nula, ou seja, os resíduos não têm dependência linear e não linear.

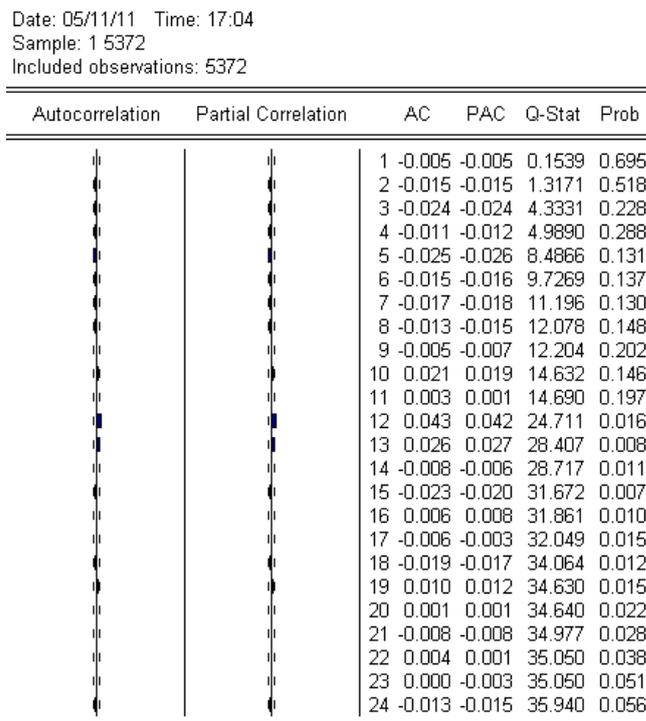


Figura A.7. Correlograma dos resíduos do GARCH-M da série S&P500.

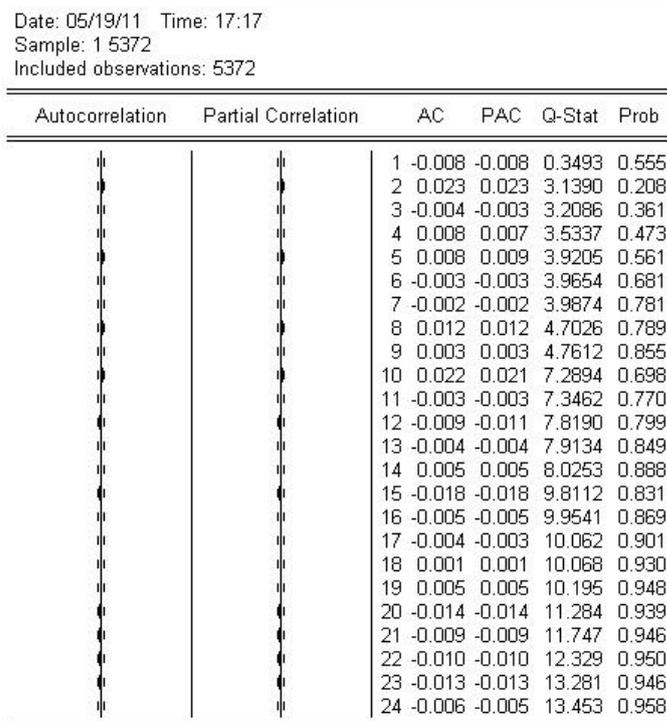


Figura A.8. Correlograma dos resíduos do GARCH-M da série S&P500 ao quadrado.

7.2

Algoritmo para estimação GARCH-M (1,1) com Prêmio de Risco

Retornamos as equações (2.29) e (2.30) do modelo GARCH Gaussiano sob medida P:

$$S_t = S_{t-1} e^{r + \lambda \sqrt{h_t} - \frac{1}{2} h_t + \varepsilon_t} \quad (2.29)$$

$$y_t = r + \lambda \sqrt{h_t} - \frac{1}{2} h_t + \varepsilon_t \quad (2.30)$$

com,

$$\varepsilon_t | \phi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

e

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i}$$

Sabemos que,

$$y_t / \phi_{t-1} \sim N\left(r_t + \lambda \sqrt{h_t} - \frac{1}{2} h_t, h_t\right)$$

Retornando a (2.29),

$$S_t = S_{t-1} e^{y_t}$$

O valor esperado é dado por,

$$E[S_t / S_{t-1}] = e^{E[y_t] + \frac{1}{2} V[y_t]} = e^{r_t + \lambda h_t^{1/2}}$$

Algoritmo para estimação do prêmio de risco e dos parâmetros GARCH:

Passo 1:

$$\alpha = \beta = 0, h_t = \alpha_0 \text{ e } \mu = r + \lambda \alpha_0$$

Estima por Mínimos Quadrado Ordinários: $y_t = \mu + \varepsilon_t$, onde $\varepsilon_t \sim N(0, h_t)$

$$\min_{\mu} \sum_{t=1}^T (y_t - \mu)^2 = \bar{y}_t$$

$$\varepsilon_t = y_t - \bar{y}_t$$

$$\alpha_0 = \text{Var}(\varepsilon_t)$$

$$\lambda = \frac{\bar{y}_t - r}{\alpha_0}$$

Passo 2:

$$y_t^* = y_t - r - \lambda\sqrt{h_t} + \frac{1}{2}h_t$$

Ajusta um GARCH (1,1) em y_t^* para extrair os h_t^*

Passo 3:

$$y_t = r + \lambda\sqrt{h_t^*} - \frac{1}{2}h_t^* + \varepsilon_t, \text{ onde } \varepsilon_t \sim N(0, h_t^*)$$

$$\frac{y_t - r + 1/2h_t^*}{\sqrt{h_t^*}} = \lambda + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t^*}}, \text{ onde } \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t^*}} \sim N(0,1)$$

$$\min_{\lambda} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_t - r + 1/2 h_t^*}{\sqrt{h_t^*}} - \lambda \right)^2$$

Passo 4: retorne ao passo 2 até que λ se estabilize.

7.3

Algoritmo no Matlab para gerar os gráficos sob medidas P e Q

```

% Criação dos Vetores: Retornos e a Probabilidade Neutra ao Risco.
Instante      = 30;
Retorno       = Retornos_acum(:, instante);
Probab        = Probab_nr;

% Criação dos Vetores: Frequência Absoluta (fabs) na Medida P e o Ponto
Médio (bins).
nbins         = 50;
[fabs, bins] = hist(Retorno, nbins);

% Criação dos Vetores: Limite Superior (sup) e o Limite Inferior (inf).
sup           = cumsum(fabs, 2);
ind           = 1:nbins-1;
inf(1)        = 1;
inf(ind+1)    = sup(ind)+1;

% Criação dos Vetores: Retornos Acumulados em Ordem Crescente (ys) e o
de Índice (ixx) que tem a localização de cada retorno individual no vetor original
de Retornos Acumulados.
[ys ixx]      = sort(Retornos_acum(:, instante));

% Criação do Vetor de Probabilidades Neutra ao Risco (Probab_nr2)
organizado de acordo com os índices definidos no passo anterior (ixx).
Probab_nr2    = Probab(ixx);

% Criação do Vetor Peso que é o somatório das Probabilidades Neutra ao
Risco que existe em cada intervalo de classes.
for i=1:nbins
    peso(i) = sum(Probab_nr2(inf(i):sup(i)));
end

% Criação da Frequência Absoluta sob Medida Q.
barra = (peso.*50000);

% Gráficos Medida P e Q.
figure
hold on
plot(bins, fabs, '-ko')
plot(bins, barra, '-k', 'LineWidth', 2)
legend('ENP Bootstrap Medida P', 'ENP Bootstrap
Medida Q', 2);
hold off

```