

## 4

### Comparação dos Modelos

Nesta seção, apresentamos uma comparação entre os três métodos de apreçamento: Black e Scholes, Duan e a transformada de Esscher Não Paramétrica (ENP). Serão realizados quatro exercícios que buscam evidenciar as diferenças ou semelhanças entre os métodos.

No primeiro exercício, utilizamos dados sintéticos, criados através de simulação Monte Carlo, baseados no Movimento Browniano Geométrico (MBG) gaussiano. Nesse caso, não se espera diferenças entre os métodos. Como não há o efeito GARCH, o modelo de Duan se reduz ao modelo de Black e Scholes. E o método da Transformada de Esscher leva ao mesmo resultado (conforme foi visto analiticamente na seção 2.4).

No segundo exercício, utilizamos dados sintéticos, criados através de simulação Monte Carlo, baseados nos processos estocásticos GARCH-M (1,1) gaussiano. Nesse caso, espera-se que os métodos de Duan e o modelo proposto (ENP) respondam da mesma forma, porém diferentes do método de Black e Scholes.

No terceiro exercício, aplicamos o ENP sobre a distribuição empírica representada pelos retornos históricos da S&P 500. Nesse caso, os tradicionais métodos de Duan e de Black e Scholes não podem ser aplicados porque a distribuição real dos retornos é desconhecida.

No quarto exercício, retornamos ao processo GARCH-M (1,1). Porém, a distribuição empírica dos retornos é obtida substituindo os choques aleatórios gaussianos do segundo exercício pela amostra Bootstrap dos resíduos (calculados pelo modelo GARCH-M (1,1) na série do S&P 500).

Esses exercícios buscam evidenciar as alterações dos preços neutros ao risco, quando se assume processos estocásticos diferentes do MBG. A distribuição empírica obtida através da simulação dos retornos baseados no GARCH-M (1,1), com choques gaussianos, apresenta caudas pesadas. A distribuição empírica dos retornos históricos também apresenta assimetria e caudas pesadas. Da mesma forma, a distribuição empírica obtida através da simulação dos retornos baseados

no GARCH-M (1,1), com choques dados pelos resíduos, apresenta caudas pesadas e assimetria.

Podemos constatar que, nos casos em que os preços gerados pelo método proposto estiveram nas mesmas condições que o modelo de Black e Scholes e o de Duan, os resultados foram similares a esses modelos. E quando os retornos foram gerados de forma não paramétrica (exercícios 3 e 4), observamos algumas diferenças pronunciadas.

## 4.1

### Metodologia

A base de dados utilizada neste estudo foi a S&P500<sup>13</sup>. Trata-se de um índice de mercado composto por quinhentos ativos das principais empresas americanas. Os ativos são qualificados de acordo com o tamanho, liquidez, valor de mercado e pela sua representação dentro de um grupo industrial, segundo os critérios da *Standard and Poors*. O período inicia-se em 11 de setembro de 1989 e vai até 31 de dezembro de 2010. Esse intervalo corresponde a 5.372 observações e engloba várias situações de alta e queda para o mercado. A partir dos valores de fechamento, derivamos a série de retornos diários. Eles foram calculados na forma logarítmica,  $R_t = \ln(P_t/P_{t-1})$ , onde no dia  $t$ ,  $R_t$  é o retorno e  $P_t$  é a cotação.

Utilizamos o software Matlab para estimar os parâmetros do GARCH-M (1,1), o prêmio de risco  $\lambda$  e para calcular os preços dos modelos. Cada preço tem uma sigla diferente que representa a forma pela qual foi calculado. Por exemplo, a sigla BS representa o preço dado pelo modelo de Black e Scholes. A sigla GARCH representa o preço calculado pelo modelo de Duan. Os demais preços iniciam com a sigla do método proposto ENP (Esscher Não Paramétrico) e a condição a que foi submetido. Ou seja, no preço ENP\_BS a taxa de retorno foi gerada utilizando as condições de Black e Scholes. No preço ENP\_G a taxa de retorno foi gerada utilizando as condições de Duan. A sigla ENP\_B representa os preços calculados utilizando os retornos históricos da S&P500. Nos preços ENP\_R as taxas de retorno utilizadas foram os resíduos gerados pelo GARCH-M (1,1).

<sup>13</sup> No apêndice A, apresentamos as principais estatísticas descritivas desta série.

Neste estudo, a simulação de Monte Carlo foi utilizada para calcular os preços da opção<sup>14</sup>. A técnica de simulação se baseia em dois grandes teoremas da probabilidade: a Lei dos Grandes Números e o Teorema Central do Limite. Então, construímos uma amostra aleatória independente e identicamente distribuída para estimar o valor esperado do preço de um derivativo.

Em Duan, a única quantidade que é simulada é o choque aleatório  $\varepsilon_t | \phi_{t-1} \sim N(0, h_t)$ , pois as outras são determinísticas. O preço GARCH foi obtido a partir da simulação de Monte Carlo, sob a medida de probabilidade neutralizada (ou medida Q), baseada nas fórmulas (2.32), (2.33) e (2.34). Portanto, temos um preço  $S_{T,i}$ , onde  $i = 1, \dots, n$ , para cada trajetória possível. Em seguida, calculamos a opção  $C_{0,i}$  para cada caminho simulado,

$$C_{0,i} = (S_{T,i} - K)_+$$

e, por fim,

$$C_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_{0,i}$$

Na metodologia de apreçamento ENP, também utilizamos a simulação de Monte Carlo para calcular os preços ENP\_BS e o ENP\_G. No preço ENP\_BS, simulamos as trajetórias de acordo com a fórmula (2.16), do caso discreto, e no preço ENP\_G, conforme as fórmulas (2.29), (2.30) e (2.31). Em ambos os casos simulamos sob medida de probabilidade P. Em seguida, obtemos a medida neutra ao risco, baseada na fórmula (3.5), e apreçamos a opção de acordo com a equação (3.6).

No preço ENP\_B, sorteamos os retornos históricos com reposição, sob medida de probabilidade P, utilizando a técnica *Bootstrap*<sup>15</sup>. O objetivo foi construir uma nova série de retornos mediante a hipótese de que qualquer um dos retornos passados se repita no futuro. Obtemos a medida neutra ao risco, baseada na fórmula (3.5), e o preço de acordo com a equação (3.6).

<sup>14</sup> O primeiro a aplicar a simulação de Monte Carlo no cálculo de opções financeiras foi Boyle [6].

<sup>15</sup> O *Bootstrap* é uma técnica estatística não paramétrica introduzida por Efrom [15], que consiste num sorteio, com ou sem reposição, dos elementos de uma amostra aleatória.

Em relação ao preço ENP\_R, simulamos os retornos, sob medida de probabilidade P conforme as fórmulas (2.29), (2.30) e (2.31). Porém, utilizamos os resíduos do GARCH-M (1,1) ao invés do choque gaussiano. Depois, aplicamos o *Bootstrap* para formar novas amostras. Obtemos a medida neutra ao risco, baseada na fórmula (3.5) e o preço de acordo com a equação (3.6).

Para compararmos os preços do modelo de Black e Scholes com os demais, utilizamos a variância incondicional obtida a partir dos dados. Essa variância também foi utilizada para iniciar os outros modelos. Ou seja,

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

O modelo de apreçamento de opções de Duan procura refletir no preço do ativo subjacente os estados da economia através de impactos na variância inicial. Então, calculamos os preços GARCH e o ENP\_G com a variância inicial 20% abaixo, no mesmo nível e 20% acima da variância incondicional.

O preço atual foi fixado em \$1,00 e a taxa livre de risco igual a zero. Os preços de exercício (K) assumiram os seguintes valores: \$0,80, \$0,90, \$0,95, \$1,00, \$1,05, \$1,10 e \$1,20. O objetivo é verificar as diferenças que acontecem entre os modelos, quando os preços das opções estão *in-the-money*, *at-the-money* e *out-of-the-money*. Também utilizamos três maturidades (T) diferentes, 30, 90 e 180 dias, para avaliar o efeito do tempo nos preços. Foram realizadas 50.000 simulações e igual número de sorteios para cada combinação de preço de exercício, maturidade e níveis diferentes de volatilidade inicial. Para uma melhor visualização e comparação entre os preços calculados, multiplicamos todos por 10.000.

## 4.2

### Resultados

Neste primeiro exercício, comparamos o desempenho do método proposto quando ele está na mesma condição que o modelo de Black e Scholes. A simulação do MBG foi baseada na volatilidade anualizada da S&P 500, igual a 21,42%, e na taxa de retorno esperada igual a 12% a.a. Na tabela 4.1, os preços

ENP estão bem próximos dos preços BS e, assim, temos um viés relativamente pequeno. Em raros casos ele está bem distante de zero. De modo geral, concluímos que a metodologia proposta reproduziu os preços do modelo de Black e Scholes.

Tabela 4.1: Comparação entre os preços da opção de compra e venda nos modelos de Black e Scholes e do Esscher Não Paramétrico.

T	K	Compra			Venda		
		BS	ENP_BS	Viés%	BS	ENP_BS	Viés%
30	0.80	2000.0187	1997.9767	-0.1021	0.0187	0.0302	61.4352
	0.90	1010.2470	1007.4767	-0.2742	10.2470	9.7585	-4.7672
	0.95	567.5575	564.5122	-0.5366	67.5575	65.9777	-2.3385
	1.00	244.9386	243.3886	-0.6328	244.9386	242.5659	-0.9687
	1.05	76.3472	75.7155	-0.8275	576.3472	572.1993	-0.7197
	1.10	16.7370	16.7806	0.2606	1016.7370	1011.8643	-0.4793
	1.20	0.2865	0.3000	4.7081	2000.2865	1995.3041	-0.2491
90	0.80	2006.1802	2002.6816	-0.1744	6.1802	5.6502	-8.5768
	0.90	1085.5043	1084.0976	-0.1296	85.5043	85.9287	0.4964
	0.95	710.6287	709.5105	-0.1574	210.6287	210.7843	0.0738
	1.00	424.1129	423.3220	-0.1865	424.1129	424.0471	-0.0155
	1.05	229.6159	229.3785	-0.1034	729.6159	729.4918	-0.0170
	1.10	112.7342	112.3174	-0.3697	1112.7342	1112.2643	-0.0422
	1.20	20.5589	20.2393	-1.5546	2020.5589	2019.9822	-0.0285
180	0.80	2040.8498	2036.1805	-0.2288	40.8498	40.6375	-0.5197
	0.90	1203.3973	1200.1657	-0.2685	203.3973	201.4965	-0.9345
	0.95	868.1044	866.6914	-0.1628	368.1044	365.7730	-0.6334
	1.00	599.5038	599.3531	-0.0251	599.5038	596.9181	-0.4313
	1.05	396.4698	396.3022	-0.0423	896.4698	893.6583	-0.3136
	1.10	251.4402	250.7189	-0.2869	1251.4402	1248.1302	-0.2645
	1.20	89.9933	89.7467	-0.2740	2089.9933	2086.9028	-0.1479

Neste segundo exercício, comparamos o desempenho do método ENP quando ele está na mesma condição que o método de Duan. O GARCH-M (1,1) foi utilizado com os mesmos valores que foram estimados no artigo de Duan,  $\alpha_0 = 1.524 \times 10^{-5}$ ,  $\alpha_1 = 0.1883$ ,  $\beta_1 = 0.7162$  e  $\lambda = 7.452 \times 10^{-3}$ . Simulamos as taxas de retorno conforme descrito na metodologia e depois calculamos o preço da opção de venda europeia obedecendo aos critérios de cada método.

Na tabela 4.2, observamos que na maior parte dos casos, os preços GARCH e o ENP\_G, apresentaram resultados semelhantes entre si e distintos dos

preços de Black e Scholes [13]. Concluímos que a metodologia ENP foi capaz de reproduzir os preços do modelo de Duan.

Tabela 4.2: Comparação entre os preços das opções de venda nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.

			$\sqrt{h_0}/\sigma = 0.8$		$\sqrt{h_0}/\sigma = 1.0$		$\sqrt{h_0}/\sigma = 1.2$	
<b>T</b>	<b>K</b>	<b>BS</b>	<b>GARCH</b>	<b>ENP_G</b>	<b>GARCH</b>	<b>ENP_G</b>	<b>GARCH</b>	<b>ENP_G</b>
30	0.80	0.1044	0.6431	0.6902	0.5809	0.6314	0.8510	0.8688
	0.90	18.2536	16.9901	17.3514	18.2593	18.6369	21.6907	21.7747
	0.95	89.7605	76.0111	76.5395	80.1435	81.0492	87.4942	87.3442
	1.00	275.9783	252.3838	252.8244	257.1506	258.4768	268.0216	267.0782
	1.05	600.3870	585.0144	585.3590	587.2660	589.0491	597.1613	595.3407
	1.10	1027.9448	1024.2588	1024.7519	1024.1122	1026.2160	1031.3979	1029.1670
	1.20	2000.9914	2001.5167	2002.2724	1999.9552	2002.4812	2004.9657	2002.6521
90	0.80	13.0539	15.3333	15.5317	14.7162	15.1835	15.9948	16.0658
	0.90	118.4816	113.2170	112.9616	111.7316	112.9619	117.6938	116.9937
	0.95	257.8420	245.9429	244.5569	243.4381	244.8805	253.9100	252.1970
	1.00	477.8178	463.3246	460.4931	460.4376	461.7466	471.9549	469.2504
	1.05	779.7419	768.6204	764.1853	764.1050	765.6944	776.3485	772.0154
	1.10	1152.1876	1148.0667	1142.4864	1141.0637	1142.8197	1153.5758	1148.4090
	1.20	2036.5933	2043.3460	2036.8278	2034.2449	2036.3433	2044.7558	2038.5994
180	0.80	66.4484	67.5026	68.0352	65.6259	66.6049	66.5079	67.0899
	0.90	261.2663	255.0184	254.6519	251.0586	251.9349	255.8946	255.8697
	0.95	438.2963	429.3975	428.0819	424.4493	424.9407	430.4054	430.0038
	1.00	675.3324	664.9538	662.9880	660.1522	660.2240	666.0414	665.3152
	1.05	970.6269	961.1332	957.9927	956.5489	956.1905	961.5854	960.2539
	1.10	1317.9957	1311.3853	1307.3285	1306.9790	1306.4822	1310.9736	1308.9821
	1.20	2133.3155	2133.7795	2128.3937	2129.2369	2128.3997	2133.0163	2130.0064

Na tabela 4.3, temos os vieses gerados quando comparamos os demais preços em relação ao preço de Black e Scholes. Os resultados mostram que os preços da opção GARCH e o ENP\_G apresentaram variações similares.

Tabela 4.3: Comparação entre os vieses nos preços das opções de venda nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.

		$\sqrt{h_0}/\sigma = 0.8$		$\sqrt{h_0}/\sigma = 1.0$		$\sqrt{h_0}/\sigma = 1.2$	
T	K	GARCH	ENP_G	GARCH	ENP_G	GARCH	ENP_G
30	0.80	516.0204	561.1382	456.4746	504.8452	715.2001	732.1717
	0.90	-6.9220	-4.9430	0.0311	2.0996	18.8297	19.2898
	0.95	-15.3179	-14.7292	-10.7141	-9.7051	-2.5248	-2.6920
	1.00	-8.5494	-8.3897	-6.8221	-6.3416	-2.8831	-3.2249
	1.05	-2.5605	-2.5031	-2.1854	-1.8884	-0.5373	-0.8405
	1.10	-0.3586	-0.3106	-0.3728	-0.1682	0.3359	0.1189
	1.20	0.0263	0.0640	-0.0518	0.0745	0.1986	0.0830
90	0.80	17.4615	18.9811	12.7341	16.3132	22.5286	23.0726
	0.90	-4.4434	-4.6589	-5.6971	-4.6588	-0.6649	-1.2559
	0.95	-4.6149	-5.1524	-5.5863	-5.0269	-1.5250	-2.1893
	1.00	-3.0332	-3.6258	-3.6374	-3.3634	-1.2270	-1.7930
	1.05	-1.4263	-1.9951	-2.0054	-1.8015	-0.4352	-0.9909
	1.10	-0.3577	-0.8420	-0.9655	-0.8131	0.1205	-0.3280
	1.20	0.3316	0.0115	-0.1153	-0.0123	0.4008	0.0985
180	0.80	1.5864	2.3880	-1.2378	0.2355	0.0895	0.9653
	0.90	-2.3914	-2.5316	-3.9070	-3.5716	-2.0560	-2.0655
	0.95	-2.0303	-2.3305	-3.1593	-3.0472	-1.8003	-1.8920
	1.00	-1.5368	-1.8279	-2.2478	-2.2372	-1.3758	-1.4833
	1.05	-0.9781	-1.3017	-1.4504	-1.4873	-0.9315	-1.0687
	1.10	-0.5015	-0.8094	-0.8359	-0.8736	-0.5328	-0.6839
	1.20	0.0217	-0.2307	-0.1912	-0.2304	-0.0140	-0.1551

Na tabela 4.4, utilizamos dados reais da série S&P 500 para comparar os preços dos modelos de Black e Scholes, Duan e o método proposto (terceiro e quarto exercício).

No preço BS, utilizamos a variância incondicional dos dados. No preço GARCH, os dados sintéticos foram simulados com base nos valores estimados:  $\alpha_0 = 6.7874 \times 10^{-7}$ ,  $\alpha_1 = 0.0576$ ,  $\beta_1 = 0.937$  e  $\lambda = 0.0329$  para o processo GARCH-M (1,1) gaussiano<sup>16</sup>. Nesse caso, também utilizamos a volatilidade inicial no mesmo nível da variância incondicional.

No terceiro exercício (ENP\_B), comparamos o desempenho do método proposto, quando ele é aplicado sobre dados reais onde a uma distribuição de

<sup>16</sup> No apêndice A, apresentamos o algoritmo para estimação do prêmio de risco no GARCH-M(1,1) para base de dados S&P500.

probabilidade é desconhecida (representada pelos retornos históricos da S&P 500).

No quarto exercício (ENP\_R), retornamos ao GARCH-M (1,1) do modelo de Duan. Porém, substituímos os choques aleatórios pelos resíduos gerados na estimação do GARCH-M (1,1) na série S&P 500.

Tabela 4.4: Comparação entre os preços das opções de compra nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.

<b>T</b>	<b>K</b>	<b>BS</b>	<b>GARCH</b>	<b>ENP_B</b>	<b>ENP_R</b>
30	0.80	2000.0213	2002.2067	2000.1758	2000.6381
	0.90	1010.6989	1013.7203	1014.9918	1017.5470
	0.95	568.9716	565.4935	576.1337	569.9038
	1.00	246.9892	234.8195	253.0622	232.6773
	1.05	77.8837	69.7668	81.9193	64.0134
	1.10	17.3883	16.2504	19.8900	13.0094
	1.20	0.3149	0.6249	0.6881	0.3935
90	0.80	2006.5381	2022.5203	2008.9777	2031.7785
	0.90	1087.5736	1094.5334	1096.5775	1113.8031
	0.95	713.7104	707.7897	724.2216	722.0036
	1.00	427.6611	412.4068	437.4718	413.9739
	1.05	232.8915	216.8928	241.5843	208.5503
	1.10	115.2333	106.1636	122.1748	93.8320
	1.20	21.4643	23.7555	24.3064	16.2289
180	0.80	2042.3547	2058.0933	2050.0097	2112.2898
	0.90	1207.1244	1204.7507	1224.0732	1258.3175
	0.95	872.7147	858.1572	892.1924	898.2278
	1.00	604.5146	582.2854	623.8569	603.7964
	1.05	401.3433	377.5210	419.0695	382.0054
	1.10	255.7469	236.0052	270.2855	228.8837
	1.20	92.6425	88.5153	100.8059	74.1381

Os preços ENP\_B foram superiores aos demais preços em todas as maturidades. E o preço ENP\_R mostrou um comportamento semelhante ao preço GARCH principalmente na menor maturidade.

Na tabela 4.5 apresentamos percentualmente o quanto os preços se distanciaram em relação aos preços do modelo de Black e Scholes. Os preços GARCH e o ENP\_R foram negativos ou positivos nas mesmas situações, apesar das diferenças nas variações. Enquanto o preço ENP\_B foi superior ao preço de Black e Scholes em todos os casos.



Tabela 4.5: Comparação entre os vieses dos preços da opção de compra nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.

<b>T</b>	<b>K</b>	<b>GARCH</b>	<b>ENP_B</b>	<b>ENP_R</b>
30	0.80	0.1093	0.0077	0.0308
	0.90	0.2989	0.4247	0.6776
	0.95	-0.6113	1.2588	0.1638
	1.00	-4.9272	2.4588	-5.7945
	1.05	-10.4218	5.1816	-17.8090
	1.10	-6.5439	14.3872	-25.1833
	1.20	98.4667	118.5134	24.9762
90	0.80	0.7965	0.1216	1.2579
	0.90	0.6399	0.8279	2.4117
	0.95	-0.8296	1.4728	1.1620
	1.00	-3.5669	2.294	-3.2005
	1.05	-6.8696	3.7326	-10.4517
	1.10	-7.8707	6.0239	-18.5721
	1.20	10.6742	13.2409	-24.3913
180	0.80	0.7706	0.3748	3.4242
	0.90	-0.1966	1.4041	4.2409
	0.95	-1.6681	2.2319	2.9234
	1.00	-3.6772	3.1996	-0.1188
	1.05	-5.9357	4.4167	-4.8183
	1.10	-7.7192	5.6848	-10.5038
	1.20	-4.455	8.8118	-19.9740

Para obter uma visualização gráfica das diferenças entre os preços, dividimos os preços de cada método pelo preço do modelo de Black e Scholes e apresentamos os resultados nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3. Os valores iguais (ou próximos) a um indicam a igualdade com os preços de Black e Scholes. Já valores maiores do que um, representam superioridade e os menores do que um, indicam a inferioridade daquele preço em relação ao preço de Black e Scholes. Não mantemos uma escala fixa para o eixo razão entre os preços para que possamos visualizar a sensibilidade entre os métodos.

Na figura 4.1, praticamente todos os preços são iguais nas situações *in-the-money*. As diferenças são mais significativas quando a opção torna-se *out-of-the-money*. Apesar da queda brusca nos preços GARCH e o ENP\_R, exceto o preço ENP\_B, todos eles encerram acima do preço de Black e Scholes.

Na figura 4.2, o aumento da maturidade provoca uma leve variação nos preços já na situação *in-the-money*. Conforme observado na figura anterior, as

diferenças são maiores nos casos *out-of-the-money*. Após a queda nos preços GARCH e o ENP\_R, exceto o preço ENP\_B, apenas o preço GARCH termina acima do preço de Black e Scholes.

Na figura 4.3, podemos constatar novamente a sensibilidade dos preços com o aumento da maturidade. Apenas o preço ENP\_B permaneceu maior que os demais em todas as maturidades. Nesse caso, os demais preços ficaram abaixo do preço de Black e Scholes.

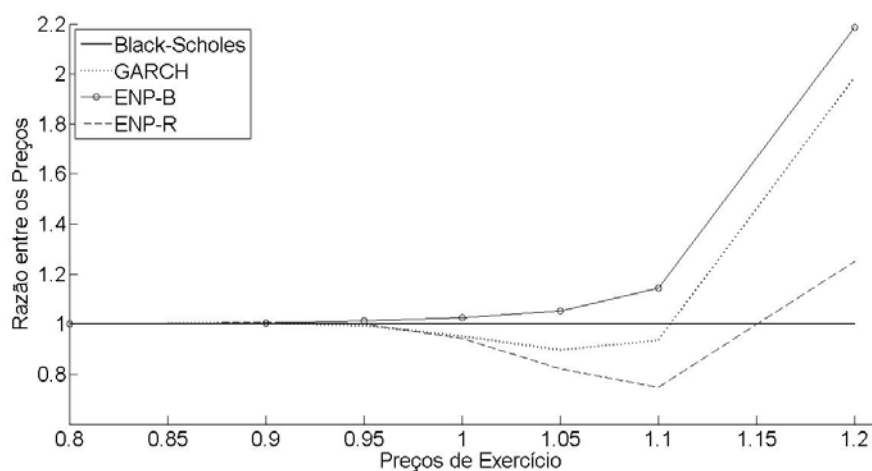


Figura 4.1. Preços das opções de compra como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 30.

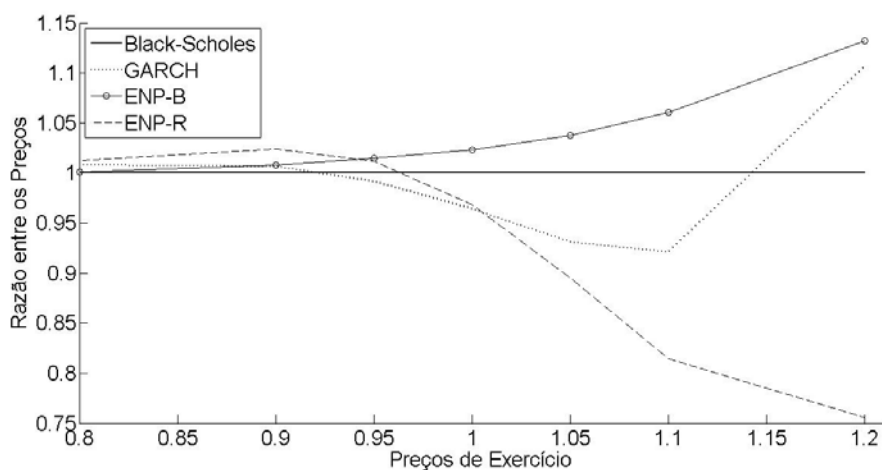


Figura 4.2. Preços das opções de compra como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 90.

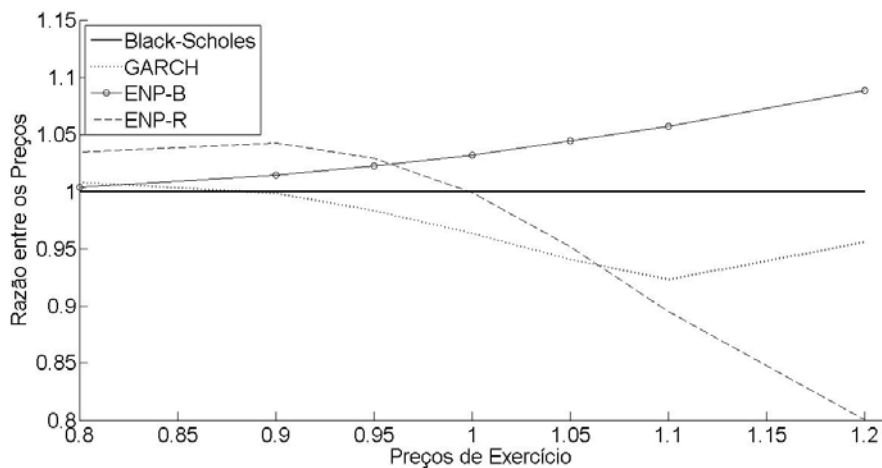


Figura 4.3. Preços das opções de compra como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 180.

Nas tabelas 4.6 e 4.7, apresentamos os resultados do apreçamento da opção de venda europeia e os seus respectivos vieses. Mantemos todos os procedimentos citados no cálculo da opção de compra (GARCH-M (1,1), simulação de Monte Carlo e o *Bootstrap*) e alteramos apenas a condição  $(K - S_t e^{y_j})_+$ .

Na tabela 4.6, os resultados mostram que os preços ENP\_B e o ENP\_R foram superiores aos demais em distintas situações. O primeiro preço foi maior nas situações *at-the-money* e *in-the-money* e, o segundo preço, foi superior principalmente nas situações *out-of-the-money*.

Tabela 4.6: Comparação entre os preços da opções de venda nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.

<b>T</b>	<b>K</b>	<b>BS</b>	<b>GARCH</b>	<b>ENP_B</b>	<b>ENP_R</b>
30	0.80	0.0187	0.1061	0.1220	1.7107
	0.90	10.2470	10.5461	14.9796	18.8834
	0.95	67.5575	62.3335	75.5473	72.3524
	1.00	244.9386	231.9769	251.7165	235.9744
	1.05	576.3472	566.6884	581.2413	567.2042
	1.10	1016.7370	1012.8230	1020.0489	1015.0186
	1.20	2000.2865	1997.3990	2000.7138	2001.8802
90	0.80	6.1802	8.5851	9.7949	27.4482
	0.90	85.5043	79.7292	98.7897	110.2878
	0.95	210.6287	193.1472	227.8785	219.4795
	1.00	424.1129	400.2790	442.1549	414.9956
	1.05	729.6159	708.1686	744.7019	711.6127
	1.10	1112.7342	1098.1638	1123.9700	1097.1228
	1.20	2020.5589	2016.5202	2024.3118	2017.5145
180	0.80	40.8498	44.0317	50.0102	122.2002
	0.90	203.3973	187.0836	223.5518	268.7297
	0.95	368.1044	340.5885	391.5760	407.9197
	1.00	599.5038	566.6206	623.7355	612.5827
	1.05	896.4698	865.4121	919.7082	890.6394
	1.10	1251.4402	1227.1374	1271.6161	1237.6381
	1.20	2089.9933	2082.8455	2102.5881	2080.5633

Na tabela 4.4 e 4.6, não foi analisado os impactos das variações sobre a volatilidade inicial, mas conforme verificado anteriormente, eles aumentariam apenas os preços GARCH.

Na tabela 4.7, novamente podemos confirmar a superioridade dos preços ENP\_B e o ENP\_R na situação *out-of-the-money*.

Tabela 4.7: Comparação entre os vieses dos preços das opções de venda nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.

<b>T</b>	<b>K</b>	<b>GARCH</b>	<b>ENP_B</b>	<b>ENP_R</b>
30	0.80	467.2038	552.5236	9047.8884
	0.90	2.9189	46.1853	84.2825
	0.95	-7.7327	11.8266	7.0975
	1.00	-5.2918	2.7672	-3.6598
	1.05	-1.6759	0.8492	-1.5864
	1.10	-0.3850	0.3257	-0.1690
	1.20	-0.1444	0.0214	0.0797
90	0.80	38.9115	58.4873	344.1316
	0.90	-6.7542	15.5377	28.9851
	0.95	-8.2997	8.1896	4.2021
	1.00	-5.6197	9.5715	-2.1497
	1.05	-2.9395	2.0677	-2.4675
	1.10	-1.3094	1.0097	-1.4030
	1.20	-0.1999	0.1857	-0.1507
180	0.80	7.7895	22.4247	199.1451
	0.90	-8.0206	9.9089	32.1206
	0.95	-7.4750	6.3763	10.8163
	1.00	-5.4851	4.0420	2.1816
	1.05	-3.4644	2.5922	-0.6504
	1.10	-1.9420	1.6122	-1.1029
	1.20	-0.3420	0.6026	-0.4512

Apresentamos novamente as diferenças entre os preços nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6, após a divisão dos preços de cada método pelo preço do modelo de Black e Scholes. Os valores iguais (ou próximos) a um indicam a igualdade com os preços de Black e Scholes. Já valores maiores do que um, representam superioridade e os menores do que um, indicam a inferioridade em relação ao preço de Black e Scholes. Não mantemos uma escala fixa para o eixo razão entre os preços para que possamos visualizar a sensibilidade entre os métodos.

Na figura 4.4, praticamente todos os preços são superiores aos preços de Black e Scholes e terminam praticamente iguais. O preço ENP\_R é o mais disperso.

Na figura 4.5, o aumento da maturidade provoca variações já no início (*out-of-the-money*) que duram até a situação *in-the-money*. Observe que, o aumento do preço de exercício, diminui o preço GARCH. Porém, ele termina igual ao preço de Black e Scholes. Já os outros preços permanecem superiores.

Na figura 4.6, podemos constatar a sensibilidade dos preços com o aumento da maturidade. Apesar de os preços se distanciarem um pouco mais na situação *out-of-the-money*, eles permanecem no mesmo quadro descrito na figura 4.5

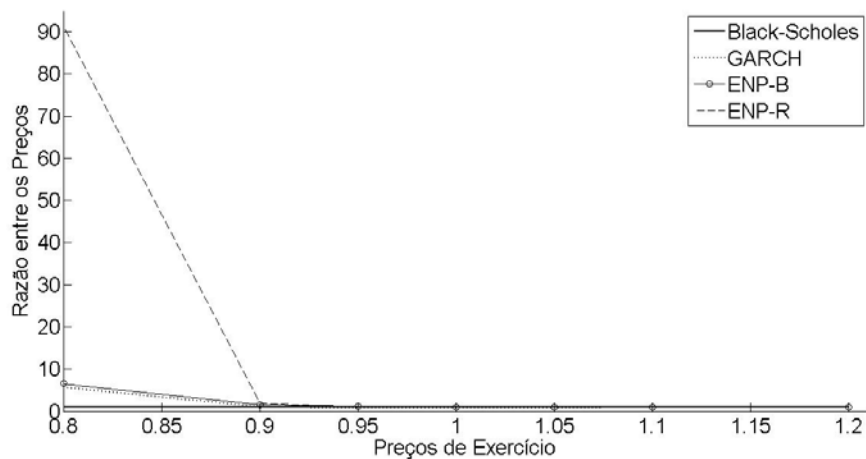


Figura 4.4. Preços das opções de venda como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 30.

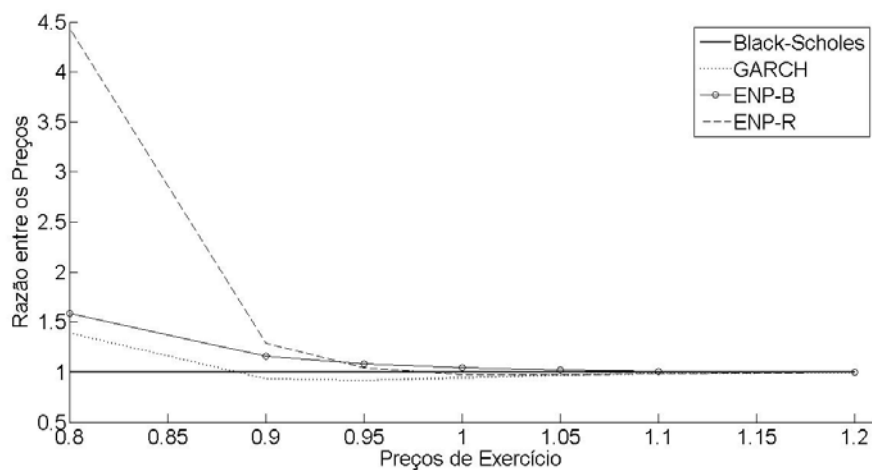


Figura 4.5. Preços das opções de venda como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 90.

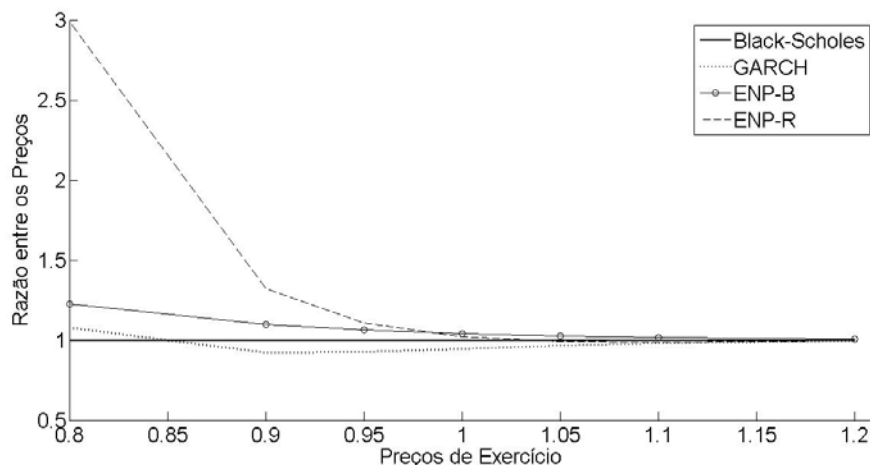


Figura 4.6. Preços das opções de venda como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 180.

Na literatura, é conhecido que o modelo de Black e Scholes [3] subprecifica opções *out-of-the-money* e com vencimento de curta duração. De acordo com as tabelas 4.5 e 4.7 e com as figuras 4.1 até a 4.6, podemos constatar que o preço da opção ENP\_B e ENP\_R foi superior aos demais, principalmente, nas situações *out-of-the-money*. Então o método proposto indica que há mais risco do que os outros modelos podem capturar.

Nesse contexto, destacamos dois aspectos relevantes para explicar as diferenças entre os preços neutros ao risco. O primeiro é a forma pela qual as taxas de retorno foram geradas. O segundo relaciona-se com as distribuições de probabilidade no vencimento da maturidade. Certamente, o primeiro aspecto influencia no resultado do segundo. No entanto, o segundo é o mais importante para explicar os vieses nos preços. Portanto, são as diferenças nos formatos das distribuições de probabilidade e, principalmente, nas suas caudas é que provocam as distorções nos resultados apresentados pelos métodos.

Nas figuras 4.7 até a 4.10, apresentamos os histogramas dos retornos acumulados tanto na medida P quanto na medida Q para a menor maturidade<sup>17</sup>. Na figura 4.7, apresentamos os histogramas dos modelos de apuração de opções GARCH tanto na medida P quanto na medida Q. Na figura 4.8, temos o histograma sob medida P utilizando novamente o modelo de apuração de

<sup>17</sup> Procuramos destacar o deslocamento da distribuição de probabilidade para o caso paramétrico (GARCH e o ENP\_G) e um não-paramétrico (ENP\_B) e, assim, não apresentamos os histogramas ENP\_BS e o ENP\_R. Mas, alguns dos fatos estilizados são apresentados através de suas estatísticas descritivas na tabela 4.8.

opções GARCH (que é igual ao ENP\_G) e, para gerar a medida Q, utilizamos o método proposto. Na figura 4.9, apresentamos os histogramas dos retornos acumulados sob medida Q gerados pelos modelos de apreçamento de opções GARCH e pelo método proposto. Nesse caso, constatamos que a reponderação das taxas de retorno pela Transformada de Esscher reproduz a medida Q do modelo neutro ao risco de Duan. Na figura 4.10, obtemos as medidas P e Q diretamente da distribuição dos retornos históricos pelo método proposto.

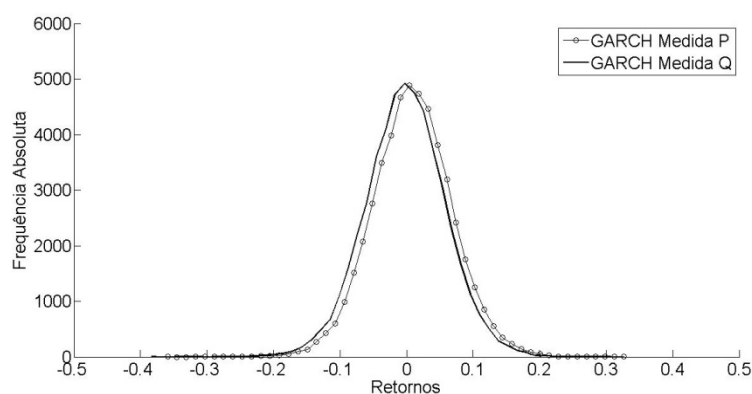


Figura 4.7. Histograma dos retornos acumulados sob medida de probabilidade P e medida neutralizada Q para opções GARCH.

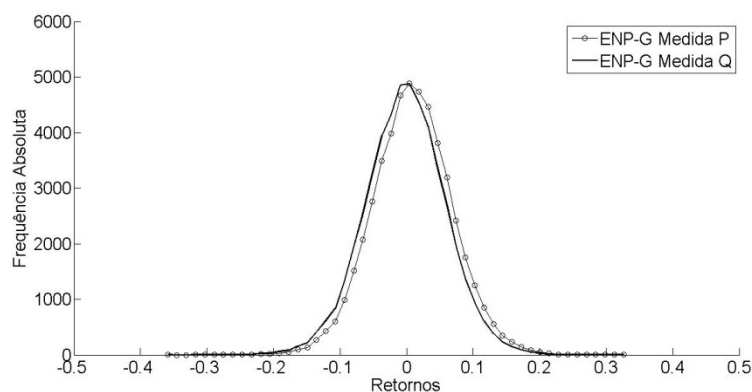


Figura 4.8. Histograma dos retornos acumulados sob medida de probabilidade P e medida neutralizada Q para opções ENP\_G.



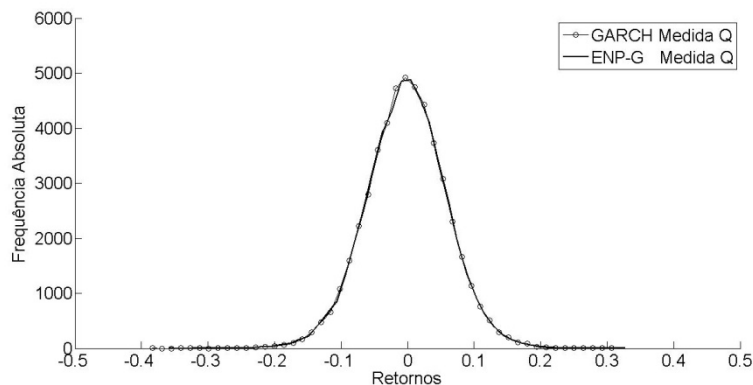


Figura 4.9. Histograma dos retornos acumulados sob medidas neutralizadas Q para as opções GARCH e ENP\_G.

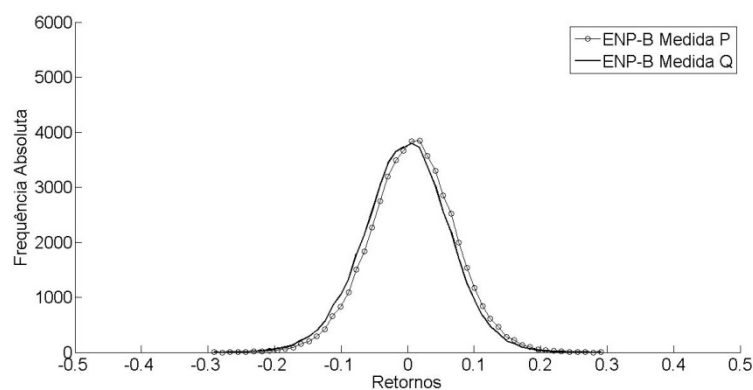


Figura 4.10. Histograma dos retornos acumulados sob medida de probabilidade P e medida neutralizada Q para opções ENP\_B.

A partir da visualização gráfica podemos inferir sobre o formato, o padrão modal e a presença de valores extremos nas distribuições de probabilidade. Podemos observar nas figuras 4.7, 4.8 e 4.9 que elas são mais altas, afiladas e com a cauda esquerda mais longa. Já a figura 4.10 é menor que as demais e com as caudas mais simétricas.

A literatura sobre séries financeiras diz que elas apresentam características próprias, como por exemplo, tendências, períodos de alta volatilidade, distribuições assimétricas e curtoses específicas. Na tabela 4.8, apresentamos as principais estatísticas dos retornos acumulados sob medida Q, nas diferentes maturidades, para verificar a presença de alguns desses fatos estilizados:

1. Existe uma proximidade nos valores da média, para a menor maturidade, nas distribuições GARCH e ENP\_G e entre as distribuições ENP\_BS, ENP\_B e ENP\_R. Sabemos que a média é bastante sensível e que se distorce na presença de *out-liers*. Em todos os casos, o crescimento da maturidade reduziu a média. Essa queda pode ser explicada em parte pelo aparecimento de valores extremos e, principalmente, pelo deslocamento para a esquerda que acontece com a distribuição neutra ao risco.
2. No caso das variâncias, nas maturidades 30 e 90, existe uma proximidade entre valores das distribuições ENP\_BS, GARCH e ENP\_G. E nas distribuições ENP\_B e ENP\_R apresentam valores maiores. Verificamos que na medida em que aumentamos a maturidade, a variância também aumenta. Esse aspecto indica que quanto maior for a maturidade, maior é a probabilidade da opção migrar entre as situações *at-the-money*, *in-the-money* e *out-of-the-money*. Tal fato provoca um aumento nas expectativas de os agentes exercerem a opção e, conseqüentemente, aumenta o prêmio de risco.
3. A curtose indica o grau de achatamento das distribuições em relação à distribuição normal. Caso ela seja igual a 3, temos a normal (mesocúrtica); se maior do que 3, ela é mais afunilada e concentrada (leptocúrtica) e, se for menor do que 3, ela é mais achatada (platicúrtica). Todos os retornos são leptocúrticos. Quanto maior a curtose, maior é a probabilidade de acontecer retornos com valores extremos caso fosse uma distribuição gaussiana. Os valores extremos estão mais evidentes nas distribuições GARCH, ENP\_G, ENP\_R, onde seus valores crescem conforme aumentamos a maturidade. No entanto, a probabilidade de acontecer valores extremos diminuiu para as distribuições ENP\_BS e o ENP\_B. O crescimento da maturidade faz com que essas distribuições convirjam para a normal gaussiana.
4. Em relação ao grau de assimetria das distribuições, as classificamos da seguinte maneira: para um valor igual a zero a distribuição é simétrica, se maior do que zero ela é assimétrica positiva e, se menor do que zero, ela é assimétrica negativa. Todos os retornos apresentaram assimetria negativa. Isto é, a cauda da esquerda é mais longa do que a cauda da

direita e a maior parte dos valores estão concentrados do lado direito da distribuição dos retornos.

Tabela 4.8: Comparação entre as principais estatísticas descritivas dos retornos acumulados neutros ao risco dos preços das opções calculados pelos modelos de Duan e do Esscher Não Paramétrico.

Preços	T	Média	Variância	Curtose	Assimetria
ENP_BS	30	-0.0020	0.0037	3.0127	-0.0029
	90	-0.0061	0.0113	3.0197	-0.0156
	180	-0.0115	0.0227	3.0014	-0.0081
GARCH	30	-0.0017	0.0036	3.5367	-0.0250
	90	-0.0042	0.0108	3.8348	-0.0236
	180	-0.0100	0.0219	4.1315	-0.0953
ENP_G	30	-0.0018	0.0036	3.5735	-0.0646
	90	-0.0054	0.0108	3.7707	-0.1381
	180	-0.0115	0.0234	4.8711	-0.4255
ENP_B	30	-0.0021	0.0042	3.3122	-0.0725
	90	-0.0061	0.0124	3.1698	-0.0790
	180	-0.0124	0.0249	3.0416	-0.0607
ENP_R	30	-0.0021	0.0039	5.7052	-0.6425
	90	-0.0068	0.0144	12.9705	-1.6976
	180	-0.0178	0.0424	24.8077	-3.2314

Consideramos os preços ENP\_G e o ENP\_B como preços justos de mercado e calculamos volatilidade implícita. Isto é, resolvemos a equação de Black e Scholes [3] ao contrário. Supondo que os preços praticados no mercado são justos, descobrimos qual é a volatilidade quando a colocamos em função das outras variáveis do modelo. Dessa forma, obtemos a volatilidade implícita. Ela reflete as expectativas dos agentes do mercado em relação à variabilidade do preço do ativo objeto. O cálculo da volatilidade implícita sobre um mesmo ativo apresenta vários níveis diferentes de volatilidade, destacando o efeito *smile*. Esse efeito apresenta um comportamento sistemático em relação aos preços de mercado das opções para os vários prazos e preços de exercício.

Nas figuras 4.11 e 4.12 apresentamos o comportamento da volatilidade implícita para as três diferentes maturidades. Nesse caso, utilizamos o nível inicial do desvio padrão condicional igual à volatilidade incondicional. Podemos observar que o método proposto é capaz de reproduzir o sorriso da volatilidade que foi observado empiricamente tanto para o caso paramétrico (ENP\_G) quanto para o não paramétrico (ENP\_B). A volatilidade diminui à medida que aumenta preço de exercício, e esse comportamento é mais evidente para as opções com vencimento a curto prazo.

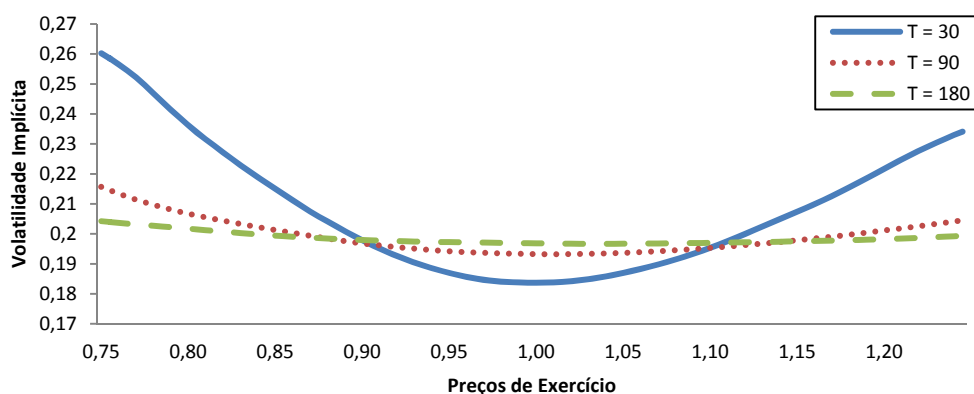


Figura 4.11. Volatilidade Implícita observada nos preços da opção ENP\_G com diferentes maturidades.

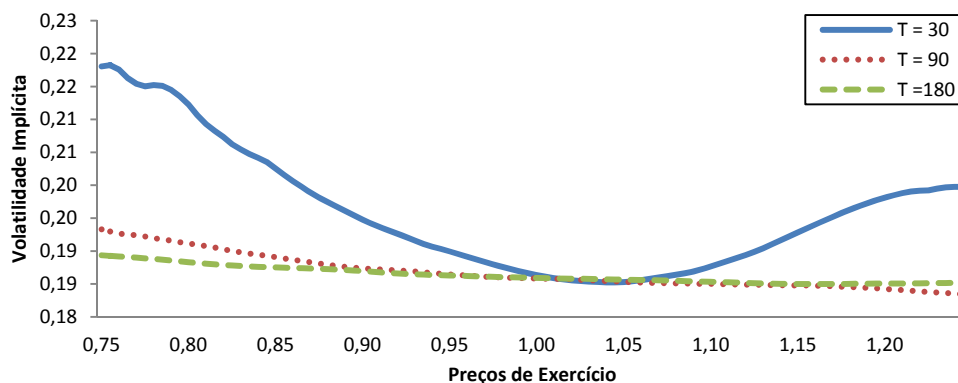


Figura 4.12. Volatilidade Implícita observada nos preços da opção ENP\_B com diferentes maturidades.

Uma característica marcante das séries de retornos financeiros é a fraca dependência linear entre as observações<sup>18</sup>. A dificuldade em encontrar analiticamente a verdadeira distribuição dos retornos torna-se necessário o uso de

<sup>18</sup> No apêndice A, apresentamos alguns dos fatos estilizados das séries financeiras identificados pela literatura.

técnicas não paramétricas como o *Bootstrap* (terceiro exercício) para estimá-la. Entretanto, a existência de dependência nos dados faz com que essa técnica seja adaptada para capturar adequadamente essa característica das séries financeiras. Assim, Hall [22] desenvolveu a ideia de *Bootstrap* em Blocos.

A questão essencial para a utilização do *Bootstrap* em blocos está na determinação do tamanho ideal de cada bloco. De acordo com Hall, o tamanho ótimo depende do tipo de estatística. Por exemplo, caso seja a estimação da variância ou viés o tamanho ideal pode ser aproximado por  $n^{1/3}$ . Na estimação de distribuições unicaudais o tamanho ideal pode ser aproximado por  $n^{1/4}$ , e se a estimação for para distribuições bicaudais, o tamanho ideal pode ser aproximado por  $n^{1/5}$ . Neste trabalho, estamos estimando distribuições bicaudais.

Podemos concluir que a fraca dependência linear não provocou distorções tão acentuadas entre os preços gerados pelo *Bootstrap* com e sem bloco.

Tabela 4.9: Comparação entre os preços das opções de compra e de venda utilizando a técnica *Block Bootstrap* para o modelo Esscher Não Paramétrico.

T	K	Compra			Venda		
		n=1	n=5	Viés %	n=1	n=5	Viés %
30	0.80	2000.1758	2000.1134	-0.0031	0.1220	0.1556	27.5410
	0.90	1014.9918	1015.2547	0.0259	14.9796	15.2969	2.1182
	0.95	576.1337	577.3961	0.2191	75.5473	77.4383	2.5031
	1.00	253.0622	253.9761	0.3611	251.7165	254.0183	0.9144
	1.05	81.9193	81.1235	-0.9714	581.2413	581.1658	-0.0130
	1.10	19.8900	19.6679	-1.1166	1020.0489	1019.7101	-0.0332
	1.20	0.6881	0.6041	-12.2075	2000.7138	2000.6463	-0.0034
90	0.80	2008.9777	2010.1482	0.0583	9.7949	9.4385	-3.6386
	0.90	1096.5775	1100.0630	0.3179	98.7897	99.3534	0.5706
	0.95	724.2216	730.0234	0.8011	227.8785	229.3138	0.6299
	1.00	437.4718	444.2988	1.5606	442.1549	443.5892	0.3244
	1.05	241.5843	247.1017	2.2838	744.7019	746.3921	0.2270
	1.10	122.1748	125.0498	2.3532	1123.9700	1124.3402	0.0329
	1.20	24.3064	24.6053	1.2297	2024.3118	2023.8956	-0.0206
180	0.80	2050.0097	2051.5572	0.0755	50.0102	51.5565	3.0920
	0.90	1224.0732	1227.5659	0.2853	223.5518	227.5652	1.7953
	0.95	892.1924	896.4364	0.4757	391.5760	396.4357	1.2411
	1.00	623.8569	628.3295	0.7169	623.7355	628.3288	0.7364
	1.05	419.0695	423.6358	1.0896	919.7082	923.6351	0.4270
	1.10	270.2855	275.2493	1.8365	1271.6161	1275.2486	0.2857
	1.20	100.8059	104.4995	3.6641	2102.5881	2104.4988	0.0909