3
Modelo Proposto

O grande volume de negociações de produtos financeiros, o surgimento espontâneo de crises e o aparecimento de novos produtos têm tornado cada vez mais complexo e desafiador o gerenciamento de risco nos mercados financeiros. Nesse contexto, as opções financeiras adquirem grande importância, porque elas podem ser utilizadas como um mecanismo de proteção contra as oscilações dos preços no futuro ou como investimento especulativo. Então, determinar o preço justo de um derivativo é fundamental para o mercado. Portanto, cada vez mais existe a necessidade de se utilizar ferramentas adequadas que mensurem o risco, que sejam de fácil implementação computacional e contribuam para a redução da incerteza dos mercados.

No capítulo anterior, apresentamos os modelos de Black e Scholes [3], de Duan [13] e o método da Transformada de Esscher [19] para o apreçamento das opções financeiras. Em comum, eles impõem restrições e hipóteses específicas para a formulação de um modelo neutro ao risco que é necessário para o apreçamento. Por exemplo, a distribuição log-normal e a volatilidade constante, o choque aleatório gaussiano, os processos estocásticos com incrementos estacionários e independentes. No método proposto, procuramos não criar um modelo neutro ao risco explícito. Para tanto, relaxamos a hipótese sobre a componente estocástica do modelo e adaptamos a Transformada de Esscher [19], utilizada nos moldes de Gerber e Shiu [20], para uma versão não paramétrica.

Evitar suposições sobre a dinâmica dos preços do ativo subjacente permitiu uma flexibilidade maior para que o método se adapte aos dados e seja aplicável quando a distribuição de probabilidade seja conhecida ou desconhecida. A principal restrição do método proposto é que o processo estocástico gerador dos dados admita o cálculo da função geradora de momentos. No desenvolvimento do método proposto, a transformada de Esscher Não Paramétrica (ENP), assumimos as demais premissas encontradas no modelo de Black e Scholes [3]: não há custos operacionais e todos os títulos são perfeitamente divisíveis; a ação não pagará dividendos durante a vida útil da opção; ausência de oportunidades de arbitragem;

negociação com títulos é contínua; os investidores podem captar ou emprestar a mesma taxa de juro livre de risco; a taxa de juro livre de risco r é constante.

Seja Y uma variável aleatória com distribuição de probabilidade desconhecida. Suponha que ela admita o cálculo da função geradora de momentos. Considere também que ela seja a taxa de retorno capitalizada continuamente de um ativo qualquer. Logo, uma amostra de tamanho n será,

$$Y = [y_1 \; y_2 \; \dots \; y_n]$$

Se cada y_j indica a realização de uma taxa de retorno dentro de um cenário possível, então, um conjunto de taxas com uma variedade de valores distintos representa o grau de incerteza desse ativo. Sejam dois instantes, $t = 0$ e $T = 1$, e que o preço do ativo seja dado por S_T. Então,

$$S_T = S_t e^{y_j} \tag{3.1}$$

Sabemos que no instante T, esse ativo terá um valor de acordo com o estado j da economia. Estamos admitindo que qualquer taxa da amostra extraída possa se repetir novamente no futuro. Sendo Y um conjunto de taxas reais de mercado, logo elas estão sob medida de probabilidade P (ou medida original).

Conforme em Sundaram [37], para encontrarmos o preço neutro ao risco, obedeceremos aos seguintes procedimentos:

1. identificar a medida de probabilidade neutra ao risco;
2. o valor esperado do *payoff* do derivativo será avaliado sob essa medida;
3. descontar o valor esperado utilizando a taxa livre de risco.

No contexto de Gerber e Shiu [20], a medida Q foi obtida para uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida. O desconhecimento da distribuição de probabilidade de Y, faz com que utilizemos o estimador não paramétrico da função geradora de momentos, isto é, a função geradora de momentos empírica,

$$\widehat{M_Y}(h,T) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{hy_j} \tag{3.2}$$

A principal vantagem de se utilizar um estimador não paramétrico é permitir a ausência de hipóteses sobre a distribuição de probabilidade da variável aleatória. Então, substituindo a expressão (2.47), por (3.2) temos,

$$e^r = \frac{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j(h+1)}}{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j h}} \tag{3.3}$$

Novamente o h é um número real responsável pela transformação da distribuição de probabilidades sob medida P em uma distribuição sob medida Q. Em Gerber e Shiu [20], o h^* é um valor resultante do processo estocástico estabelecido para a variável aleatória. No método proposto, procuramos o h^* que independa de um processo estocástico específico, logo

$$h^* = \arg_h \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j(h+1)}}{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j h}} = e^r \right\} \tag{3.4}$$

Ao admitirmos a hipótese de ausência de arbitragem conforme Harrison e Kreps [23], estamos admitindo a existência de uma medida martingale equivalente. Então, temos um h^* único, responsável pela transformação da medida de probabilidade P em medida Q.

Identificamos a medida neutra ao risco do método, reponderando a amostra de taxas de retorno pela Transformada de Esscher [19]. Então, para tornar essa amostra numa densidade neutra ao risco empírica, normalizamos o vetor Q^{h^*}, tal que a $\sum_{j=1}^{n} Q_j^{h^*} = 1$,

$$Q^{h^*} = \frac{e^{y_j h^*}}{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j h^*}} \tag{3.5}$$

O Q^{h^*} é o vetor de probabilidades neutro ao risco dentro da amostra selecionada. Então, calculamos o valor esperado da opção europeia $C(S,t)$, com preço de exercício K, sob a medida Q^{h^*},

$$C(S,t) = E^Q\left[e^{-r(T-t)}(S_T e^{y_j} - K)_+\right]$$

fazendo,

$$C_{T,j} = (S_T e^{y_j} - K)_+$$

temos,

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} \left(\sum_{j=1}^{n} C_{T,j} Q_j^{h^*} \right) \tag{3.6}$$

O termo entre parênteses é equivalente ao valor esperado de uma variável aleatória em tempo discreto. Nesse caso, ele é o valor esperado na medida de probabilidade neutra ao risco dada pelo método. Observe que o preço da opção em t será dado pelo somatório de todos os *payoffs* da opção $C_{T,j}$ em T, ponderados pela probabilidade de ocorrência dos cenários possíveis $Q_j^{h^*}$.