2
Apreçamento Neutro ao Risco

O processo de globalização dos mercados financeiros iniciou, na década de 60, com internacionalização bancária que procurou acompanhar o crescimento dos investimentos diretos e dos fluxos comerciais em novos mercados. O padrão de crédito mundial, centrado nos bancos internacionais, permitiu um grande crescimento das atividades econômicas e financeiras em diversos países. Segundo Vasconcelos [38], a ruptura deste padrão de crédito ocorreu com a substituição deste sistema por outro baseado no mercado de capitais, provocando profundas transformações no cenário mundial. Dentre elas, podemos destacar: aumento da concorrência (devido à perda de importância do setor bancário e ao crescimento dos investidores institucionais), políticas de liberalização financeira e as inovações financeiras, como a securitização de dívidas e os mecanismos de redução de risco (futuros, *swaps* e opções).

Essa integração dos mercados mundiais junto com as inovações financeiras proporcionaram novos riscos e novas oportunidades de investimento aos investidores. Nesse contexto, apreçar os novos ativos disponíveis na economia de maneira mais eficiente tornou-se prioridade para o mercado. De acordo com Cochrane [8], temos duas formas de determinar os preços dos ativos: o apreçamento absoluto e o relativo. No primeiro caso, a teoria concentra-se na mensuração das fontes de risco que afetam os preços dos ativos e, no segundo caso, o objetivo é determinar o preço de um ativo que está em função do preço de outro ativo. Um exemplo clássico de apreçamento relativo é o modelo de Black e Scholes [3] para apreçar opções.

Desde a década de 70, o mercado de opções vem se expandindo e se apresentado como uma alternativa de investimento, que ora funciona como um mecanismo de *hedge* contra as variações dos preços no futuro ou, simplesmente, para obter lucros a partir da especulação. De acordo com Hull [24], as opções são instrumentos derivativos que garantem o direito, mas não a obrigação, de comprar ou de vender um ativo em uma data futura por um preço previamente estipulado. Na determinação do preço justo dos instrumentos derivativos, os principais modelos utilizados pelo mercado são a tradicional fórmula de Black e Scholes [3], e suas distintas extensões, e os modelos baseados na avaliação neutra ao risco de Cox & Ross [10] e de Harrison & Kreps [23]. Neste capítulo, procuramos apresentar os conceitos básicos fundamentais, as ideias principais e três modelos importantes para o apreçamento de opções.

2.1
Conceitos Básicos

2.1.1
State-Price

Segundo Äit-Sahalia e Lo [1], um dos avanços teóricos mais importantes na economia do investimento sob incerteza é o *preference state-time* de Arrow [2] e Debreu [11]. Eles introduziram títulos puros, ou contratos contingenciais, que pagam uma unidade monetária para um estado específico da natureza e nada para qualquer outro estado. O ativo Arrow-Debreu inspirou duas das principais abordagens encontradas na literatura referente a apreçamento de derivativos. Os modelos de equilíbrio baseados na preferência, como em Rubinstein [34] e Lucas [27], e os modelos baseados na não-arbitragem, conforme o de Black e Scholes [3]. Os preços dos títulos Arrow-Debreu são chamados de *State-Price* e, para os estados contínuos da natureza, *State-Price Density* (SPD).

De acordo com Duffie [14], basta à existência de qualquer uma das três condições – ausência de arbitragem, otimalidade do agente único e mercado em equilíbrio – para a existência de *state-price*[1].

2.1.1.1
State-Price Baseado na Otimalidade

Suponha uma economia que possua apenas dois instantes, t=0 e T=1. Admita que existam N ativos disponíveis no instante t, cujos preços são dados pela variável aleatória $S_i(t)$, onde i = 1, 2,..., N. A passagem do tempo traz a

[1] Em Duffie [14] essa discussão é apresentada com maiores detalhes.

incerteza em relação ao futuro. Então a representamos através de um conjunto de cenários possíveis que pertencem a um espaço amostral finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$, onde cada estado ω_j, com j = 1, 2,..., k, ocorre com probabilidade $p(\omega_j)$, ou simplesmente p_j, e o $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. Assim, no instante T, cada ativo (i) tem um valor de acordo com o estado (j) da economia, definido por $\Gamma_i(\omega_j)$, ou Γ_{ij}. Matricialmente,

$$S(t) = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \cdots & \Gamma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \cdots & \Gamma_{Nk} \end{bmatrix}$$

De acordo com Copeland e Weston [9], um investidor poderia construir um portfólio, com esses ativos, que tivesse o mesmo *payoff* em todos os estados, ao invés de pensar em *payoffs* individuais nos vários estados. Então, representamos esse portfólio através de um vetor coluna de tamanho N, onde cada η representa quantas unidades de um ativo, em particular, serão mantidas na carteira pelo investidor. Temos,

$$\theta^T = [\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_N]$$

e o portfólio será dado por,

$$S^T\theta$$

A matriz Γ_{ij} representa o mercado, pois ela contém o conjunto de todos os *payoffs* dos ativos. E dentre os ativos disponíveis, destacamos dois grupos: os Linearmente Independentes (LI) e os Linearmente Dependentes (LD). Os ativos LI são aqueles cujos rendimentos não podem ser reproduzidos através de uma combinação linear de outros ativos, são análogos aos títulos Arrow-Debreu. Já os ativos LD podem ter seus rendimentos replicados a partir de uma combinação linear de outros ativos. Assim, concluímos que essa carteira replicante será composta, principalmente, pelos ativos LI que reproduzem qualquer padrão de retorno a partir de uma combinação linear.

Segundo Copeland e Weston [9], se existem tantos títulos LIs quanto existem estados possíveis do mundo o mercado é completo, isto é, qualquer padrão de retorno pode ser reproduzido. Caso contrário, concluímos que um mercado é incompleto quando não conseguimos reproduzir os retornos através criação de um portfólio. Qual seria o preço de um portfólio replicante neste mercado completo? Para Rubinstein [34], a lei do preço único determina que dois ativos que apresentem o mesmo padrão de retorno tenham o mesmo preço para que não haja arbitragem.

Dada a inexistência de arbitragem, o preço do portfólio depende apenas da preferência do investidor em relação ao risco e o retorno. A função utilidade[2] permite classificar as riquezas aleatórias através de seus valores de avaliação e compreender como um investidor racional decide sob condições de incerteza. Conforme em Matos [29], assumimos que todos os investidores maximizam a função utilidade esperada[3], de forma que a escolha do portfólio ótimo depende da satisfação da decisão intertemporal do consumo. Isto é,

$$\max_{\theta} E^P\{U[x(\theta), Y(\theta)]\} \tag{2.1}$$

s.a

$$x(\theta) = x - S^T\theta$$
$$Y(\theta) = Y + \Gamma^T\theta$$

onde, $x(\theta)_{(1X1)}$ é o consumo para o instante t; $x_{(1X1)}$ é a riqueza inicial; $S^T\theta_{(1X1)}$ o preço de mercado do portfólio θ ; $Y(\theta)_{(kX1)}$ indica o plano consumo para todos os cenários em T; $Y_{(kX1)}$ é o plano de consumo esperado para T; $\Gamma^T\theta_{(kX1)}$ corresponde ao incremento esperado para consumir em T. A função objetivo, sob medida de probabilidade original P, demonstra que o investidor pode ajustar o grau de consumo no futuro de acordo com as quantidades negociadas dos ativos que irão compor o portfólio. Para encontrar o ponto máximo, deve-se derivá-la em relação à θ e igualar o resultado a zero. Segundo, a notação Leibniz,

[2] Uma função utilidade pode variar entre os agentes devido à tolerância individual em relação risco. Porém, ela deve ser monotônica e estritamente crescente para evidenciar que o investidor racional prefere mais riqueza a menos e, também, ser côncava para denotar a aversão ao risco.
[3] O príncipio da utilidade esperada foi estabelecido por von Neumman e Morgenstern [39].

$$\frac{\partial U(x(\theta),\mathrm{Y}(\theta))}{\partial\theta}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial U(x-S^T\theta,\ Y+\Gamma^T\theta)}{[\partial x(\theta),\partial Y(\theta)]}\frac{[x(\theta),Y(\theta)]^T}{\partial\theta}p_j \tag{2.2}$$

As condições de primeira ordem indicam que a escolha do portfólio ótimo deve obedecer este critério, temos

$$\partial E[U]=0\ \Rightarrow -U_xS^T+E\left[U_y\Gamma^T\right]=0 \tag{2.3}$$

De acordo com Matos [29], um decréscimo na utilidade marginal do consumo em t será compensado por uma utilidade esperada bem maior para consumir em T. A escolha do portfólio ótimo estabelece uma forma de apreçar os ativos em t, baseando-se nos retornos futuros, através do seguinte relacionamento:

$$S=\sum_{j=1}^{k}\Gamma_j p_j\frac{\partial U/\partial Y_j}{\partial U/\partial x}=\sum_{j=1}^{k}\Gamma_j\psi_j \tag{2.4}$$

onde,

$$p_j\frac{\partial U/\partial Y_j}{\partial U/\partial x}=\psi_j>0$$

O vetor ψ é conhecido na literatura como *state-price*. Podemos observar que a razão entre as utilidades representa uma taxa marginal de substituição entre consumo presente e futuro, ponderados pela distribuição de probabilidade de um estado específico. Segundo Duffie [14], um vetor *state-price* representa fatores de desconto positivos, um para cada estado, tal que, o preço de qualquer título é meramente a soma dos *payoffs* ponderados pelos *state-prices*. Sendo o mercado completo, teremos um único vetor de *state-price* para apreçar os ativos.

2.1.1.2
State-Price Baseado na Ausência de Arbitragem

O conceito de arbitragem é amplamente utilizado em diversas situações econômicas, principalmente quando se trata do apreçamento de ativos no mercado. Segundo Siqueira [36], arbitragem é a obtenção de lucros certos a partir das diferenças de preços quando o mesmo título, moeda ou *commodity* é negociado em dois ou mais mercados. De acordo com Luenberger [27], existem dois tipos de arbitragem:

1. $S^T\theta \leq 0$ e $S^T\theta > 0$;
2. $S^T\theta < 0$ e $S^T\theta \geq 0$.

No primeiro caso, a carteira garante com certeza um retorno positivo no futuro a custo zero ou negativo no presente (custo negativo é equivalente a uma receita positiva). Para o segundo caso, a carteira garante um lucro imediato sem impacto no resultado futuro. De maneira geral, não classificamos a arbitragem por algum tipo, apenas dizemos se existe ou não a possibilidade de praticá-la. Se todos os agentes têm a função utilidade crescente na riqueza, as oportunidades de ganhos com arbitragem tendem a desaparecer. Isto é, independentemente das preferências dos investidores, eles levarão as oportunidades de arbitragem ao fim porque preferem ficar mais rico sem correr riscos. Assim, os arbitradores desempenham um papel econômico importante ao fazer com que os mercados funcionem com maior eficiência e livre de lucros certos.

Segundo Matos [29], a ausência de oportunidades de arbitragem é equivalente à existência de um vetor *state-price* estritamente positivo, $\psi \in \mathrm{R}^{\mathrm{k}}_{+}$, tal que, os preços sejam dados por,

$$S = \Gamma\psi \tag{2.5}$$

sob a hipótese de mercados completos, o vetor *state-price* pode ser definido como

$$\psi = \Gamma^{-1}S \tag{2.6}$$

Nesse caso, diante da ausência da arbitragem, para determinarmos este vetor necessitamos que S seja dado. Se o mercado completo apresentar características de um mercado de concorrência perfeita, onde os preços são únicos, formados pela interação das forças de oferta e demanda e nenhum participante do mercado tenha força suficiente para interferir sozinho no mercado. Então, os preços dos ativos determinam o vetor *state-price* em condição de equilíbrio. A hipótese de ausência de arbitragem para o apreçamento de derivativos dispensa suposições distantes da realidade, como, por exemplo, mercados completos, perfeitos ou eficientes (ausência de custos transacionais).

No apreçamento de derivativos, a utilização do teorema da arbitragem, pode ser abordada sob dois aspectos distintos. O primeiro foi proposto por Black e Scholes [3] que basearam se na criação de uma carteira livre de risco, no uso de equações diferenciais parciais e nas condições de contorno para obter soluções analíticas. Já na segunda forma, de Harrison e Kreps [23], o foco fica restrito na obtenção de medidas de probabilidades neutras ao risco ou martingale equivalente[4].

2.1.2 Avaliação Neutra ao Risco

De acordo com Hull [24], o princípio da avaliação neutra ao risco[5] afirma que qualquer título que seja dependente de outro título, pode ser avaliado segundo a suposição de que os investidores sejam indiferentes ao risco. O conceito surge quando Black e Scholes criam uma carteira livre de risco capaz de reproduzir o padrão de retorno de um título. Se dois ativos apresentam o mesmo *payoff*, então devem ter o mesmo preço para que não haja arbitragem. Como as preferências individuais, refletidas nas probabilidades distintas e subjetivas, não influenciam o valor da opção, os investidores não exigem compensação pelo risco assumido e o retorno esperado será a taxa livre de risco (que é conhecida e simplifica os

[4] Neftci [31] apresenta as diferenças entre as duas abordagens.
[5] Neftci [31] apresenta detalhadamente a avaliação neutra ao risco para os casos contínuos e discretos.

cálculos). Nesse contexto, a fórmula de Black e Scholes [3] cria um mundo neutro ao risco porque nenhuma das variáveis depende das preferências dos agentes. Ou seja, a taxa de retorno esperada (ou *drift*) do ativo subjacente não aparece no resultado final.

Baseando-se na estrutura de preferência abordada por Black e Scholes [3], Cox e Ross [10] apresentam uma abordagem alternativa para avaliar uma opção de compra europeia,

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} \int_{x}^{\infty} (S_T - K) f(S_T) dS_T \qquad (2.7)$$

onde S_T é o preço do ativo subjacente, K é o preço de exercício, r é a taxa livre de risco, e $f(S_T)$ é a distribuição de probabilidade desse ativo, no mundo neutro ao risco, na data de vencimento T. Assim, as distribuições definidas desta maneira são conhecidas como probabilidades neutras ao risco.

Uma probabilidade neutra ao risco corresponde à distribuição de probabilidade das possíveis trajetórias dos preços no futuro. Elas devem satisfazer duas condições: os eventos que ocorrem com probabilidade positiva na medida neutra ao risco devem ser idênticos aos que ocorrem com probabilidade positiva na medida original; e o retorno esperado de todo ativos devem ser iguais. Segundo Sundaram [37], o estudo do apreçamento de derivativos a partir das probabilidades neutras ao risco tem, pelo menos, três razões importantes: simplifica os cálculos dos preços dos ativos, tem a capacidade de testar a inconsistência de um modelo e, ainda, fornece um critério para identificar os mercados (completo ou incompleto).

Harrison e Kreps [23], baseando-se nas ideias de Cox e Ross [10], desenvolveram uma teoria de apreçamento de direitos contingenciais através da abordagem de Martingais. Segundo esses autores, a probabilidade neutra ao risco pode ser interpretada como uma medida martingal equivalente à verdadeira probabilidade do ativo. Ou seja, duas medidas de probabilidade são equivalentes se o conjunto de eventos com probabilidades positivas sob uma medida é idêntica em ambas as medidas. Entretanto, nem sempre as probabilidades atribuídas ao mesmo evento em cada medida são iguais, exceto para os casos em que a probabilidade do evento é igual a zero.

Um processo estocástico é considerado um martingale se a mudança esperada no valor do processo é sempre zero. Por exemplo, se o retorno esperado de um ativo for a taxa livre de risco, sendo avaliado sob medida de probabilidade neutra ao risco, será descontado pela mesma taxa. Então, a mudança esperada é igual a zero. Assim, segundo Matos [29], quando o valor esperado para o futuro coincide com o valor presente o processo é chamado martingale.

$$E[S_T] = S_t \tag{2.8}$$

Então, de acordo com a fórmula (2.8), um martingale é um processo sem tendência de crescimento ou queda. Onde a melhor estimativa para o instante seguinte é o valor atual. Então, as probabilidades neutras ao risco são escolhidas para que os preços sejam um martingal.

Em relação à existência da probabilidade neutra ao risco, podemos questionar, existe apenas uma, pode existir mais do que uma ou mesmo nenhuma. Harrison e Kreps [23] concluem que um modelo que admite uma única medida martingale equivalente não oferece a oportunidade de arbitragem. A oportunidade de arbitragem surge da inexistência dessa medida martingale tornando o modelo inconsistente. A unicidade ou a multiplicidade de medidas de probabilidade neutra ao risco dependem exclusivamente se o mercado for completo ou incompleto. Assim, esses autores formalizaram matematicamente os principais conceitos utilizados no apreçamento de derivativos, como, por exemplo, a ausência de arbitragem e mercado completo.

2.1.3
Relação entre *State-Price* e Probabilidade Neutra ao Risco

Segundo Sundaram [37], calcular probabilidade neutra ao risco é o mesmo que calcular um *state-price* associado ao modelo utilizado. Isto é, os preços dos títulos Arrow-Debreu desempenham um papel similar ao da probabilidade neutra ao risco. Pode ser mostrado que o *state-price* associado a um estado particular é simplesmente a probabilidade neutra ao risco daquele estado descontado pela taxa livre de risco. Por exemplo, admita a existência de um determinado ativo que apresente o seguinte padrão para seus *payoffs*,

$$\Gamma = \left[1^{(1)}\ 1^{(2)}\ \dots\ 1^{(k)}\right]$$

Percebemos que seu *payoff* não depende de qual estado da natureza aconteça, pois ele é constante. Então, tal ativo é considerado livre de risco e, de acordo com a fórmula (2.5), seu preço é dado por,

$$S = \sum_{j=1}^{k} \psi_j \tag{2.9}$$

Sabemos que o preço de um ativo livre de risco também pode ser calculado por,

$$S = \frac{1}{1+r} \tag{2.10}$$

então, igualando as equações (2.9) e (2.10), temos,

$$\sum_{j=1}^{k} \psi_j = \frac{1}{1+r} \tag{2.11}$$

Se normalizarmos o vetor *state-price* tal que a soma seja igual a 1 da seguinte forma,

$$\psi_o = \sum\nolimits_{j=1}^{k} \psi_j \tag{2.12}$$

$$q_j = \frac{\psi_j}{\psi_o} \tag{2.13}$$

por construção, $q_j \in [0,1]$ e $\sum_{j=1}^{k} q_j = 1$. Portanto, q_j torna-se o vetor de probabilidades no espaço dos estados da natureza desse ativo. Nesse caso, temos as probabilidades neutras ao risco. Assim, reescrevendo a fórmula (2.5), obtemos,

$$S = \frac{1}{1+r}\left(\sum_{j=1}^{k} q_j \Gamma_j\right) \tag{2.14}$$

O termo entre parênteses é equivalente ao valor esperado de uma variável aleatória em tempo discreto. Então, substituindo esse termo pelo operador valor esperado na medida de probabilidade neutra ao risco Q, temos,

$$\mathrm{S} = \frac{1}{1+\mathrm{r}}\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\Gamma] \tag{2.15}$$

De acordo com Sundaram [37], a partir do relacionamento entre *state-price* e a probabilidade neutra ao risco, podemos destacar algumas propriedades:

1. Ao identificarmos um *state-price* associado a um modelo, também estamos identificando a probabilidade neutra ao risco;
2. A obtenção da probabilidade neutra ao risco fracassa se, e somente se, não for possível definir um conjunto *state-price*. Isto é, existe a possibilidade de arbitragem;
3. Múltiplas probabilidades neutras ao risco existem se, e somente se, tiver múltiplos vetores *state-price*. O que é possível quando o mercado é incompleto. Ou seja, não é possível apreçar os ativos através da replicação de seus *payoffs*.

Segundo Äit-Sahalia e Lo [1], existem na literatura três abordagens utilizadas para se estimar um *state-price*, ou melhor, a função densidade probabilidade de um ativo. Na primeira abordagem, admite-se um processo estocástico específico para a dinâmica do preço do ativo subjacente e, no vencimento da maturidade, tem-se uma distribuição de probabilidade específica. Este é o caso do modelo de Black e Scholes [3]. Na segunda abordagem, utiliza-se diretamente uma função densidade de probabilidade parametrizada[6]. E, na terceira abordagem, especifica-se como "prior" uma distribuição candidata a SPD e, então, é a distribuição é estimada pela minimização da sua distância para a prior[7].

[6] Maiores detalhes veja Jarrow e Rud [26]
[7] Veja Äit-Sahalia e Lo [1].

2.2
Modelo de Black e Scholes

O modelo de Black e Scholes [3] é o mais importante dentro da teoria de opções financeiras. Ele tornou-se referência no mercado pela contribuição no processo de apreçamento, *hedging* e gerenciamento de risco em finanças. O modelo determina o valor justo de uma opção de compra europeia sobre um ativo subjacente. A ideia principal baseia-se na criação de uma carteira composta por ativos de sinais trocados que replicam os *payoffs* da opção e permanece livre de risco por um curto período de tempo. A hipótese da ausência de arbitragem e da avaliação neutra ao risco garante dois resultados importantes: o preço de uma opção seja determinado pelo valor do portfólio replicante, e o retorno esperado será a taxa livre de risco. Os pontos principais desta seção estão baseados em Hull [24] e no artigo de Black e Scholes [3].

Para o desenvolvimento do modelo é necessário admitir algumas premissas:

- O comportamento do ativo subjacente segue um processo estocástico em tempo contínuo, a distribuição de probabilidade é lognormal e a média μ e a variância σ^2 são constantes;
- Não há custos operacionais, impostos e todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
- A ação não pagará dividendos durante a vida útil da opção;
- Ausência de oportunidades de arbitragem;
- Negociação com títulos é contínua;
- Os investidores podem captar ou emprestar a mesma taxa de juro livre de risco;
- A taxa de juro livre de risco r é constante.

2.2.1
A Fórmula de Black e Scholes

Nesse modelo, a dinâmica do preço do ativo subjacente segue um passeio aleatório, que na versão contínua, é conhecido como Movimento Browniano Geométrico (MBG). Essa escolha apoia-se na suposição de mercado eficiente, ou seja, na propriedade Markoviana. Toda informação necessária está refletida diretamente nos preços do ativo e o conhecimento do passado não informa nada sobre as mudanças futuras. O processo estocástico que rege o preço do ativo subjacente, diante de uma variação infinitesimal, é

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2.16}$$

onde S_t representa o preço da ação no instante t, μ é a taxa de retorno esperada instantânea (*drift*), σ é a volatilidade em relação às futuras oscilações do preço e, dW_t, uma pequena variação em W_t. Se dW_t segue um processo de Wiener, temos,

$$dW_t = Z_t\sqrt{dt}, \qquad Z_t \sim N(0,1)$$

logo,

$$dW_t \sim N(0, dt)$$

Seja F o preço de um derivativo que está em função do preço do ativo (S) e do tempo (t). De acordo com o lema de Itô [25], uma variação infinitesimal em F pode ser modelada da seguinte maneira,

$$dF = dt\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right) + dW\left(\sigma S\frac{\partial F}{\partial S}\right) \tag{2.17}$$

Se analisarmos as equações que modelam os processos estocásticos do ativo e do derivativo, podemos observar que são afetados pela mesma fonte de incerteza dW_t. Essa coincidência permite criar uma carteira livre de risco a partir da combinação de ambos, tal que, a aleatoriedade seja eliminada. Então, este portfólio (P) livre de risco é composto por $\partial F/\partial S$ unidades, na posição comprada para o ativo e uma unidade, na posição vendida, para o derivativo,

$$P = S\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right) - F \tag{2.18}$$

As posições montadas na carteira estarão livres de risco apenas para períodos de tempo muito curtos. Para mantê-las nesta condição, é necessário ajustar tais quantidades frequentemente a cada período. Assim, a metodologia supõe que em mercados completos pode-se montar uma carteira que reproduza artificialmente um derivativo através da replicação dos *payoffs* de um título. Uma variação infinitesimal neste portfólio, temos,

$$dP = dS\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right) - dF \tag{2.19}$$

substituindo em dP, as equações (2.16) e (2.17), e após algumas simplificações temos,

$$dP = \left(-\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right) dt \tag{2.20}$$

Segundo o argumento de inexistência de arbitragem e da ausência de risco, as variações no preço do portfólio, no intervalo de tempo dt, têm rendimento igual à taxa livre de risco r, logo

$$dP = rPdt \tag{2.21}$$

substituindo em (2.21), a fórmula (2.18) e (2.20), temos:

$$r\left(S\frac{\partial F}{\partial S} - F\right) dt = \left(-\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right) dt$$

reorganizando,

$$rF = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right) - rS\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right) \tag{2.22}$$

Essa última equação não estocástica e de derivadas parciais é a tradicional fórmula de Black e Scholes [3]. A hipótese de ausência de arbitragem garante que o mercado está equilibrado, impedindo obter lucro a partir da existência de discrepâncias na avaliação de títulos semelhantes. Logo, os ativos (ou carteiras) que apresentem os mesmos *payoffs* em todos os estados da natureza devem apresentar o mesmo preço. Mas o preço do derivativo pode apresentar inúmeras soluções, pois seus resultados dependem das características dos ativos. Para obtermos soluções analíticas precisamos determinar as condições de contorno.

2.2.2
Avaliação da Opção de Compra no Modelo de Black e Scholes

Em Siqueira [36], o elemento fundamental para a avaliação de contratos de opções está nas condições de contorno. Ele é o núcleo da expressão matemática que irá definir a opção. Assim, a condição de contorno para uma opção de compra do tipo europeia que não distribui dividendos durante a vida útil do derivativo é,

$$C(S,T) = max(S_T - k, 0) \tag{2.23}$$

ou seja, precisamos resolver,

$$C = e^{-r(T-t)} E[max(S_T - k, 0)] \tag{2.24}$$

note que,

$$E[max(S_T - k, 0)] = \int_k^{\infty} (S_T - k) f(S) dS \tag{2.25}$$

onde K é o preço de exercício e o T é o tempo de vida da opção. Obedecendo à premissa de que o preço futuro do ativo tem distribuição lognormal e os retornos têm distribuição normal, obtemos a seguinte fórmula de apreçamento para opção,

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{2.26}$$

e,

$$d_1 = \frac{ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{2.27}$$

$$d_2 = \frac{ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{2.28}$$

onde N(d1) e N(d2) correspondem à probabilidade acumulada de uma variável, com média zero e variância igual a 1, C é o preço da opção de compra, r é a taxa livre de risco e σ é a volatilidade do ativo. Para obtermos o preço de uma opção de venda europeia utilizamos a paridade existente entre as opções.

Apesar de o modelo de Black e Scholes [3] ser uma referência no mercado ele não é perfeito. O modelo foi desenvolvido se baseando num conjunto de hipóteses que em muitas vezes não se confirmam. Por exemplo, o mercado perfeito, a inexistência de custos de transação e, principalmente, a volatilidade dos retornos constante. A observação empírica no mercado tem mostrado que os retornos dos ativos apresentam características especiais, como caudas pesadas, a volatilidade variando ao longo do tempo e a presença de *clusters* em determinados períodos. Outro aspecto bastante discutido é a suposição de que a distribuição de probabilidade dos preços do ativo subjacente seja lognormal. Apesar de a distribuição empírica se aproximar desta forma, ela nem sempre se iguala. Assim, existe a necessidade do desenvolvimento de modelos que sejam mais flexíveis e adaptáveis ao contexto verdadeiro.

2.3
Modelo de Apreçamento de Opções GARCH

Duan [13] desenvolve um modelo alternativo ao de Black e Scholes [3] para o apreçamento de opções financeiras. Nesse modelo, a volatilidade dos retornos do ativo subjacente segue um processo GARCH[8]. Os modelos *Autoregressive Conditional Heteroscedastic* (ARCH) de Engle [16] e a generalização do ARCH (GARCH) proposto por Bollerslev [5] são aqueles que não consideram que a variância condicional das séries financeiras e econômicas seja constante. Assim, o modelo de Duan [13] incorpora a heterocedasticidade presente no retorno do ativo subjacente ao processo de apreçamento da opção. Nessas condições, ele introduz uma generalização do princípio da avaliação neutra ao risco que se chama *Locally Risk Neutral Valuation Relationship* (LRNVR).

Existem três características distintas no modelo de apreçamento de opções GARCH: o preço da opção depende do prêmio de risco λ que está embutido nos preços do ativo subjacente; o modelo é não-Markoviano, pois as informações passadas são importantes para o processo; o modelo pode explicar alguns vieses associados ao modelo de Black e Scholes [3]. Por exemplo, as subprecificações das opções *out-of-the-money,* com baixa volatilidade, de maturidade curta e a curva da volatilidade implícita em relação ao preço de exercício[9]. O modelo de apreçamento de opções GARCH considera o modelo de Black e Scholes [3] como um caso particular. Esta seção está baseada nos tópicos principais do artigo de Duan [13].

2.3.1
O modelo GARCH Gaussiano sob medida P

Considere uma economia em tempo discreto, onde S_T é o preço do ativo no instante T,

$$S_T = S_t e^{r+\lambda\sqrt{h_T}-\frac{1}{2}h_T+\varepsilon_T} \tag{2.29}$$

A taxa de retorno de um período tem distribuição condicional lognormal sob medida de probabilidade P. Assumimos que $\mathrm{y_T} = \ln(\mathrm{S_T}/\mathrm{S_t})$ segue um modelo GARCH (p, q),

---

[8] Podemos utilizar outras especificações para a variância, como, por exemplo, EGARCH (Nelson[32]), TGARCH (Rabemananjara e Zakoian [33]), NGARCH (Engle e Ng [18]) e FC-GARCH (Medeiros e Veiga [30]).

[9] Para maiores detalhes veja Black [4] e Rubinstein [35].

$$y_T = \mathrm{r} + \lambda\sqrt{h_T} - \frac{1}{2}h_T + \varepsilon_T \tag{2.30}$$

onde,

$$\varepsilon_T|\phi_t \sim N(0, h_T)$$

e

$$h_T = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i h_{t-i} \tag{2.31}$$

r é a taxa de retorno livre de risco constante para um período, λ é o prêmio de risco unitário e h_T é variância condicional. A dinâmica da variável aleatória ε_T está sob medida de probabilidade P e ϕ_t representa o conjunto de todas as informações até o instante t. Estabelecemos restrições sobre os parâmetros para manter a estabilidade e a estacionariedade do modelo: $p \geq 0, q \geq 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \dots, p, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, q$ e o $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i < 1$.

Existe uma semelhança entre os retornos no modelo de Duan [13] e no modelo GARCH-*in-Mean* (GARCH-M). Em Duan [13], o termo $-1/2\,\mathrm{h_T}$ foi adicionado para que o valor esperado da taxa de retorno condicional $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{y_T}}|\phi_t)$ seja igual $\mathrm{e}^{\mathrm{r_T}+\lambda\sqrt{\mathrm{h_T}}}$. Isto é, a taxa livre de risco mais um prêmio pelo risco. Um modelo GARCH-M, de acordo com Engle, Robins e Lilien [17], introduz a variância condicional (ou desvio padrão condicional) dentro da equação da média condicional. Eles são usados frequentemente em aplicações financeiras, onde o retorno esperado de um ativo está relacionada ao risco esperado.

O valor do prêmio do risco λ tem uma relação com a volatilidade condicional h_t, porque quanto maior for a volatilidade, maior é o prêmio de risco. Intuitivamente, admitimos que os agentes exigem retornos maiores se o ativo subjacente apresentar volatilidade elevada. Também podemos observar que se p=q=0, obteremos uma versão discreta para o modelo de Black e Scholes [3], pois a volatilidade permanecerá constante.

2.3.2
Definição de LRNVR

Devido à presença de heterocedasticidade na dinâmica dos retornos do ativo, o princípio da avaliação neutra ao risco precisou ser adaptado para um novo contexto, gerando a *Locally Risk Neutral Valuation Relationship* (LRNVR). O modelo sob medida Q satisfaz a LRNVR se as seguintes condições são satisfeitas:

1. Q é absolutamente contínua em relação a P (equivalente);
2. $ln\left(\frac{S_T}{S_t}|\phi_t\right)$ tem distribuição normal;
3. $E^Q\left(\frac{S_T}{S_t}|\phi_t\right) = e^r$;
4. $Var^Q\left(ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)|\phi_t\right) = Var^P\left(ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)|\phi_t\right)$ quase certamente.

Observamos que sob medida de probabilidade Q a média condicional é igual à taxa livre de risco. Isto é, não depende das preferências dos agentes. A variância condicional sob ambas as medidas de probabilidade são iguais, o que permite observar e estimar a variância condicional na medida de probabilidade original. A LRNVR não garante a neutralidade do risco a nível global, pois a variância é conhecida apenas para um período. Se a variância for constante, a LRNVR reduz a convencional avaliação neutra ao risco.

O modelo de apreçamento de opções GARCH enquadra-se numa situação de mercado incompleto. Ou seja, um modelo de tempo discreto com retornos em tempo contínuo, garante a existência de uma medida martingale, mas não a sua unicidade. Para determinar uma medida neutra ao risco é necessário que sejam feitas suposições sobre o prêmio de risco e/ou as preferências do investidor. Assim, Duan [13] estende o conceito de neutralidade ao risco de Rubinstein [34] e Brennan [7] para obter a LRNVR[10]. Estes últimos autores mostraram que em certas combinações de preferência a relação de avaliação neutra ao risco permanece intacta. Logo, a validade da LRNVR é obtida a partir de condições semelhantes às propostas por esses últimos autores.

[10] Para maiores detalhes veja Duan [13].

2.3.3
O Modelo GARCH Gaussiano sob medida Q

Se a medida de probabilidade Q satisfaz a LRNVR, então reescrevemos o modelo anterior sob esta medida. Logo,

$$y_T = r - \frac{1}{2} h_T + \xi_T \tag{2.32}$$

onde

$$\xi_T | \phi_t \sim N(0, h_T)$$

e

$$h_T = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(\xi_{t-i} - \lambda \sqrt{h_{t-i}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \, h_{t-i} \tag{2.33}$$

Destacamos duas principais diferenças em relação ao modelo anterior. Primeiro, o prêmio de risco λ não está presente na expressão que modela a taxa de retorno. Em segundo, a variável aleatória ε_T foi substituída por $\xi_T - \lambda\sqrt{h_{t-i}}$ em ambas as equações. A LRNVR não elimina o prêmio de risco do modelo. Embora tenha sido neutralizado localmente, ele continua influenciando a variância condicional. Observe também que a equação que modela a variância condicional não é a tradicional GARCH simétrica e linear.

2.3.4
Avaliação da Opção de Compra no Modelo GARCH

O preço do ativo sob medida Q será,

$$S_T = S_t e^{r - \frac{1}{2} h_T + \xi_T} \tag{2.34}$$

Ao contrário do modelo de Black e Scholes [3] que possui uma forma analítica para avaliar os preços das opções de compra européia, o modelo de Duan

[13] utiliza a simulação de Monte Carlo no seu processo de apreçamento. Os retornos nesse método não podem ser obtidos analiticamente por desconhecermos a distribuição de probabilidade na maturidade. Assim, o valor de uma opção de compra C_t no instante t, com preço de exercício K, sob medida de probabilidade Q será,

$$C_t = e^{-r(T-t)}E^Q[max(S_T - K, 0)|\phi_t] \tag{2.35}$$

onde r é a taxa livre de risco e T o prazo de vencimento da opção. O valor da opção de venda europeia pode ser calculado pelo modelo utilizando a relação de paridade entre as opções. Os parâmetros GARCH podem ser estimados tanto a partir dos preços do ativo subjacente quanto dos preços das opções negociadas no mercado.

Apesar de esse modelo incorporar a heterocedasticidade dos retornos e tentar explicar alguns vieses conhecidos na literatura, ele também apresenta alguns problemas. O fato do choque aleatório (ε_T) seguir uma distribuição normal implica que o modelo pode não capturar corretamente a assimetria e a leptocurtose presente nos dados financeiros.

2.4
A Transformada de Esscher

A Transformada de Esscher [19] foi desenvolvida para aproximar uma distribuição em torno de um ponto de interesse, tal que, a nova média seja igual a este ponto. Na ciência atuarial, ela é uma ferramenta bastante conhecida dentro da literatura sobre teoria do risco. No contexto de Gerber e Shiu [20], a Transformada de Esscher (TE) torna-se uma técnica eficiente para apreçar opções financeiras e outros derivativos. Isto é, dada a hipótese de neutralidade ao risco, calculamos o *state-price* (ou as probabilidades neutra ao risco) associado a um modelo, se o logaritmo dos preços do ativo subjacente seguir processos estocásticos com incrementos estacionários e independentes (processos como Wiener, Poisson, Gamma e a inversa Gaussiana).

Assim, através de suposições sobre a dinâmica do processo estocástico seguido pelo preço do ativo, podemos obter as fórmulas de apreçamento de Black e Scholes, a Binomial e as fórmulas para apreçar ativos de múltiplo risco. Os pontos principais desta seção estão baseados nos artigos de Gerber e Shiu [20,21].

2.4.1
A Transformada de Esscher Neutra ao Risco

Seja X_T uma variável aleatória com a função de distribuição acumulada e a geradora de momentos dadas, respectivamente, por,

$$F(x,T) = P[X_T \leq x] \tag{2.36}$$

$$M_{X_T}(z,T) = E[e^{zX_T}] \tag{2.37}$$

Se $X_T = \sum_{i=1}^{n} v_i$, onde $v_i \sim f(.)$ e são independentes e identicamente distribuidos, então,

$$M_{X_T}(z,T) = [M_X(z,1)]^T \tag{2.38}$$

Isto é, se a função geradora de momentos existe para um número inteiro positivo T, então existirá para todo T maior do que zero. A função densidade desta variável aleatória,

$$f(x,T) = \frac{d}{dx}F(x,T),\ T > 0 \tag{2.39}$$

então,

$$M_{X_T}(z,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx} f(x,T)dx \tag{2.40}$$

Seja h um número real, tal que, a função $M(h,T)$ exista. A introdução da TE com o parâmetro h, no processo estocástico X_T, gera uma nova função densidade probabilidade para a variável aleatória, $T > 0$

$$f(x,T;h) = \frac{e^{hx}f(x,T)}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{hx}f(x,T)dx} = \frac{e^{hx}f(x,T)}{M_{X_T}(h,T)} \quad (2.41)$$

A nova função geradora de momentos será,

$$M_{X_T}(z,T;h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx}f(x,T;h)dx = \frac{M_{X_T}(z+h,T)}{M_{X_T}(h,T)} \quad (2.42)$$

conforme vimos em (2.38), temos

$$M_{X_T}(z,T;h) = [M_X(z,1;h)]^T \quad (2.43)$$

A medida de probabilidade do processo estocástico X_T foi modificada através da inclusão do parâmetro h . Sendo uma função exponencial positiva, a medida modificada tem o mesmo conjunto de eventos que a medida original, tornando ambas as distribuições em medidas de probabilidade equivalentes. Para que a TE seja neutra ao risco, precisamos de um $h = h^*$, tal que, o preço do ativo S_T descontado pela taxa livre de risco r seja um martingale. Isto é,

$$S_t = E^Q[e^{-rT}S_T] \quad (2.44)$$

Sendo

$$S_T = S_t e^{X_T} \quad (2.45)$$

e X_T é a taxa de retorno, capitalizado continuamente, no instante T. Se substituirmos a expressão (2.45) em (2.44) e utilizarmos a densidade dada pela fórmula (2.41), o parâmetro h^* será a solução da equação abaixo,

$$e^{rT} = M_{X_T}(1,T;h^*) \quad (2.46)$$

Assim, teremos um valor para h^* de acordo com a distribuição de probabilidade da variável X_T. Na equação (2.43), a solução não depende de T, então,

$$[e^r = M_X(1,1;h^*)] = \frac{M_X(1+h^*,1)}{M_X(h^*,1)} \tag{2.47}$$

ou

$$r = ln[M_X(1,1;h^*)] \tag{2.48}$$

A expressão (2.48) determina de maneira única o parâmetro h^*. Assim, a TE com o h^* pode ser chamada de Transformada de Esscher Neutra ao Risco (TENR). Geralmente uma medida martingale equivalente não é única. O mérito da TENR é fornecer uma solução geral e transparente que vale tanto para mercados completos quanto incompletos.

2.4.2
Avaliação da Opção de Compra via Transformada de Esscher

Segundo Gerber e Shiu [20], para o desenvolvimento da metodologia, admitimos algumas das mesmas premissas adotadas por Black e Scholes [3]: a taxa de juros livre de risco é constante; o mercado é sem atrito e as negociações são contínuas; não existem taxas, custos de transação e restrições a empréstimos, *short sales*; todos os ativos são perfeitamente divisíveis; não existe oportunidade de arbitragem e o ativo não distribui dividendos[11]. A medida de probabilidade, que resultaria do processo estocástico seguido pelo ativo subjacente no mundo neutro ao risco, será dada pela TENR. Então, para a opção de compra, temos

$$C = e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} max(S_T - K, 0) f(x,T;h)dx \tag{2.49}$$

Suponha que a taxa de retorno X_T, siga um processo estocástico de Wiener[12]. Isto é, uma função com distribuição de probabilidade normal com média μ e variância σ^2 por unidade de tempo,

$$F(x,T) = N(x;\ \mu T, \sigma^2 T) \tag{2.50}$$

[11] Para o caso em que há distribuição de dividendos veja Gerber e Shiu [21].
[12] Para outros processos estocásticos veja Gerber e Shiu [20].

logo,

$$M(z,T) = e^{\left[\left(\mu z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right)T\right]} \tag{2.51}$$

então,

$$M(z,T;h) = e^{\left\{\left[(\mu + h\sigma^2)z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right]T\right\}} \tag{2.52}$$

Se compararmos as médias da expressão (2.51) com a (2.52), a TE com o parâmetro h, é o mesmo processo estocástico com a média modificada por unidade de tempo,

$$\mu + h\sigma^2$$

sem alteração na variância σ^2. Logo,

$$F(x,T) = N(x;\ (\mu + h\sigma^2)T, \sigma^2 T) \tag{2.53}$$

Sendo o h^* o número que torna a distribuição de probabilidade neutra ao risco. Ao estabelecermos uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória X_T, podemos obter o h^* a partir da equação (2.47),

$$h^* = \frac{r - \mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \tag{2.54}$$

Seja a distribuição transformada dada pela equação (2.41) e os preços obtidos por (2.45), substituímos em (2.49), obtemos

$$C = e^{-rT} \int_{x^*}^{+\infty} (S_0 e^x - K) \frac{e^{hx}}{M(h,T)} f(x,T) dx \tag{2.55}$$

Observe que incorporamos no limite inferior da integral o operador max, assim temos $x^* = ln(K/S_0)$. Isto é precisamos apenas das taxas de retornos que produzam valores iguais ou superiores ao preço de exercício. Por analogia a (2.51), temos,

$$M(h,T) = e^{\left[\left(\mu h+\frac{1}{2}\sigma^2 h^2\right)T\right]} \tag{2.56}$$

Reescrevemos a opção de compra e substituindo a equação (2.56) em (2.55), então,

$$C = \frac{e^{-rT}}{e^{hT\left(\mu+\frac{1}{2}h\sigma^2\right)}}\left[S_0\int_{x^*}^{+\infty} e^{(1+h)x} f(x,T)dx - K\int_{x^*}^{+\infty} e^{hx} f(x,T)dx\right] \tag{2.57}$$

Resolvemos o valor esperado de uma variável aleatória normal truncada conforme foi apresentado em Rubinstein [34]. Então,

$$\begin{aligned} C = e^{-r}S_0N\left(\frac{\mu - ln(K/S_0)}{\sigma} + (1+h)\sigma\right)e^{\mu+h\sigma^2+\frac{1}{2}\sigma^2} \\ - e^{-r}K\left(\frac{\mu - ln(K/S_0)}{\sigma} + (1+h)\sigma\right) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Substituindo o h^* de (2.54) em (2.58), temos,

$$\begin{aligned} C = S_0N\left(\frac{-\ln(K/S_0) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\right) \\ - e^{-r}KN\left(\frac{-ln(K/S_0) + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{2.59}$$

A partir da TENR conseguimos obter o mesmo resultado da tradicional fórmula de apreçamento da opção de compra europeia de Black e Scholes [3]. Observe que a taxa de retorno esperada μ, representante das preferências dos investidores, não aparece na fórmula final.

2.4.3
A Função Utilidade e a Transformada de Esscher

A criação de um portfólio que replique o risco e os retornos de um ativo em todos os estados da natureza é a maneira tradicionalmente utilizada para apreçar opções em mercados completos. A principal condição que impede a construção desse portfólio replicante é se o mercado for incompleto. De maneira geral, quando não encontramos um *hedge* para um ativo específico, dizemos que o mercado é incompleto e que existem infinitas medidas martingales equivalentes. Então, qual dentre essas medidas devemos escolher para o processo de apreçamento neutro ao risco? Segundo Dixit e Pindyck [12], para determinar o valor de um ativo (ou projeto) é necessário estabelecer premissas e restrições na função utilidade do tomador de decisão. Portanto, essa escolha particular deve ser justificada dentro de uma estrutura de função utilidade.

Considere uma economia simples com apenas um ativo com risco, um ativo livre de risco e seus derivativos. Há um investidor representativo, proprietário de m ativos e a base de sua decisão é a função utilidade avessa ao risco. Uma parte da sua riqueza pode ser representada por uma quantidade de ações hoje (mS_0). Para aumentar sua riqueza em T, ele decide comprar uma quantidade de derivativos hoje (nV_t) que promete um retorno aleatório $n\pi_T(S_T)$. Onde $\pi_T(S_T)$ está em função do processo estocástico seguido pelo preço da ação. Qual é o preço para o investidor, tal que, seja ótimo para ele não comprar ou vender qualquer fração ou múltiplo do derivativo? Ou seja, o preço que mantém a mesma utilidade inicial tornando esse investidor indiferente entre ter ou não o derivativo. Matematicamente temos,

$$\phi(n) = E[u(mS_T + n[\pi_T(S_T) - e^{rT}V_t])] \tag{2.60}$$

ela é máxima quando n=0,

$$\phi'(0) = 0$$

obtemos,

$$V_0 = e^{-rT} \frac{E[\pi(S_T)u'(mS_T)]}{E[u'(mS_T)]} \tag{2.61}$$

Particularmente, se a função utilidade for a *power*, com parâmetro $c > 0$,

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-c}}{1-c} & se\ c \neq 1 \\ lnx & se\ c = 1 \end{cases}$$

reescrevendo, temos,

$$\phi(n) = E\left[\frac{(mS_T + n\pi_T(S_T) - ne^{rT}V_t)^{1-c}}{(1-c)}\right] \tag{2.62}$$

pela condição de primeira ordem,

$$\frac{\partial E[U(x)]}{\partial n} = \frac{E[\partial U(x)]}{\partial n} = 0$$

no ótimo temos,

$$V_t = \frac{e^{-rT}E[(mS_T)^{-c}\pi_T(S_T)]}{E[(mS_T)^{-c}]} = \frac{e^{-rT}E[(S_T)^{-c}\pi_T(S_T)]}{E[(S_T)^{-c}]} \tag{2.63}$$

Se $\pi_T(S_T) = S_T$, isto é, sendo o pagamento uma variável aleatória ela pode ser qualquer valor. Então, nesse caso, implica que $V_t = S_t$. Logo,

$$S_t = \frac{e^{-rT}E\left[{S_T}^{(1-c)}\right]}{E[{S_T}^{-c}]} \tag{2.64}$$

Substituindo em (2.64) a fórmula (2.45), obtemos,

$$e^r = \frac{E\left[e^{(1-c^*)x}\right]}{E[e^{-c^*x}]} \tag{2.65}$$

Se compararmos essa última equação com a fórmula (2.47) percebemos que o parâmetro c é igual a -h^* da Transformada de Esscher. Então, o preço do derivativo V_0, será avaliado sob a medida de probabilidade dada pela Transformada de Esscher. Segundo Gerber e Shiu [21], ao considerar diferentes pontos no instante t, a consistência do modelo é satisfeita se o investidor utilizar a função utilidade *power* no processo decisório. Esta restrição faz com que o preço da opção na medida de probabilidade Esscher seja uma consequência desta premissa.