



**Manoel Francisco de Souza Pereira**

**Apreçamento de Opções via Transformada de Esscher  
Não Paramétrica**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Álvaro Veiga de Lima Filho

Rio de Janeiro  
Agosto de 2011



**Manoel Francisco de Souza Pereira**

**Apreçamento de Opções via Transformada de  
Esscher não Paramétrica**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho**  
**Orientador**

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. Caio Ibsen Rodrigues de Almeida**  
Fundação Getulio Vargas

**Prof. José Valentim Machado Vicente**  
IBMEC

**Prof. José Eugenio Leal**  
Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico

Rio de Janeiro, 09 de agosto de 2011

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Manoel Francisco de Souza Pereira**

Graduou-se em Ciências Econômicas na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Especialista em Métodos Estatísticos Computacionais pela Universidade Federal de Juiz de Fora.

#### Ficha Catalográfica

Pereira, Manoel Francisco de Souza

Apreçamento de opções via transformada de Esscher não paramétrica / Manoel Francisco de Souza Pereira; orientador: Álvaro Veiga de Lima Filho. – 2011.

81 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2011.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Apreçamento de opções. 3. Modelo de apreçamento GARCH. 4. Transformada de Esscher. 5. Modelo de Black-Scholes. 6. Simulação de Monte Carlo. 7. Bootstrap. 8. Modelo neutro de risco. I. Lima Filho, Álvaroa Veiga de. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 621.3

## Agradecimentos

A Deus.

A CAPES pelo suporte financeiro e a PUC pela oportunidade da excelente formação.

Ao meu orientador Professor Álvaro Veiga pela paciência, disponibilidade e incentivo para a realização deste trabalho.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC.

A senhora Ana Maria por me adotar e oferecer toda infra-estrutura necessária durante os períodos de estudos.

A minha mãe Laura e aos meus irmãos pelos incentivos.

A Flávia pelo apoio, companheirismo e amor.

## Resumo

Pereira, Manoel Francisco de Souza Pereira; Veiga Filho, Álvaro de Lima (Orientador). **Apreçamento de Opções via Transformada de Esscher não Paramétrica**. Rio de Janeiro, 2011. 81p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O apreçamento de opções é um dos temas mais importantes da economia financeira. Este estudo introduz uma versão não paramétrica da Transformada de Esscher para o apreçamento neutro ao risco de opções financeiras. Os tradicionais métodos paramétricos exigem a formulação de um modelo neutro ao risco explícito e são operacionalmente apenas para poucas funções densidade de probabilidade. Em nossa proposta, com simples suposições, evitamos a necessidade da formulação de um modelo neutro ao risco para os retornos. Primeiro, simulamos uma amostra de trajetórias de retornos sob a distribuição original  $P$ . Então, baseado na Transformada de Esscher, a amostra é reponderada, dando origem a uma amostra com risco neutralizado. Em seguida, os preços dos derivativos são obtidos através de uma simples média dos *payoffs* de cada trajetória da opção. Comparamos nossa proposta com alguns métodos de apreçamento tradicionais, aplicando quatro exercícios em situações diferentes, para destacar as diferenças e as semelhanças entre os métodos. Sob as mesmas condições e em situações similares, o método proposto reproduz os resultados dos métodos de apreçamento estabelecidos na literatura, o modelo de Black e Scholes (1973) e o método de Duan (1995). Quando as condições são diferentes, o método proposto indica que há mais risco do que outros métodos podem capturar.

## Palavras-chave

Apreçamento de opções; modelo de apreçamento GARCH; Transformada de Esscher; modelo de Black-Scholes; simulação de Monte Carlo; *Bootstrap*; modelo neutro de risco.

## Abstract

Pereira, Manoel Francisco de Souza; Veiga Filho, Álvaro de Lima (Advisor). **Option Pricing via Nonparametric Esscher Transform**. Rio de Janeiro, 2011. 81p. MSc Dissertation - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Option valuation is one of the most important topics in financial economics. This study introduces a nonparametric version of the Esscher transform for risk neutral option pricing. Traditional parametric methods require the formulation of an explicit risk-neutral model and are operational only for a few probability density functions. In our proposal, we make only mild assumptions on the price kernel and there is no need for the formulation of the risk-neutral model for the returns. First, we simulate sample paths for the returns under the historical distribution  $P$ . Then, based on the Esscher transform, the sample is reweighted, giving rise to a risk-neutralized sample from which derivative prices can be obtained by a simple average of the pay-offs of the option to each path. We compare our proposal with some traditional pricing methods, applying four exercises under different situations, which seek to highlight the differences and similarities between the methods. Under the same conditions and in similar situations, the option pricing method proposed reproduces the results of pricing methods fully established in the literature, the Black and Scholes [3] model and the Duan [13] method. When the conditions are different, the results show that the method proposed indicates that there is more risk than the other methods can capture.

## Keywords

Option pricing; GARCH option pricing models; Esscher transform; Black-Scholes model; Monte Carlo simulation; Bootstrap; risk neutral model.

# Sumário

1. Introdução	11
2. Apreçamento Neutro ao Risco	14
2.1. Conceitos Básicos	15
2.1.1. <i>State-Price</i>	15
2.1.1.1. <i>State-Price</i> Baseado na Otimalidade	15
2.1.1.2. <i>State-Price</i> Baseado na Ausência de Arbitragem	19
2.1.2. Avaliação Neutra ao Risco	20
2.1.3. Relação entre <i>State-Price</i> e Probabilidade Neutra ao Risco	22
2.2. Modelo de Black e Scholes	25
2.2.1. A Fórmula de Black e Scholes	25
2.2.2. Avaliação da Opção de Compra no modelo de Black e Scholes	28
2.3. Modelo de Apreçamento de Opções GARCH	29
2.3.1. O Modelo GARCH Gaussiano sob medida P	30
2.3.2. Definição de LRNVR	32
2.3.3. O Modelo GARCH Gaussiano sob medida Q	33
2.3.4. Avaliação da Opção de Compra no Modelo GARCH	34
2.4. A Transformada de Esscher	35
2.4.1. A Transformada de Esscher Neutra ao Risco	35
2.4.2. Avaliação da Opção de Compra via Transformada de Esscher	38
2.4.3. A Função Utilidade e a Transformada de Esscher	40
3. Modelo Proposto	43
4. Comparação dos Modelos	47
4.1. Metodologia	48
4.2. Resultados	50
5. Conclusões	68
6. Referências bibliográficas	70
7. Apêndice A	74
7.1. Estatísticas descritivas	74
7.2. Algoritmo para estimação GARCH-M (1,1) com Prêmio de Risco	79
7.3. Algoritmo no Matlab para gerar os gráficos sob medidas P e Q	81

## Lista de figuras

Figura 4.1. Preços das opções de compra como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 30.	56
Figura 4.2. Preços das opções de compra como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 90.	576
Figura 4.3. Preços das opções de compra como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 180.	57
Figura 4.4. Preços das opções de venda como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 30.	60
Figura 4.5. Preços das opções de venda como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 90.	60
Figura 4.6. Preços das opções de venda como razão dos preços de Black e Scholes para a maturidade 180.	61
Figura 4.7. Histograma dos retornos acumulados sob medida de probabilidade P e medida neutralizada Q para opções GARCH.	62
Figura 4.8. Histograma dos retornos acumulados sob medida de probabilidade P e medida neutralizada Q para opções ENP_G.	62
Figura 4.9. Histograma dos retornos acumulados sob medidas neutralizadas Q para opções GARCH e ENP_G.	63
Figura 4.10. Histograma dos retornos acumulados sob medida de probabilidade P e medida neutralizada Q para opções ENP_B.	63
Figura 4.11. Volatilidade Implícita observada nos preços da opção ENP_G com diferentes maturidades.	66
Figura 4.12. Volatilidade Implícita observada nos preços da opção ENP_B com diferentes maturidades.	66
Figura A.1. Retornos da série S&P500 ao longo do tempo.	74
Figura A.2. Histograma dos retornos da série S&P500.	75
Figura A.3. Correlograma dos retornos da S&P500.	75
Figura A.4. Correlograma dos retornos S&P500 ao quadrado.	76

Figura A.5. Resíduos do GARCH-M na série S&P500 ao longo do tempo.	77
Figura A.6. Histograma dos resíduos do GARCH-M da série S&P500.	77
Figura A.7. Correlograma dos resíduos do GARCH-M da série S&P500.	78
Figura A.8. Correlograma dos resíduos do GARCH-M da série S&P500 ao quadrado.	78

## Lista de Tabelas

Tabela 4.1: Comparação entre os preços da opção de compra e venda nos modelos de Black e Scholes e do Esscher Não Paramétrico.	51
Tabela 4.2: Comparação entre os preços das opções de venda nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.	52
Tabela 4.3: Comparação entre os vieses nos preços das opções de venda nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.	53
Tabela 4.4: Comparação entre os preços das opções de compra nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.	54
Tabela 4.5: Comparação entre os vieses dos preços da opção de compra nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.	55
Tabela 4.6: Comparação entre os preços das opções de venda nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.	58
Tabela 4.7: Comparação entre os vieses dos preços das opções de venda nos modelos de Black e Scholes, Duan e do Esscher Não Paramétrico.	59
Tabela 4.8: Comparação entre as principais estatísticas descritivas dos retornos acumulados neutros ao risco dos preços das opções calculados pelos modelos de Duan e Esscher Não Paramétrico.	65
Tabela 4.9: Comparação entre os preços das opções de compra e de venda utilizando a técnica <i>Block Bootstrap</i> para o modelo Esscher Não Paramétrico.	67