

2 Equações do Sistema

Este capítulo irá apresentar as equações usadas no estudo, mostrando passo a passo como foi feita a modelagem desse sistema.

Uma maneira fácil de entender seu funcionamento é pensá-lo como um manipulador de 2 graus de liberdade (figura 2.1), onde a haste é o primeiro, e o disco giratório o segundo (e.g. Spong et al).

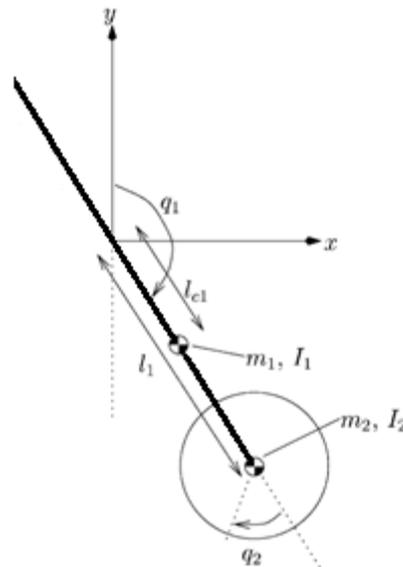


Figura 2.1 – Convenções para o modelo matemático do sistema

Por conveniência, escolheu-se os eixos da seguinte forma:

- O plano xy está paralelo ao solo.
- O eixo z na figura está perpendicular a x e y , paralelo e em sentido contrário ao da aceleração gravitacional.

O movimento de rotação da haste em torno do eixo z ocorre por ação de força ou momento sobre a haste. No presente caso o torque τ que o atuador montado sobre a haste exerce sobre o disco, age por reação em sentido oposto sobre a haste, colocando-a em rotação em torno do seu outro extremo, em torno de qualquer eixo perpendicular ao plano.

Assumindo que disco é homogêneo, esbelto e axissimétrico, seu centro de massa coincide com o eixo de rotação, podemos deduzir pelas Leis de Newton/Euler as equações de movimento. Observe-se que o movimento absoluto do disco é obtido somando-se sua rotação medida em relação à haste q_2 com a rotação da haste q_1 . O torque aplicado pelo motor τ acelerará a inércia do disco I_2 como $\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$. Como a trajetória deste disco está vinculada a uma geometria circular, sobre seu centro passam a aparecer esforços oriundos de sua aceleração, decompostas em tangencial e centrípeta (Lei de Newton). As reações a estas componentes da aceleração atuam sobre a extremidade da haste. A reação à força tangencial provoca um momento negativo em relação à outra extremidade da haste (rotulada como ponto fixo) no valor $-m_2 l_1^2 \ddot{q}_1$, ao qual se adiciona a reação ao torque do motor $-\tau$ que acelerará o conjunto dos dois corpos para uma rotação em torno do ponto fixo na outra extremidade da haste resultando \ddot{q}_1 . Os momentos de inércia dos dois corpos devem ser transportados para este ponto fixo. Resulta pela Lei de Euler para os dois corpos:

$$-m_2 l_1^2 \ddot{q}_1 - \tau = (I_1 + m_1 l_{c1}^2) \ddot{q}_1 \quad (2.1)$$

$$\tau = I_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \quad (2.2)$$

Onde:

q_1 é o ângulo de pendulo,

q_2 é o ângulo do disco, em relação ao pêndulo,

τ é o torque que o motor aplica sobre o disco,

m_1 a massa da haste,

m_2 a massa do disco,

l_1 o comprimento da haste, do eixo de rotação até o motor com o disco,

l_{c1} o centro de gravidade de l_1 que, devido ao peso do motor será deslocado do centro da haste,

I_1 o momento de inércia da haste, calculada em relação ao seu centro:

$$I_1 = \frac{m_1 l_1^2}{12} \quad (2.3)$$

I_2 o momento de inércia do disco, calculado em relação ao seu centro:

$$I_2 = \frac{m_2 r^2}{2} \quad (2.4)$$

Usando a figura 2.2 para ajudar a visualizar a decomposição, e também com:

$$F_n = m_2 a_n \quad (2.5)$$

$$a_n = l_1 \dot{q}_1^2 \quad (2.6)$$

$$F_t = m_2 a_t \quad (2.7)$$

$$a_t = l_1 \ddot{q}_1 \quad (2.8)$$

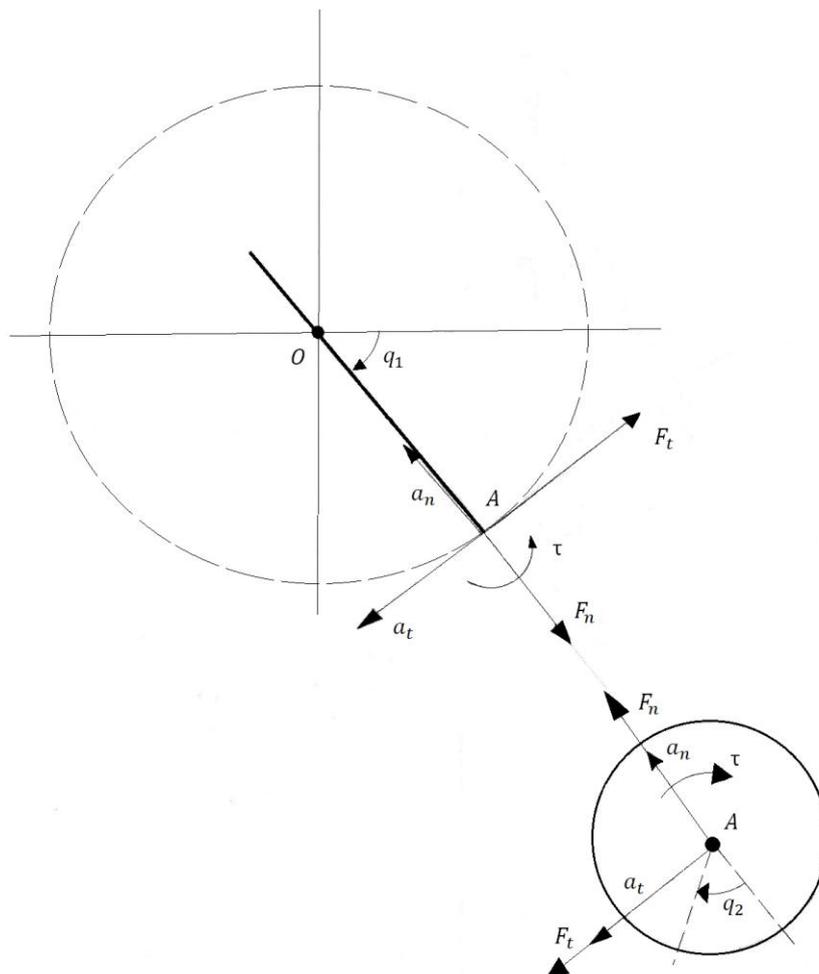


Figura 2.2 - Decomposição de forças e acelerações do sistema

E juntando as equações (2.1), (2.2) tem-se finalmente:

$$(I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) \ddot{q}_1 = -\tau \quad (2.9)$$

Inclui-se ainda a equação de um motor DC, que vai realizar o torque necessário para a haste se movimentar:

$$\tau = Ki \quad (2.10)$$

Onde:

τ é o torque do motor,

i é a corrente elétrica,

K é uma constante que depende de cada motor DC. Vale lembrar que em motores com redução essa constante é menor.

Juntando as equações 2.9 e 2.10, encontramos:

$$i = -\frac{(I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2)}{K} \ddot{q}_1 \quad (2.11)$$

O termo constante e negativo é explicado pelo controle ser realizado utilizando a reação ao torque no motor como peça fundamental para o movimento da haste. Com essa equação pode-se fazer o controle do sistema pela corrente, entretanto, como no mundo real é bem mais difícil controlar a corrente do que a tensão, só será testado no modelo real o controle por tensão. Para tal, é preciso ter uma equação com a qual se obtenha a tensão em função da corrente.

Considera-se que o motor é DC (ou CC, ou de corrente contínua), de imã permanente e controlado pela tensão, de acordo com o esquema da figura 2.3:

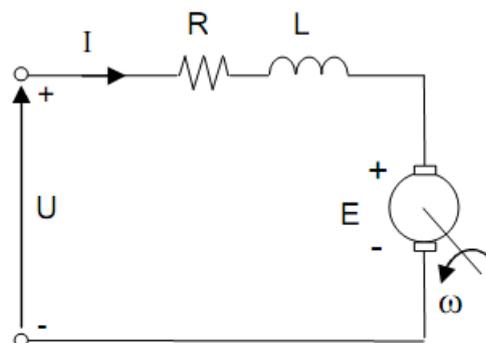


Figura 2.3 – Esquema de um motor DC

Onde:

U é a tensão aplicada no motor,

i é a corrente no motor,

R é a resistência da armadura,

L é a indutância da armadura,

E é a força contra eletromotriz que resiste ao movimento de rotação do motor,

ω é a velocidade angular do disco no motor.

Pela Lei de Kichhoff, pode ser tirada a equação:

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + E \quad (2.12)$$

A força contra eletromotriz, é dada por:

$$E = K\omega \quad (2.13)$$

Considerando que no sistema a velocidade do rotor ω será \dot{q}_2 , a derivada no tempo de q_2 tem-se uma equação diferencial de primeira ordem para a tensão em função da corrente:

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + K\dot{q}_2 \quad (2.14)$$

Finalmente substituindo os valores da corrente da equação 2.11 na equação 2.14, tem-se a equação geral do sistema, controlado por tensão:

$$U = - \frac{L (I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2)}{K} \left(\ddot{q}_1 + \frac{R}{L} \dot{q}_1 \right) - \frac{K (I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2)}{I_2} \dot{q}_1 \quad (2.15)$$

Por esta equação é possível controlar a aceleração do rotor em função da tensão aplicada no motor. É interessante ver que a tensão não vai só depender da

aceleração, mas também da velocidade da haste, e do tranco (“*jerk*” derivada da aceleração).

Para modelar o atrito viscoso, optou-se por um modelo que depende linearmente da velocidade:

$$\tau_{av_1} = -c_1 \dot{q}_1 \quad (2.16)$$

$$\tau_{av_2} = -c_2 \dot{q}_2 \quad (2.17)$$

Onde:

τ_{av_1} é a perda de torque referente ao mancal da base com a haste,

τ_{av_2} é a perda de torque referente ao motor,

c_1 é a constante de atrito viscoso referente ao mancal da base com a haste,

c_2 é a constante de atrito viscoso referente ao motor.

Entretanto, observando seus valores bem pequenos (da ordem de 10^{-7}) resolveu-se não utilizá-los no modelo matemático, para simplificar ao máximo o mesmo, mas seu valor está contabilizado no capítulo 4 para modelagens futuras.

Finalmente no atrito seco o problema pode se tornar bem mais complexo. Muitos autores o desprezam, e outros fazem uso do modelo de atrito de Coulomb. No presente estudo ele será desprezado, pois o trabalho visa um controle que possa se adequar às imperfeições do sistema, passando por cima de pequenas considerações da modelagem.