5 Simulação de Monte Carlo

Simulação é qualquer método analítico que tem a intenção de imitar um sistema real, principalmente quando são matematicamente complexas ou difíceis de reproduzir.

Em uma simulação são calculados inúmeros cenários de um modelo utilizando distribuições de probabilidade para as variáveis incertas e utilizando esses valores para o evento. Como todos os cenários produzem resultados associados, cada cenário pode vir a ter uma previsão. Previsões são eventos que definem importantes outputs do modelo.

Dentre os tipos de simulação existentes, a simulação de Monte Carlo é um método muito popular para a valoração de derivativos, inclusive de opções reais. Este método é atribuído a Stanislaw Ulam e N. Metropolis que publicaram o primeiro *paper* sobre o assunto, “*The Monte Carlo Method*” em 1949 no *Journal of the American Statistical Association*. Stanislaw Ulam é inclusive um dos criadores da bomba de hidrogênio. Este método foi criado como uma tentativa para se calcular as probabilidades de sucesso de jogos de azar, na época muito populares no cassino de Monte Carlo, em Mônaco.

Nesta técnica geram-se aleatoriamente os valores das variáveis estocásticas para simular um modelo na vida real. Ela tem como inputs as distribuições de probabilidade das variáveis de entrada e as equações que as conectam ao resultado para a geração do output.

Segundo Dias (2010), se tivermos uma regra ótima de exercício, o método de Monte Carlo é mais fácil e mais flexível. Ele serve tanto para opções do tipo européia quanto americana.

A simulação de Monte Carlo resolve o problema simulando diretamente o processo estocástico, não sendo necessário escrever a equação diferencial da opção real. Ou seja, ele descarta a necessidade de escrever as equações diferenciais e permite uma simulação direta dos processos estocásticos de várias

fontes de incerteza simultaneamente, o que acaba por se tornar muito útil em problemas de grande complexidade com várias variáveis e fatores de risco.

Segundo Hull (2001), a simulação de Monte Carlo envolve o uso de números aleatórios para obter amostras de várias trajetórias diferentes que poderiam ser percorridas pelas variáveis objeto do derivativo em um mundo neutro ao risco. Para cada trajetória, o retorno é calculado e descontado à taxa livre de risco. A média aritmética dos retornos descontados é a estimativa para o valor do derivativo.

Já quanto à precisão deste tipo de simulação, se considerarmos que a lei dos grandes números nos diz que se o número de iterações for grande, a média da distribuição obtida na simulação convergirá para a média teórica correta, o erro diminuirá quanto mais iterações forem realizadas.

De acordo com Dias (2010), os principais erros numéricos na simulação de Monte Carlo são de dois tipos:

1. Erro de discretização de processos estocásticos contínuos. Em alguns casos existem discretizações exatas, como é o caso do movimento geométrico browniano e o movimento aritmético browniano, onde a precisão numérica independe do tamanho da variação do tempo;
2. Erro de amostragem das distribuições, isto é, os valores de *input* amostrais não representam de forma perfeita as distribuições probabilísticas dos *inputs*.

Lembrando ainda que existem dois tipos de simulação, a simulação real e a simulação neutra ao risco. No caso da simulação real, o ativo básico terá que utilizar uma simulação real com taxa ajustada ao risco. Já no caso da simulação neutra ao risco deve-se usar a taxa livre de risco. Entretanto, no caso da opção, deve-se utilizar a simulação neutra ao risco mais a taxa livre de risco, pois não é possível saber a priori qual a taxa ajustada ao risco da opção.

Para se realizar qualquer simulação é necessário, antes de tudo, da equação de discretização do processo estocástico, o que significa fazer $P(t) = \text{função de } P(t - 1)$. Cada processo estocástico possui a sua própria discretização, isto não é diferente para o processo de reversão à média com saltos. Neste trabalho será aplicada a simulação de Monte Carlo com o objetivo de

modelar os preços de *commodities* de acordo com o processo estocástico de reversão à média com saltos de Poisson.

De acordo com Dias (2010), um processo estocástico de reversão à média combinado com saltos de Poisson é também conhecido como modelo de Marlim. O nome Marlim foi dado por Dias (2010) em referência ao campo de petróleo de maior produtividade do Brasil. E sua discretização seguirá como abaixo.

Considerando o processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos discretos, modelados como um processo de Poisson para uma variável estocástica $x(t)$ teremos:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz + dq$$

Sua discretização para a utilização de uma simulação neutra ao risco seguirá a seguinte equação:

$$x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \left[\ln(\bar{P}) - \frac{\mu - r}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1) + jumps$$

Onde $\bar{x} = \ln\bar{P}$, onde $\bar{P}$ é o preço de equilíbrio de longo prazo e $P(t) = \exp\{x(t) - 0,5Var[x(t)]\}$.

Já para o caso da simulação real deve-se utilizar a mesma equação da simulação neutra ao risco, entretanto, mas sem a normalização do prêmio de risco $\frac{\mu-r}{\eta}$ que é subtraída da média de longo prazo $\bar{x}$. Sendo assim, a equação é dada por:

$$x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \ln(\bar{P})(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1) + jumps$$

O termo *jumps* nas equações acima é dado por:

$$jumps = \sum_{i=1}^{J(\Delta t)} \phi_i$$

Onde $J(\Delta t) \sim Poisson(\lambda\Delta t)$ e ϕ_i é a distribuição do tamanho do salto.

A partir da amostragem da normal padrão $N(0,1)$ pode-se obter o caminho para $x(t)$ e assim ser possível simulá-lo.

Lembrando que a equação da variância neste caso é:

$$Var[x(t)] = (1 - e^{-2\eta\Delta t}) \frac{(\sigma^2 + \lambda E[\phi^2])}{2\eta}$$

E também que $E[\phi^2] \neq E[\phi]^2$ e $E[\phi^2] = \int \phi^2 \cdot f(\phi) d\phi$.

Complementando o assunto sobre simulações, apesar de não ser utilizada nesta dissertação, além da simulação de Monte Carlo existe também a simulação de Quase Monte Carlo. A simulação de Quase Monte Carlo emprega seqüências de baixa discrepância. Os conjuntos chamados de baixa discrepância podem apresentar melhores desempenhos que os aleatórios nos experimentos de simulação.

Segundo Dias (2010) ele é um método melhor do que o Monte Carlo para gerar $U[0,1]$. Este método utiliza números quase aleatórios. O caso quase-aleatório apresenta pontos mais igualmente dispersos, ou seja, existem menos “clusters” de pontos que no caso pseudo-aleatório.

Para Saliby e Moreira (2001), de maneira geral, o método de Quasi-Monte Carlo é superior ao de Monte Carlo com amostragem aleatória simples. Esta diferença, contudo, desaparece para casos com grandes dimensões ou quando o integrando deixa de ser uma função suave.