5
Estimativas de zonas plásticas obtidas a partir do uso da Mecânica da Fratura Linear Elástica com os campos de tensões determinados numericamente

Neste capítulo são mostradas as zonas plásticas obtidas a partir de uma análise linear elástica utilizando métodos numéricos. Conforme foi pesquisado durante o desenvolvimento deste trabalho, apenas duas funções de tensão de Westergaard foram encontradas. Uma para o caso da placa de Griffith e outra para uma placa retangular semi infinita tracionada. Portanto, para que se possa estudar as zonas plásticas em geometrias mais complicadas e carregamentos não convencionais é indispensável a utilização dos métodos numéricos.

Dentre os métodos numéricos mais estudados na engenharia estrutural, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Ambos os métodos têm sido aplicados à Mecânica da Fratura (MF).

No MEF destacam-se os elementos denominados de *Quarter Point*, que reproduzem a singularidade intrínseca do modelo matemático da MFLE. Já o MEC com suas soluções fundamentais singulares é uma opção natural para o problema da MF. Entretanto, o MEC que é utilizado nesta tese é o Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC). Esse método numérico pode ser mais bem explicado nos trabalhos de Dumont (1989), Dumont (1998), Dumont & Lopes (2003). O MHEC é utilizado neste trabalho a partir de um programa desenvolvido por Lopes (1998) e (2002) e com o uso de um algoritmo denominado de busca linear, que é explicado na próxima seção.

5.1. Algoritmo de busca linear

O cálculo das zonas plásticas feito a partir deste algoritmo é realizado em duas etapas, que são:

1) Faz-se uma busca incremental para um determinado valor de θ a partir da ponta da trinca. Para cada incremento estabelecido, obtêm-se as tensões

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

$(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ e $\sigma_{xy})$ e, conforme o estado plano que se deseja analisar, determina-se a tensão equivalente de Mises. Essa primeira etapa termina quando se satisfizer $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) < S_Y$, conforme mostra a Figura 103, em que se tem $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) = S_Y$ ao longo da linha vermelha.

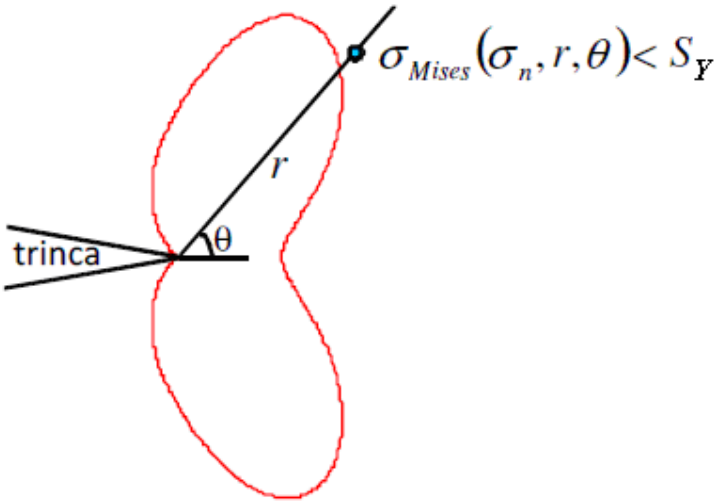


Figura 103 – Determinação do ponto que satisfaz $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) < S_Y$ (Lopes *et al*, 2009).

2) Realiza-se a partir do método da bisseção a busca pelo ponto que satisfaz $|\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) - S_Y| < tol \therefore r = pz_M^{Wtg}$ dentro da tolerância *tol*. A Figura 104 mostra o ponto em que se determina pz_M^{Wtg}.

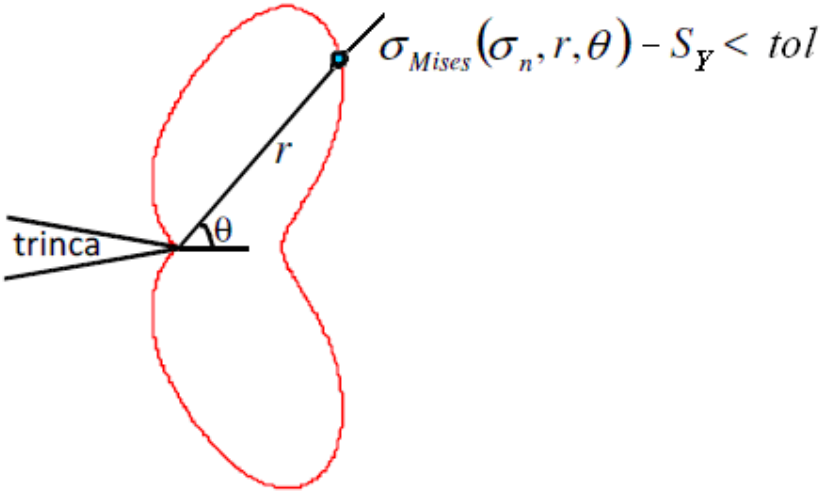


Figura 104 – Determinação do ponto que satisfaz $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) - S_Y < tol$ (Lopes *et al*, 2009).

Apesar deste algoritmo poder ser utilizado tanto no MEF quanto no MHEC, ele só foi implementado no programa desenvolvido por Lopes (2002) que usa o

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

MHEC. A seguir se faz uma breve apresentação do MHEC, que é baseada no trabalho de Lopes (2002).

5.2. O Método Híbrido dos Elementos de Contorno aplicado à problemas da Mecânica da Fratura

Como este trabalho utiliza o programa de Lopes (2002), apresenta-se, a seguir, um breve resumo da formulação desenvolvida no seu trabalho. Para maiores detalhes sobre o Método Híbrido dos Elementos de Cotorno é necessário se consultar os trabalhos citados anteriormente de Dumont.

Lopes (1998) e (2002) desenvolveu várias formulações do MHEC para a MF. Primeiro, foi comprovado que a formulação inicial completa do MHEC pode ser aplicada sem nenhuma modificação quando se usa a técnica de subdivisões na análise de estruturas trincadas.

Posteriormente, foram desenvolvidas três formulações do MHEC para estruturas com condições de contorno do tipo Neumann, que permitem o cálculo do K_I. A primeira delas, denominada "Hipersingular", tem a desvantagem de não permitir a obtenção do K_I de maneira satisfatória, porém, ao se utilizar a série de Williams, é possível obter o K_I com boa aproximação.

A segunda formulação, que utiliza a série de Williams como uma solução fundamental, permite o cálculo do K_I diretamente, introduzindo-o no sistema de equações como incógnita primária do problema. Contudo, essa formulação não permite o cálculo de Fatores de Intensidade de Tensão para trincas internas, fato que decorre da introdução de uma descontinuidade no campo de tensões em uma linha tangente às pontas da trinca.

A terceira formulação, que é utilizada neste trabalho, também introduz os Fatores de Intensidade de Tensão como incógnitas primárias do problema. Porém, em vez da série de Williams, a função completa de Westergaard, vide Eq. (85), é usada como solução fundamental.

A formulação que utiliza a função completa de Westergaard propõe que uma trinca genérica seja aproximada por uma sucessão de elementos retos de trinca. Esses elementos devem se sobrepor para garantir que todas as regiões da trinca, que será modelada, sofram o efeito da abertura de suas faces. A Figura 105 ilustra essa sobreposição, onde cinco elementos de trinca são utilizados para discretizar a trinca curva, que passa pelos nós numerados de 0 a 6.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

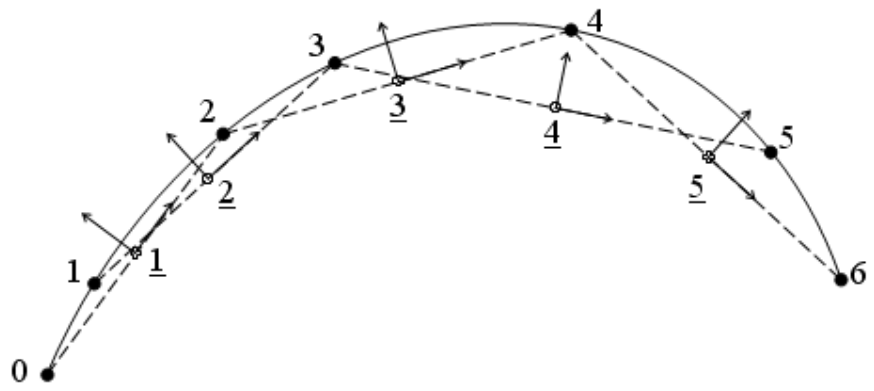
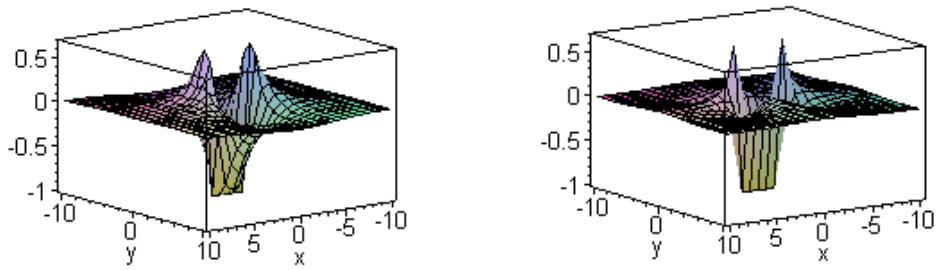


Figura 105 – Trinca curva genérica modelada como uma sucessão de elementos retos de trinca (Lopes, 2002).

A função de tensão que fornece as forças de superfície utilizadas para a sobreposição descrita na Figura 105 é dada pela Eq. (85),

$$Z(z) = \sigma\left(\frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1\right), \tag{85}$$

que é uma modificação da função de tensão de Westergaard para o caso da placa de Griffith. Essa modificação consiste em adicionar um termo constante para forçar um carregamento na trinca e zerar as solicitações em pontos distantes. Sendo assim, as componentes de tensão σ_{yy} e σ_{xx} são representadas na Figura 106(a) e Figura 106(b) respectivamente.



(a) (b)

Figura 106 – Representação gráfica das componentes de tensão (a) σ_{yy} e (b) σ_{xx} (Lopes, 2002).

Lopes (2002) também testou essa formulação para determinar K_{II} e K_{III} em diversos problemas clássicos da MF, confirmando a boa representação do campo de tensões em pontos próximos à ponta da trinca. Entretanto, para o problema de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

trincas de bordo, a utilização da função de Westegaard como solução fundamental precisa de maior investigação.

5.3. O Métodos dos Elementos Finitos aplicado à problemas da Mecânica da Fratura

Como o principal interesse da Mecânica da Fratura é a obtenção dos Fatores de Intensidade de Tensão, foram estudadas formas de se obter, utilizando-se o MEF, a mesma singularidade presente no campo de tensões gerado pelo K_I, que é da ordem de $1/\sqrt{r}$. Barsoum (1976) e Henshell & Shaw (1975) mostraram, de forma independente, que essa singularidade poderia ser obtida ao se mover os nós de meio de lado do elemento finito a um quarto de distância do nó da ponta da trinca. Esse tipo de elemento ficou conhecido como *Quarter Point*.

Entretanto, a obtenção desse campo analítico completo pode ser feita numericamente sem a necessidade do elemento *Quarter Point*, conforme é mostrado ao longo deste capítulo a partir das estimativas de zonas plásticas para diversos exemplos. O programa ANSYS (2001) foi utilizado na obtenção numérica dos campos de tensões e na posterior estimativa das zonas plásticas feitas com o uso do MEF.

Uma explicação mais detalhada sobre a obtenção das zonas plásticas estimadas numericamente pelo MEF a partir do ANSYS é feita no apêndice deste trabalho. Uma breve discussão sobre a sensibilidade das estimativas das zonas plásticas feitas pelo MEF em relação ao nível de refinamento da malha também é feita nesse apêndice.

A seguir, mostra-se o exemplo da placa de Griffith. Nesse exemplo, mostra-se que as estimativas numéricas obtidas pelo MHEC são iguais aos resultados obtidos a partir da função de tensão de Westergaard.

5.4. Estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente para o exemplo da placa de Griffith

A placa de Griffith foi o primeiro caso em que se mostrou que a utilização do campo de tensões gerado a partir de K_I não é suficiente para prever o tamanho das zonas plásticas quando se tem uma alta relação σ_n/S_Y. Portanto, este é o primeiro exemplo em que se mostra que as estimativas de zonas plásticas obtidas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

numericamente a partir do MHEC e do algoritmo de busca linear são idênticas as zonas plásticas obtidas a partir da função de tensão de Westergaard.

A Figura 107 mostra as estimativas de zonas plásticas obtidas analiticamente $\left(pz_{M,pl-\sigma}^{Wtg}\right)$ e numericamente $\left(pz_{M,pl-\sigma}^{LE_MHEC}\right)$ sob estado plano de tensão com σ_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

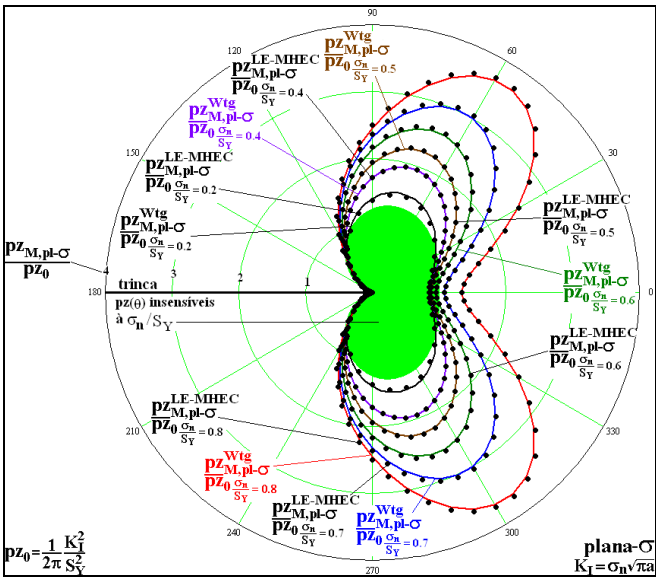


Figura 107 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão para o caso da placa de Griffith.

A Figura 108 mostra as estimativas de zonas plásticas obtidas analiticamente $\left(pz_{M,pl-\varepsilon}^{Wtg}\right)$ e numericamente $\left(pz_{M,pl-\varepsilon}^{LE_MHEC}\right)$ sob estado plano de deformação com σ_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

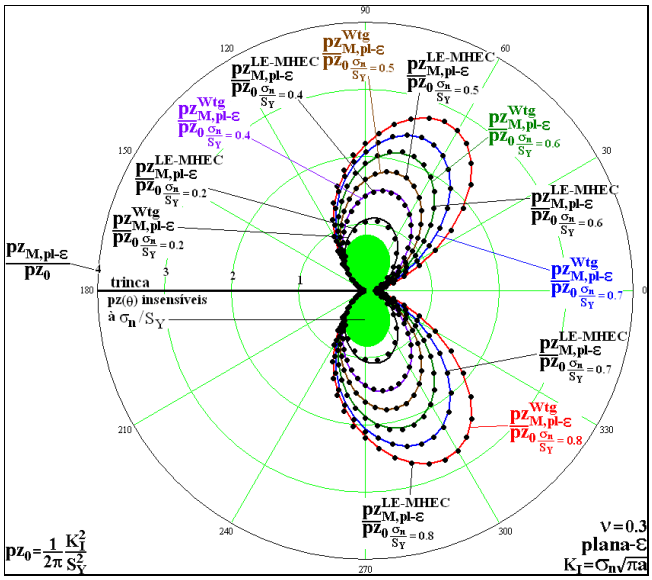


Figura 108 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação para o caso da placa de Griffith.

Ao se analisar a Figura 107 e a Figura 108 é possível perceber que as estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente a partir do MHEC são coincidentes com as estimavas analíticas geradas a partir do campo de tensões determinado pela função de tensão de Westergaard. Isso era esperado, pois o uso de métodos numéricos é feito justamente para se resolver problemas em que não se conhece a solução analítica. Como a solução completa do campo de tensões linear elástico, para problemas de trinca, é dada pela função de tensão de Westergaard, não há surpresa alguma que as estimativas $pz(\theta)_M$ obtidas numericamente fossem praticamente iguais às estimativas pz_M^{Wtg} obtidas analiticamente a partir do campo de tensões gerado pela função de Westegaard correspondente ao problema estudado.

O próximo exemplo mostra o exemplo da placa retangular semi infinita com uma trinca central. Também se compara nesse exemplo as estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente a partir do MHEC com as estimativas obtidas pela função de tensão de Westergaard.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

5.5. Estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente para o exemplo de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central

Este exemplo avalia numericamente, a partir do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC) e de uma análise linear elástica, as estimativas das zonas plásticas $\left(pz_M^{LE-MHEC}\right)$ feitas na subseção 3.3.2. Nessa subseção se utilizou a função de tensão de Westergaard apresentada por Eftis & Liebowitz (1972). É importante lembrar que a largura definida para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central é igual a *W*. Neste exemplo, a largura da placa será considerada igual a 2*W*. Assim, os valores de *a/W* iguais à 0,025; 0,050 e 0,091 serão considerados aqui como 0,050; 0,100 e 0,182.

As próximas doze figuras mostram a comparação entre as zonas plásticas obtidas numericamente pelo MHEC e as zonas plásticas obtidas analiticamente a partir da função de tensão de Westergaard. As seis primeiras tratam o caso de tensão plana e as últimas seis referem-se ao caso de deformação plana.

A Figura 109 mostra a comparação entre as estimativas de zonas plásticas pz_M^{Wtg} e $pz_M^{LE-MHEC}$ sob estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$ e para $a/W = 0{,}050$; 0,100 e 0,182.

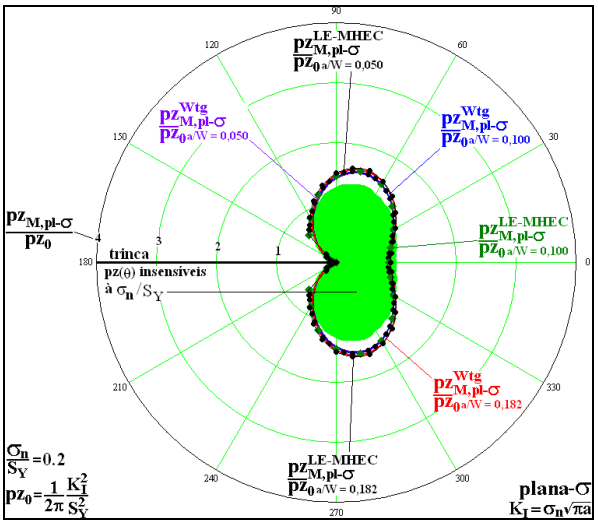


Figura 109 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 110 mostra a comparação entre as estimativas de zonas plásticas pz_M^{Wtg} e $pz_M^{LE-MHEC}$ sob estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$ e para $a/W = 0{,}050$; 0,100 e 0,182.

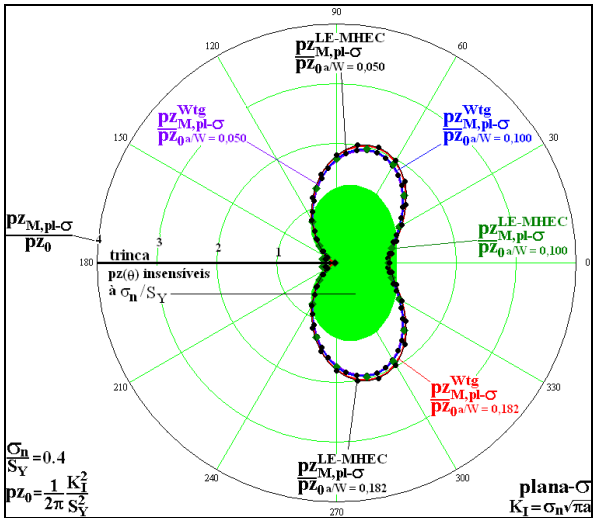


Figura 110 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 111 mostra a comparação entre as estimativas de zonas plásticas pz_M^{Wtg} e $pz_M^{LE-MHEC}$ sob estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$ e para $a/W = 0{,}050$; 0,100 e 0,182.

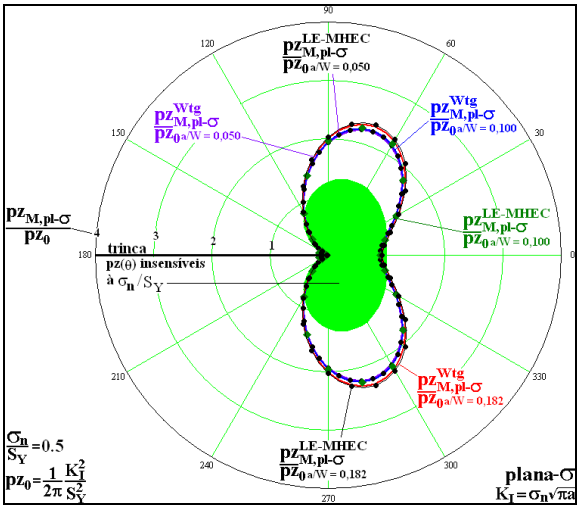


Figura 111 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 112 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$ e para a/W = 0,050; 0,100 e 0,182.

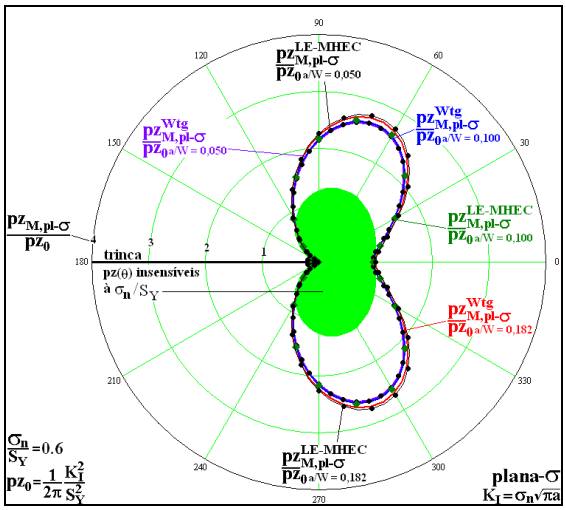


Figura 112 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 113 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$ e para a/W = 0,050; 0,100 e 0,182.

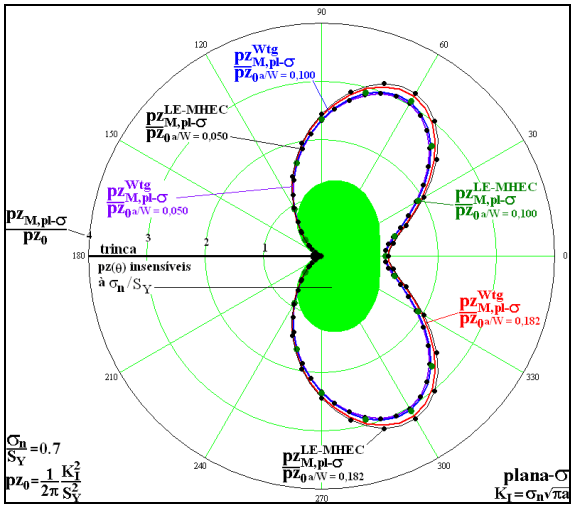


Figura 113 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 114 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$ e para a/W = 0,050; 0,100 e 0,182.

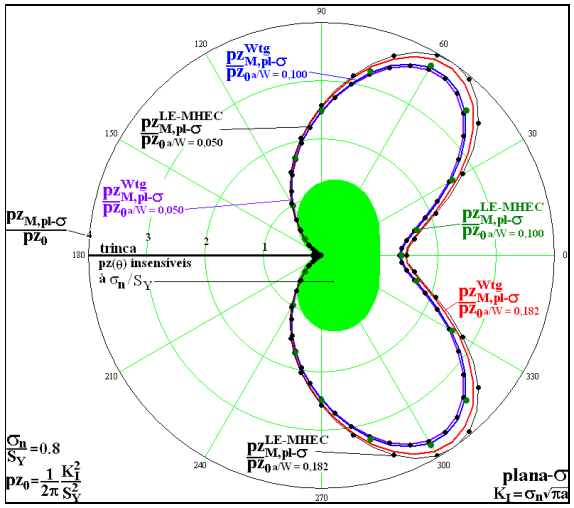


Figura 114 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

As próximas seis figuras tratam o caso de deformação plana. A Figura 115 mostra o caso com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$ e para a/W = 0,050; 0,100 e 0,182.

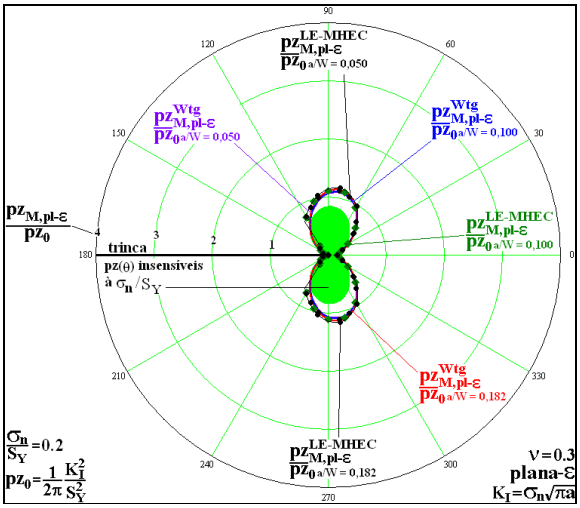


Figura 115 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 116 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$ e com a/W = 0,050; 0,100 e 0,182.

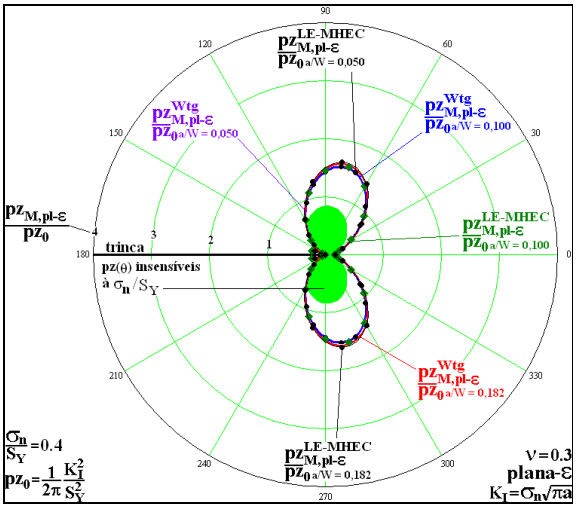


Figura 116 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 117 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para o caso com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$ e para a/W = 0,050; 0,100 e 0,182.

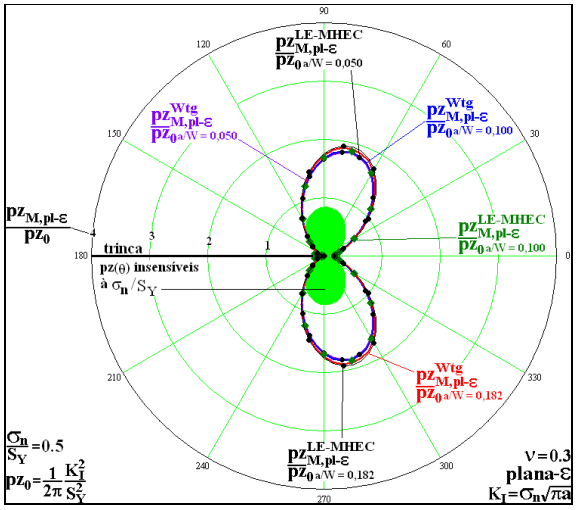


Figura 117 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 118 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para o caso com $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$ e para $a/W = 0{,}050$; 0,100 e 0,182.

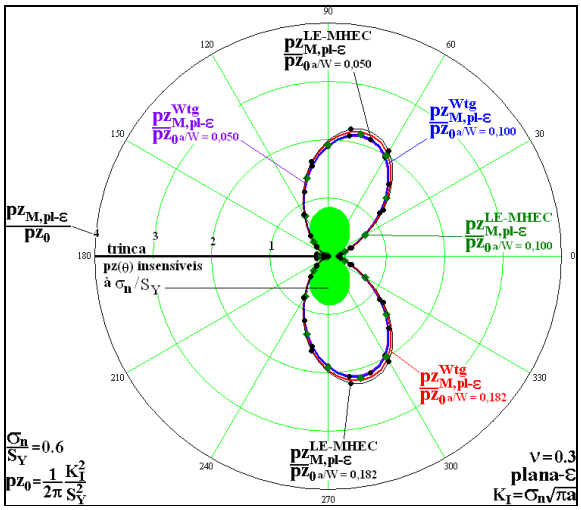


Figura 118 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 119 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para o caso com $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$ e para $a/W = 0{,}050$; 0,100 e 0,182.

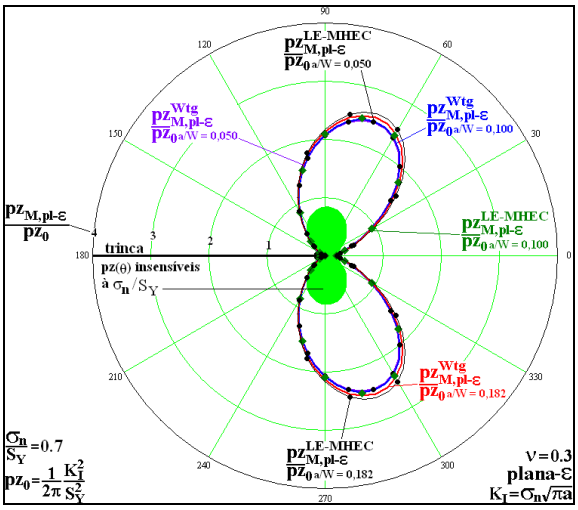


Figura 119 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 120 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para o caso com $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$ e para $a/W = 0{,}050$; 0,100 e 0,182.

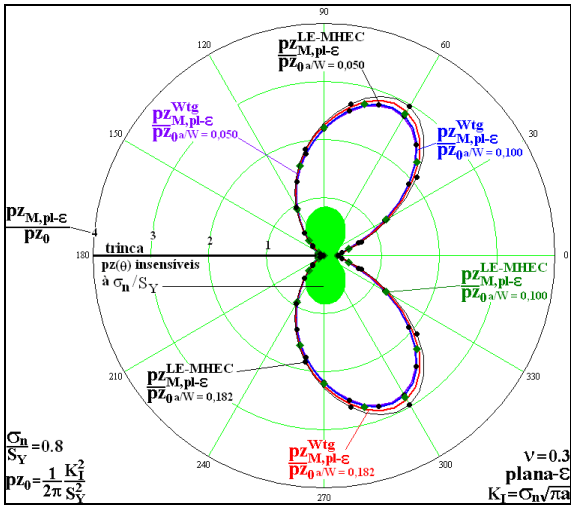


Figura 120 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$ para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

Analisando as doze figuras anteriores, é possível perceber que para as relações $a/W = 0{,}050$; 0,100 as estimativas numéricas das zonas plásticas obtidas a partir do MHEC são coincidentes com as estimativas analíticas para todos os casos da relação σ_n/S_Y. Já para a relação de $a/W = 0{,}182$, as estimativas numéricas das zonas plásticas só são coincidentes para $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$; 0,4 e 0,5. Para $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$; 0,7 e 0,8; as estimativas numéricas geram resultados um pouco maiores que as estimativas obtidas pela função de tensão de Westergaard. Todas essas observações acontecem para ambos os estados planos.

Como para o caso da placa de Griffith todas as estimativas numéricas coincidiram com as estimativas obtidas pela função de tensão de Westergaard, pode-se supor que um dos possíveis motivos para o fato das estimativas numéricas do caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central serem diferentes das estimativas obtidas a partir da função de tensão de Westergaard é que para $a/W = 0{,}182$ a função de tensão de Westergaard não gere o resultado correto do campo de tensões. Apesar disso, o valor de a/W igual a 0,182 ainda está dentro do limite de aplicabilidade para a função de tensão de Westergaard, Eq. (28), recomendada por Eftis & Liebowitz (1972).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

O próximo exemplo mostra o caso de uma placa retangular com uma trinca central sob flexo tração. Nesse exemplo, as estimativas são feitas pelo MHEC e pelo MEF.

5.6. Placa retangular com uma trinca central sob flexo tração

A Figura 121 mostra com detalhe o exemplo da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração. Os valores de K_I para cada ponta e para cada relação σ_n/S_Y são obtidas a partir do programa de Lopes (2002).

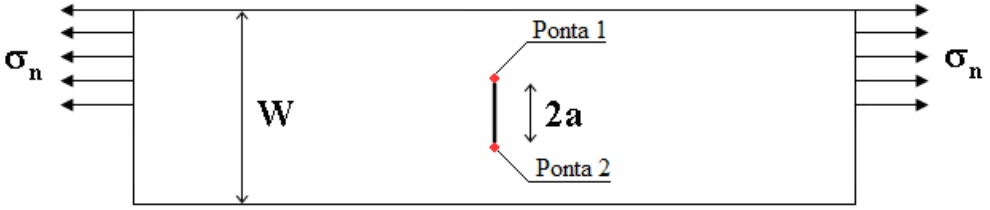


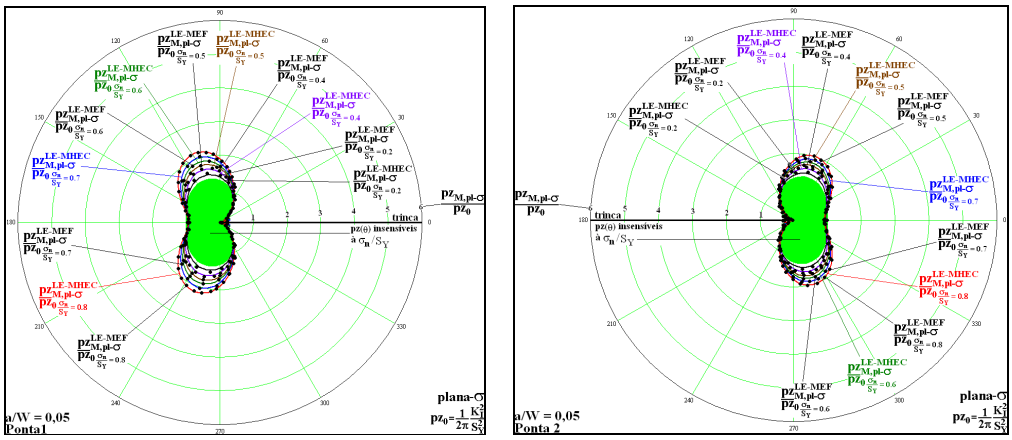
Figura 121 – Placa retangular com uma trinca central sob flexo tração.

Neste exemplo, o valor de W é fixo e igual a 10 cm. Três valores de a/W são estudados neste caso: 0,05; 0,1 e 0,4. Os valores de σ_n/S_Y estudados são: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8. Neste exemplo, as estimativas das zonas plásticas são feitas a partir do MHEC $\left(pz_M^{LE-MHEC}\right)$ e do MEF $\left(pz_M^{LE-MEF}\right)$.

Para cada valor de a/W é possível mostrar os efeitos da relação σ_n/S_Y na estimativas das zonas plásticas. A Figura 122(a) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para a/W = 0,05 sob tensão plana para ponta 1. A Figura 122(b) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para um a/W = 0,05 sob tensão plana para ponta 2.

A Figura 123(a) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para a/W = 0,1 sob tensão plana para ponta 1. A Figura 123(b) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para a/W = 0,1 sob tensão plana para ponta 2.

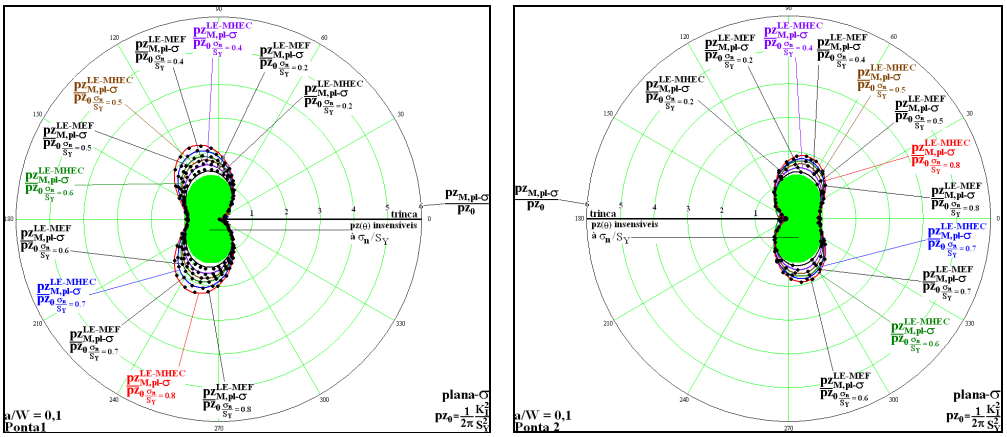
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

Figura 122 – Efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com a/W = 0,05 para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 123 mostra o caso em que se fixa a relação a/W = 0,1.

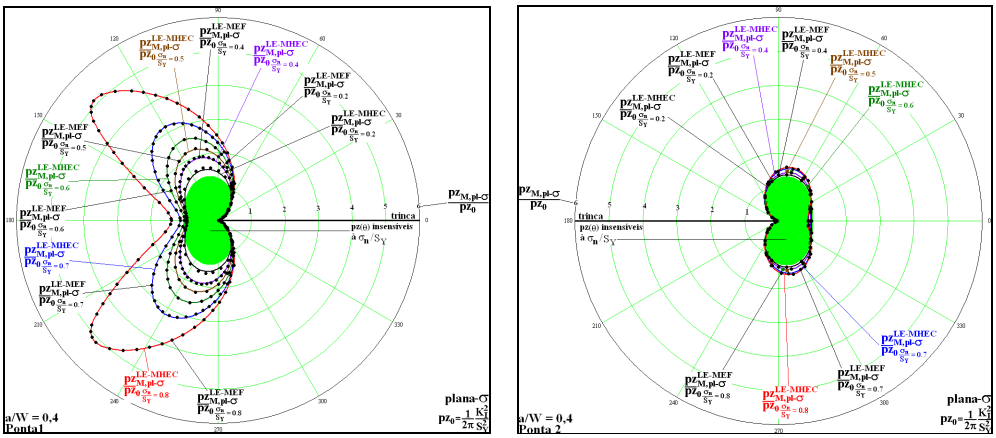


(a) (b)

Figura 123 – Efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com a/W = 0,1 para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 124 mostra o caso em que se fixa a relação a/W = 0,4. Para manter a mesma escala das outras figuras e para facilitar a visualização dos resultados, as estimativas das zonas plásticas obtidas pelo MEF correspondentes à σ_n/S_Y = 0,5 e 0,6 são omitidas na Figura 124(b).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

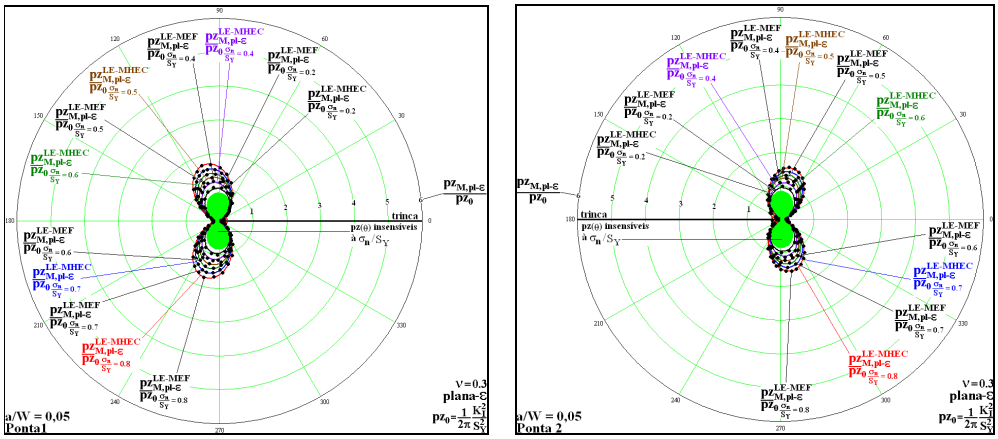
Figura 124 – Efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com a/W = 0,4 para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 125(a) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para a/W = 0,05 sob deformação plana para ponta 1. A Figura 125(b) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para a/W = 0,05 sob deformação plana para ponta 2.

A Figura 126(a) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para a/W = 0,1 sob deformação plana para ponta 1. A Figura 126(b) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para a/W = 0,1 sob deformação plana para ponta 2.

A Figura 127(a) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para a/W = 0,4 sob deformação plana para ponta 1. A Figura 127(b) mostra o efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas para a/W = 0,4 sob deformação plana para ponta 2.

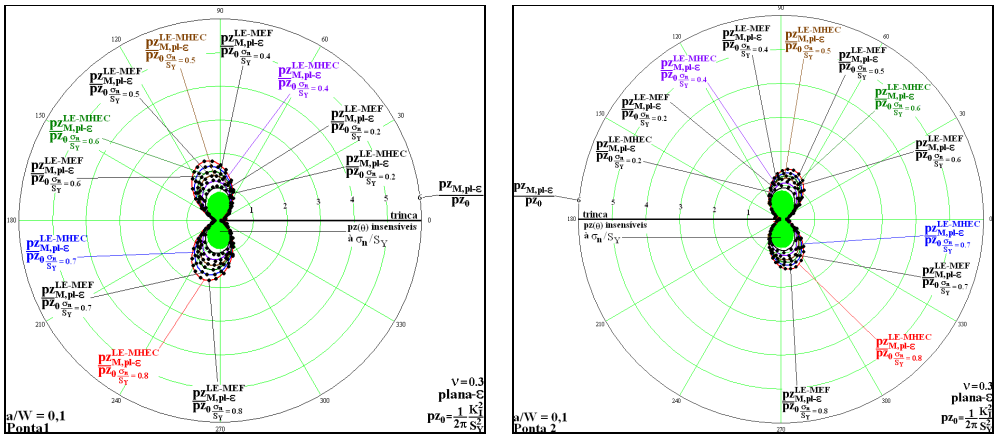
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

Figura 125 – Efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com a/W = 0,05 para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 126 mostra o caso em que se fixa a relação a/W = 0,1.

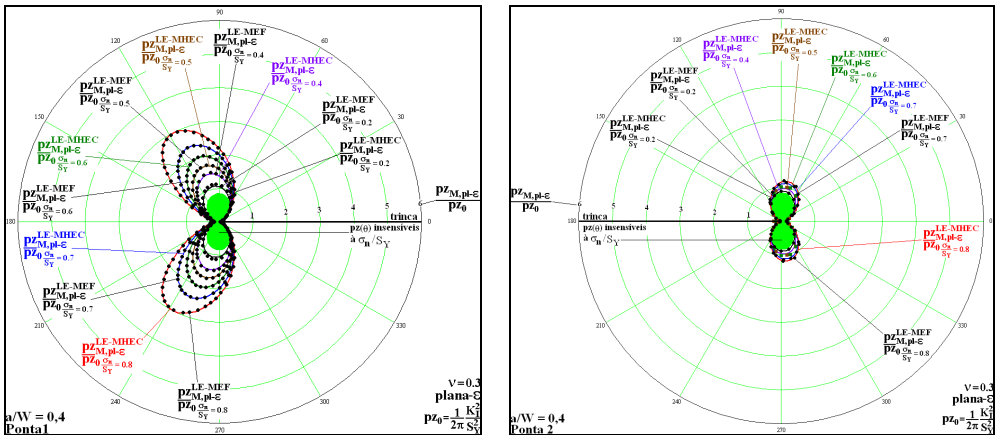


(a) (b)

Figura 126 – Efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com a/W = 0,1 para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 127 mostra o caso em que se fixa a relação a/W = 0,4. Para manter a mesma escala das outras figuras e para facilitar a visualização dos resultados, as estimativas das zonas plásticas obtidas por MEF correspondentes à σ_n/S_Y = 0,4; 0,5 e 0,6 são omitidas na Figura 127(b).

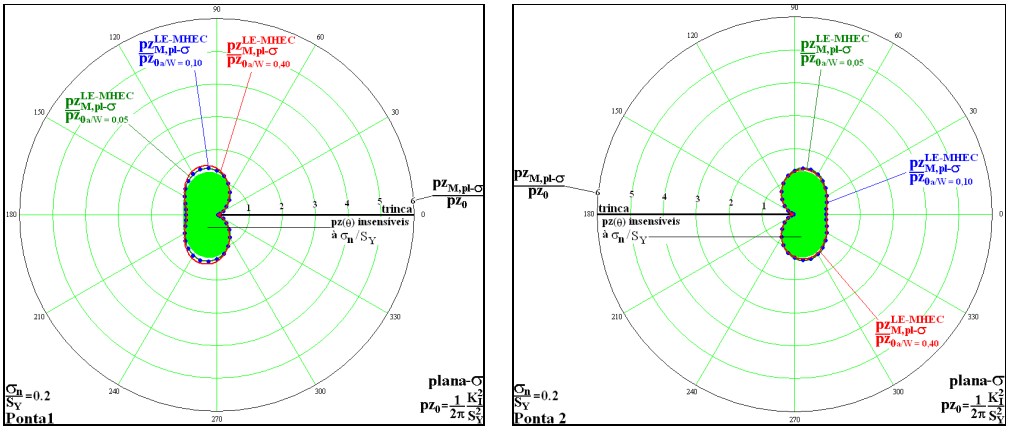
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

Figura 127 – Efeito da relação σ_n/S_Y nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $a/W = 0{,}4$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

Para avaliar o efeito da relação a/W no tamanho das zonas plásticas, é necessário se fixar um valor de σ_n/S_Y. Dessa forma, A Figura 128 mostra o efeito de a/W na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$. Para manter a mesma escala das outras figuras e para facilitar a visualização dos resultados, as estimativas das zonas plásticas obtidas pelo MEF correspondentes à $a/W = 0{,}05$; 0,10 e 0,40 são omitidas na Figura 128.

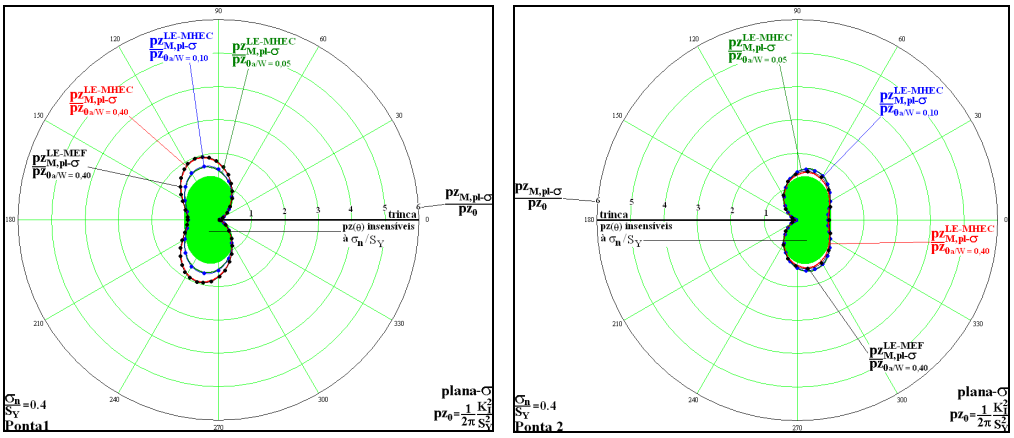


(a) (b)

Figura 128 – Efeito da relação a/W nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 129 mostra o efeito de a/W na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$. Nesse exemplo, também se omite as zonas plásticas obtidas a partir do MEF que correspondem à $a/W = 0{,}05$ e 0,10.

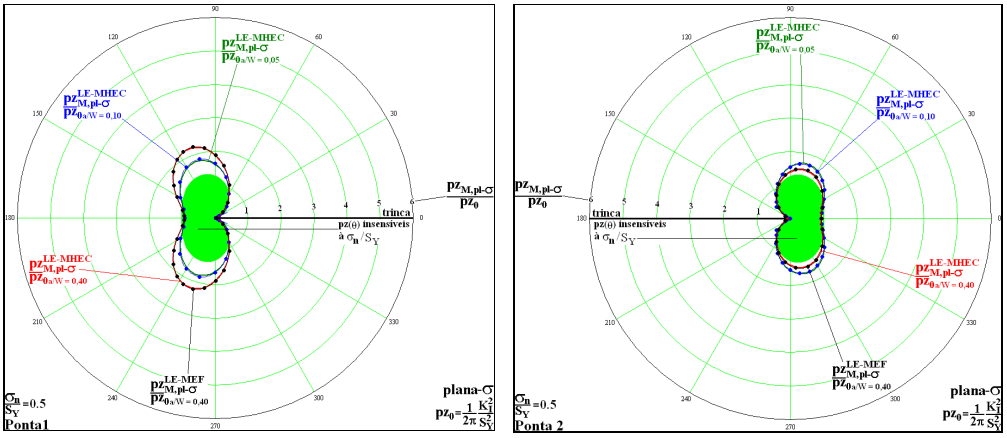
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

Figura 129 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 130 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$. Assim como no exemplo anterior, as zonas plásticas obtidas a partir do MEF correspondentes à *a/W* = 0,05 e 0,10 são omitidas.

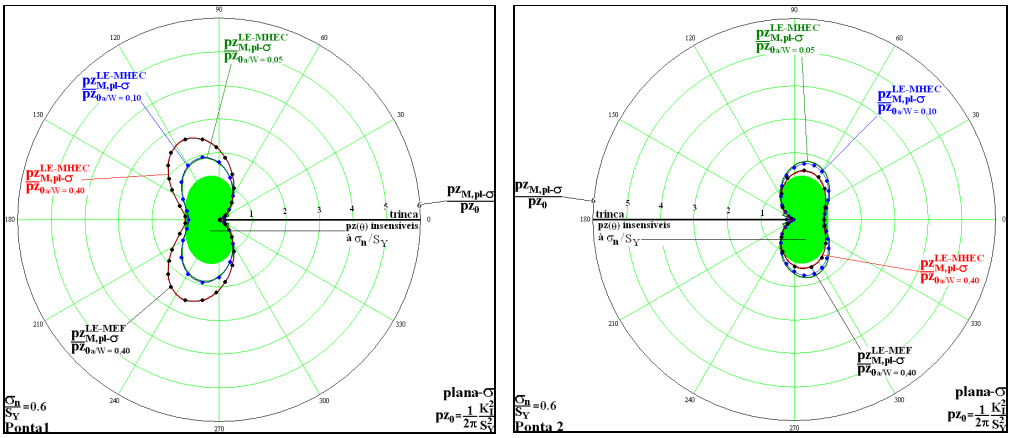


(a) (b)

Figura 130 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 131 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$. Nesse exemplo também se omite as zonas plásticas obtidas a partir do MEF correspondentes à *a/W* = 0,05 e 0,10.

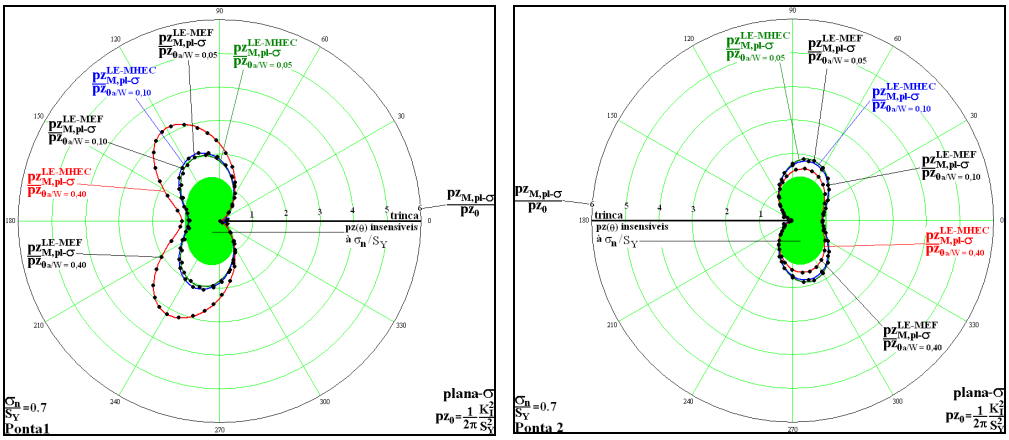
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

Figura 131 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 132 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$.

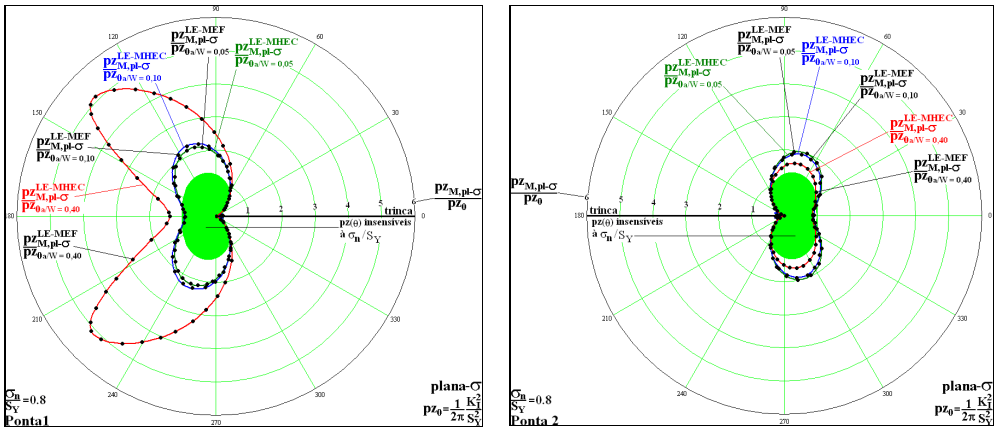


(a) (b)

Figura 132 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 133 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$.

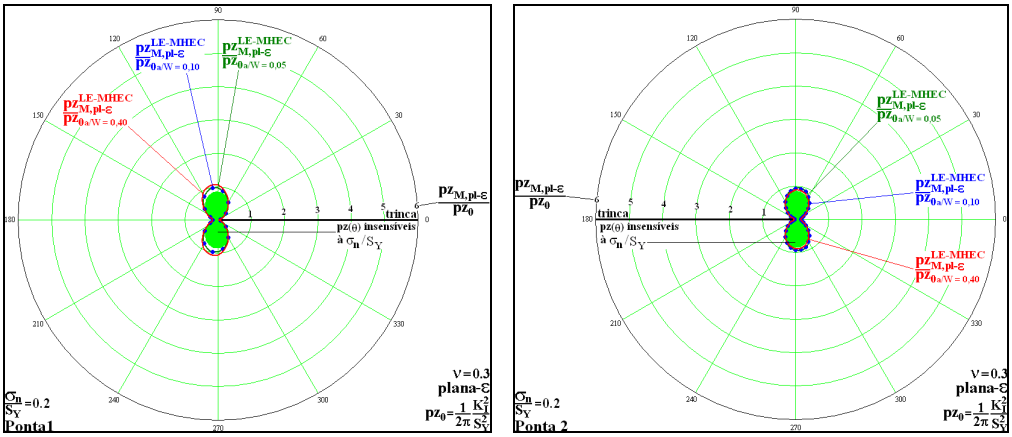
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

Figura 133 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 134 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$. Como aconteceu para os casos de tensão plana, alguns resultados obtidos a partir do MEF são omitidos. Quando eles forem colocados, estarão explicitamente identificados nas figuras.

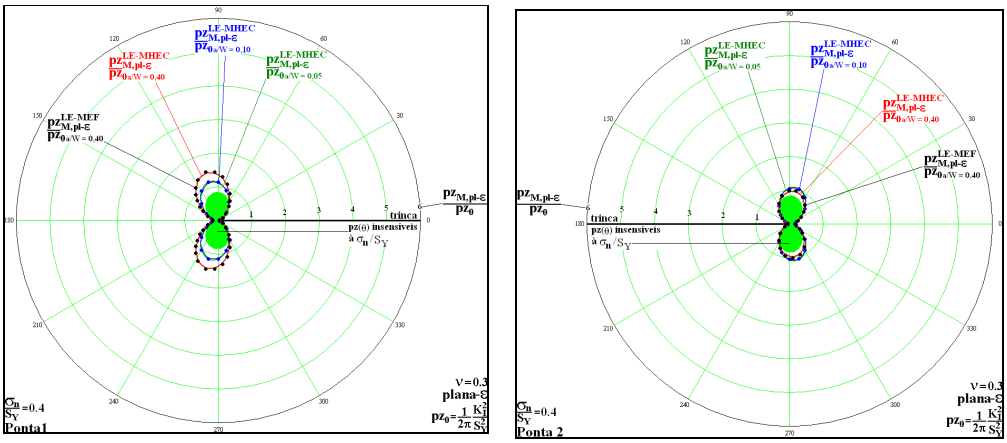


(a) (b)

Figura 134 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 135 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$.

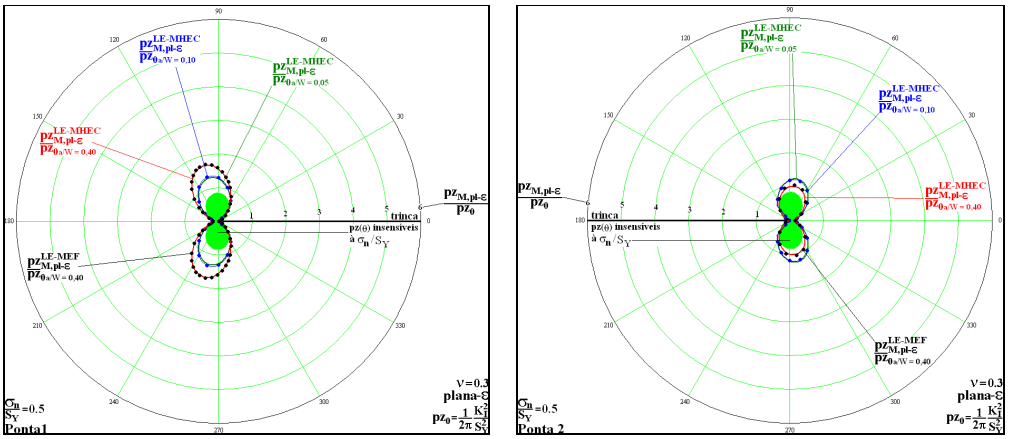
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

Figura 135 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 136 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$.

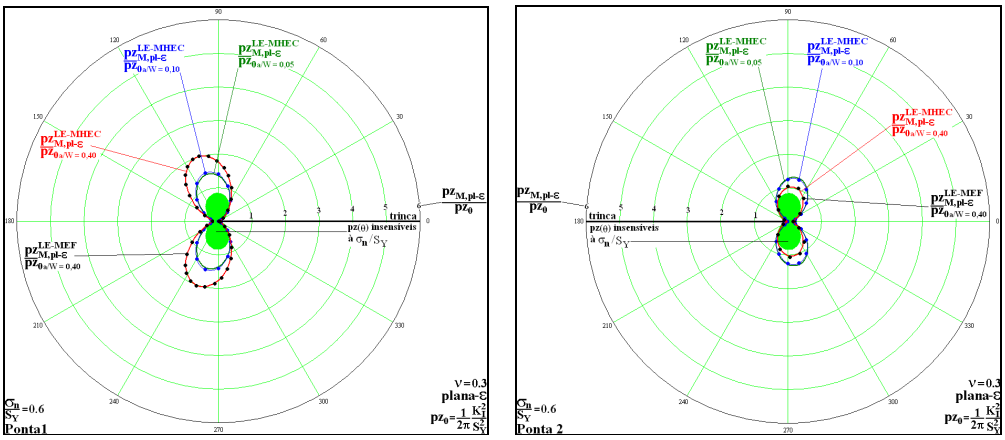


(a) (b)

Figura 136 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 137 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$.

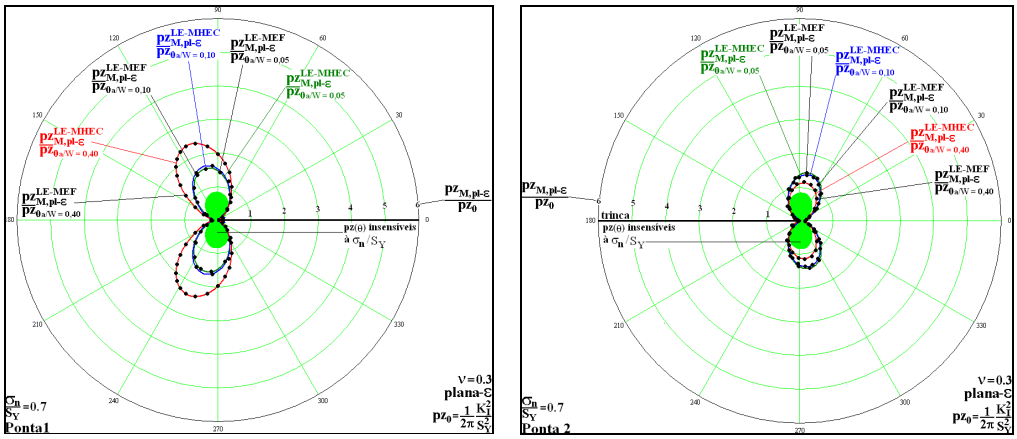
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

Figura 137 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 138 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$.

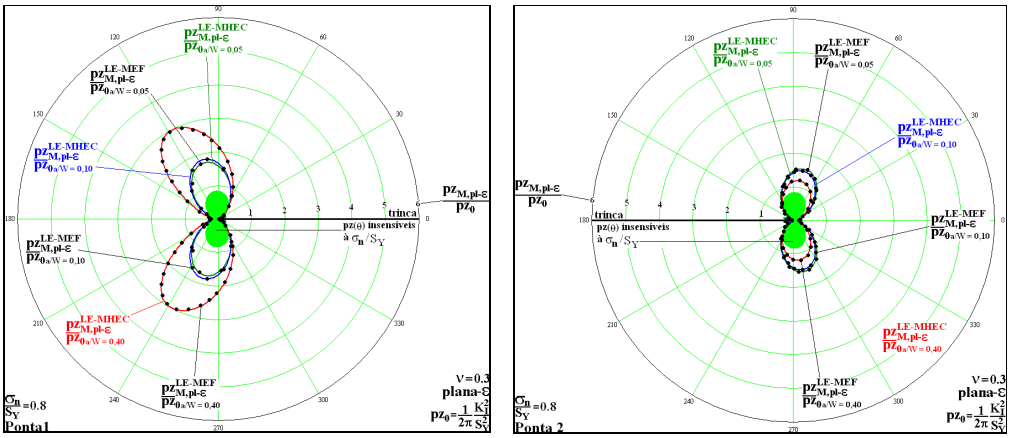


(a) (b)

Figura 138 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 139 mostra o efeito de *a/W* na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA



(a) (b)

Figura 139 – Efeito da relação *a/W* nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com σ_n/S_Y = 0,8 para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

O exemplo da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração é importante para mostrar que, para baixos valores de σ_n/S_Y, as estimativas das zonas plásticas obtidas por uma análise numérica linear são bem próximas das zonas plásticas estimadas pelo campo de tensões obtido a partir de K_I. Entretanto, quanto maior for o valor σ_n/S_Y, mais distante essas duas estimativas ficam entre si. Esse fato acontece para as duas pontas do caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração e também já foi constatado no exemplo da placa de Griffith e na placa retangular semi infinita com uma trinca central.

Em relação ao efeito da relação *a/W*, pode-se constatar que ele é diferente para cada ponta. Para a ponta 1, que está mais tracionada, quanto maior for o valor de *a/W*, maior será o tamanho da zona plástica para um mesmo valor de σ_n/S_Y. Esse fato acontece para os dois estados planos. Para a ponta 2, que está menos tracionada, quanto maior for o valor de *a/W*, menor será o tamanho da zona plástica para um mesmo valor de σ_n/S_Y. Esse fato acontece para os dois estados planos.

O próximo exemplo é importantíssimo para o estudo desta tese, pois ele mostra que para baixos valores σ_n/S_Y o uso de K_I representa bem a intensidade do campo de tensões em corpos trincados, independentemente do contorno do corpo. Essa independência é mostrada a partir da análise de três espécimes diferentes: o

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

CCT (Center Cracked Tension), o SENB (Single Edge Notched Bend) e o SENT (Single Edge Notched Tension).

5.7. Estimativa de zonas plásticas em espécimes diferentes sob um mesmo Fator e Intensidade de Tensão

Este exemplo avalia as zonas plásticas de três espécimes diferentes sob um mesmo K_I para um determinado valor de σ_n/S_Y. Para baixos valores de σ_n/S_Y, $\sigma_n/S_Y < 0{,}5$; nota-se que as zonas plásticas dos três espécimes são diferentes, mas ficam bem próximas das zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões determinado por K_I. A medida que a relação σ_n/S_Y cresce, as zonas plásticas dos três espécimes começam a ficar cada vez mais diferentes entre si e maiores que a zona plástica obtida pelo campo de tensões obtido por K_I.

Em seguida, mostra-se separadamente para cada estado plano, os efeitos de σ_n/S_Y para cada espécime.

O valor adotado de K_I é igual a $30\,\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$. A expressão de K_I para cada espécime foi obtida a partir de Anderson (1995). O espécime SENT pode ser visualizado mais detalhadamente na Figura 140.

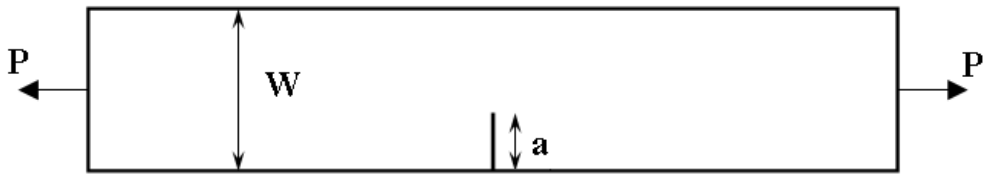


Figura 140 – Espécime SENT (adaptada de Anderson, 1995).

A expressão de K_I para o espécime SENT é dada pela Eq. (86):

$$K_I^{SENT} = \frac{P}{t\sqrt{W}} \frac{\sqrt{2\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \left[0{,}752 + 2{,}02\left(\frac{a}{W}\right) + 0{,}37\left(1 - \sin\left(\frac{\pi a}{2W}\right)^3\right)\right], \qquad (86)$$

em que t é espessura.

O espécime SENB pode ser visualizado mais detalhadamente na Figura 141.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

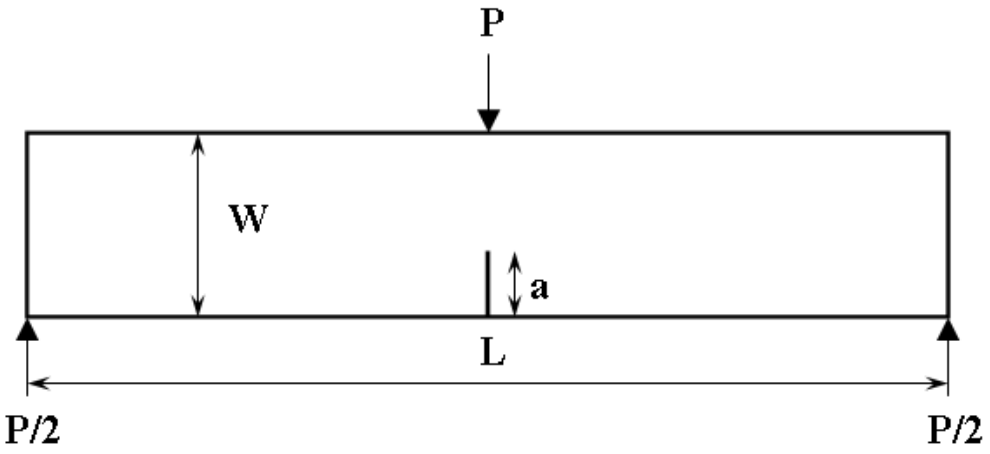


Figura 141 – Espécime SENB (adaptada de Anderson, 1995).

A expressão de K_I para o espécime SENB é dada pela Eq. (87):

$$K_I^{SENB} = \frac{P}{t\sqrt{W}} \frac{3\frac{L}{W}\sqrt{\frac{a}{W}}}{2\left(1+2\frac{a}{W}\right)\left(1-\frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[1{,}99 + -\frac{a}{W}\left(1-\frac{a}{W}\right)\left\{2{,}15 - 3{,}93\left(\frac{a}{W}\right) + 2{,}7\left(\frac{a}{W}\right)^2\right\}\right], \quad (87)$$

em que t é a espessura do espécime.

O espécime CCT pode ser visualizado mais detalhadamente na Figura 142.

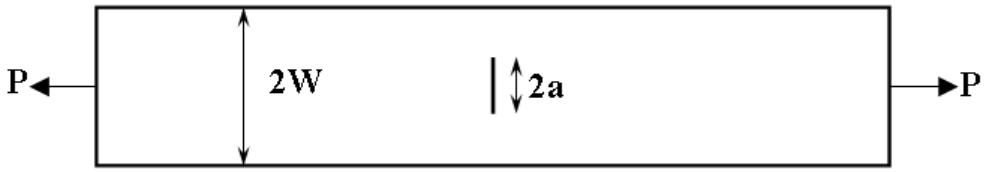


Figura 142 – Espécime CCT (adaptada de Anderson, 1995).

A expressão de K_I para o espécime CCT é dada pela Eq. (88):

$$K_I^{CCT} = \frac{P}{t\sqrt{W}} \sqrt{\frac{\pi a}{4W}\sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \left[1 - 0{,}025\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0{,}06\left(\frac{a}{W}\right)^4\right], \quad (88)$$

em que t é a espessura do espécime.

Com a expressão de K_I para cada espécime, os valores de a e W foram ajustados de tal maneira que satisfizessem o valor de $K_I = 30\,\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ e o valor de σ_n/S_Y estabelecido, conforme pode ser visto no apêndice deste trabalho. É importante mencionar que o valor de σ_n foi calculado sem se considerar a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

presença da trinca. Dessa forma, a Figura 143 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$.

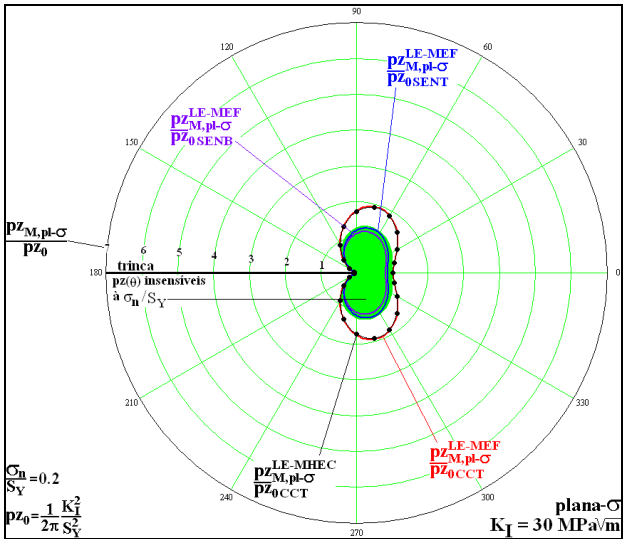


Figura 143 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$.

A Figura 144 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$.

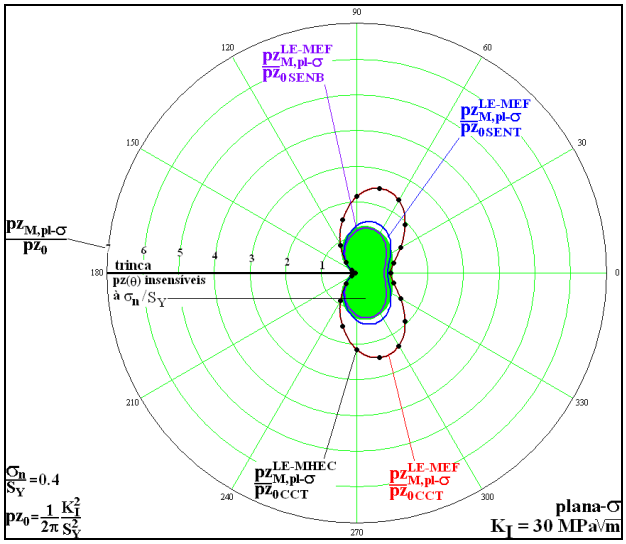


Figura 144 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 145 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$.

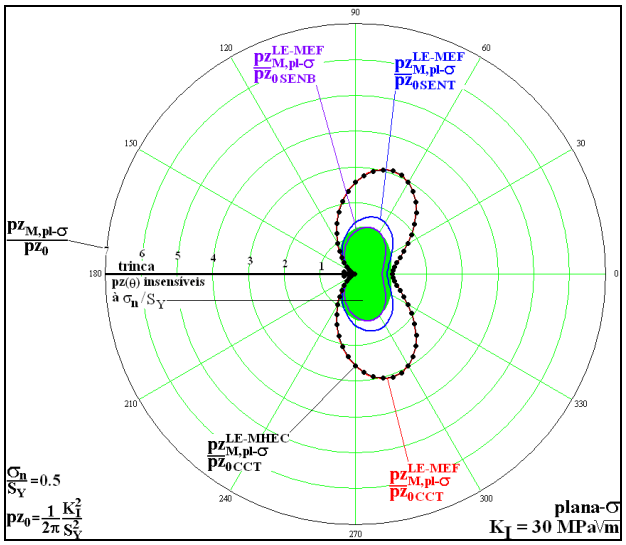


Figura 145 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$.

A Figura 146 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$.

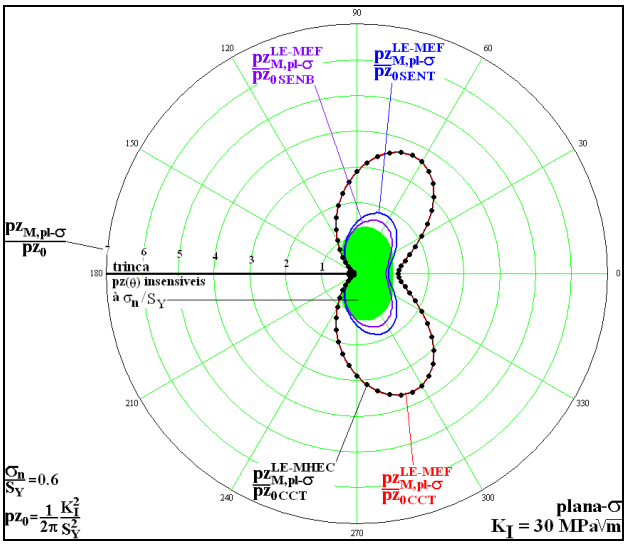


Figura 146 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 147 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$.

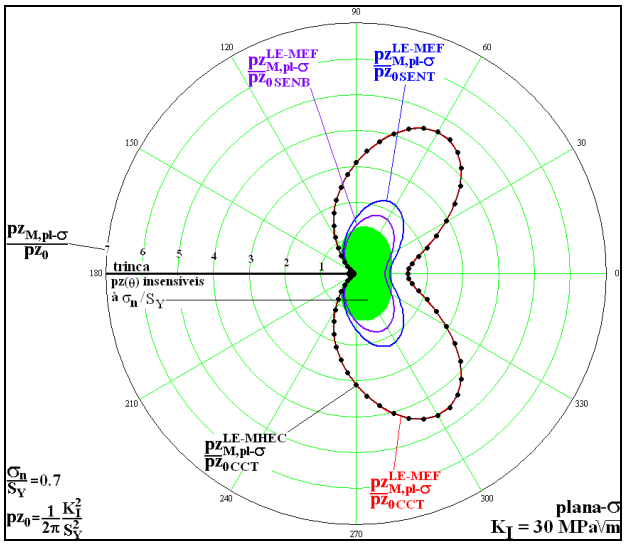


Figura 147 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$.

A Figura 148 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$.

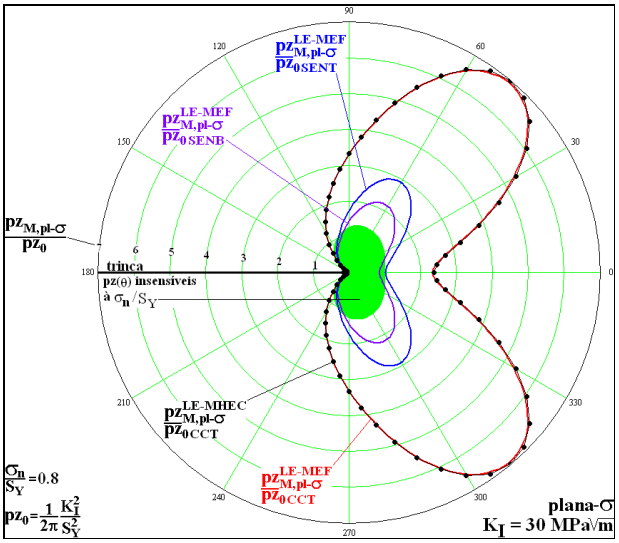


Figura 148 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 149 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$.

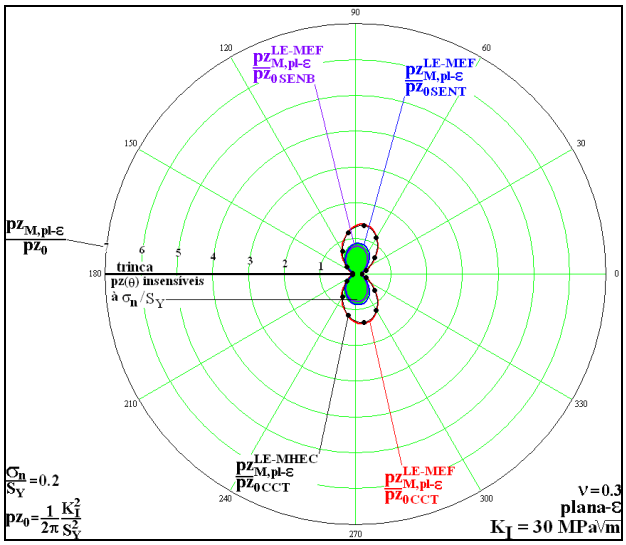


Figura 149 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$.

A Figura 150 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$.

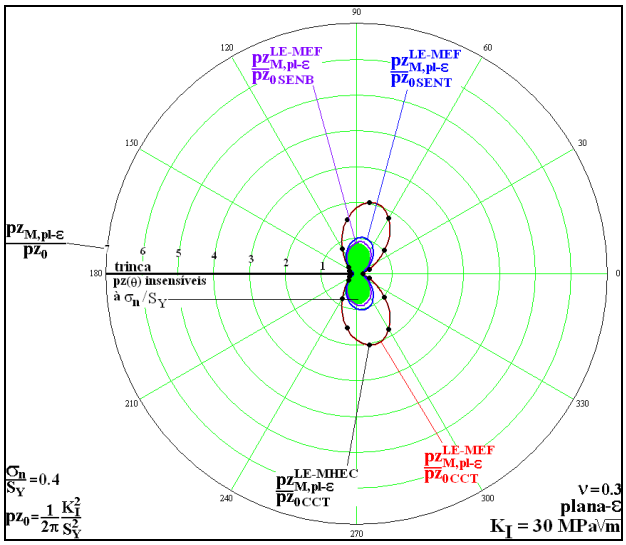


Figura 150 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 151 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$.

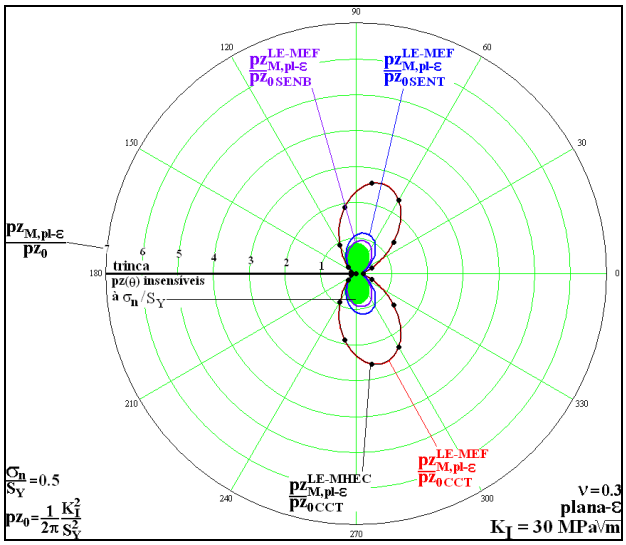


Figura 151 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$.

A Figura 152 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$.

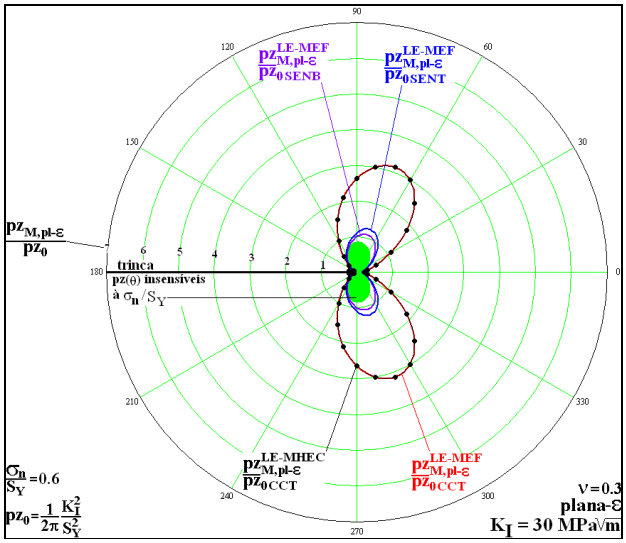


Figura 152 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

A Figura 153 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$.

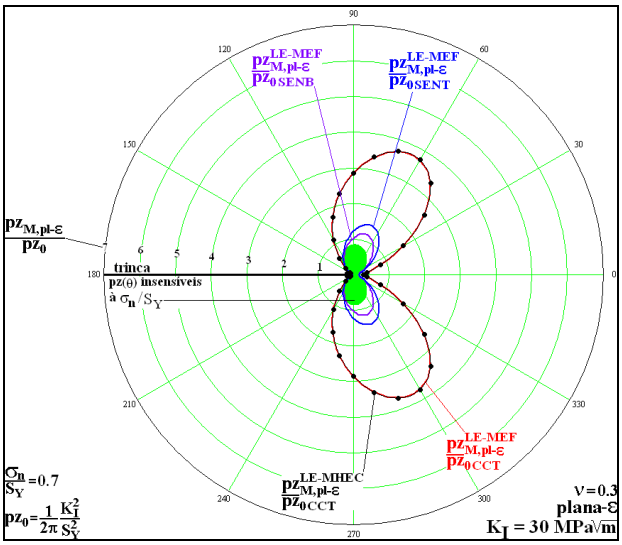


Figura 153 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$.

A Figura 154 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$.

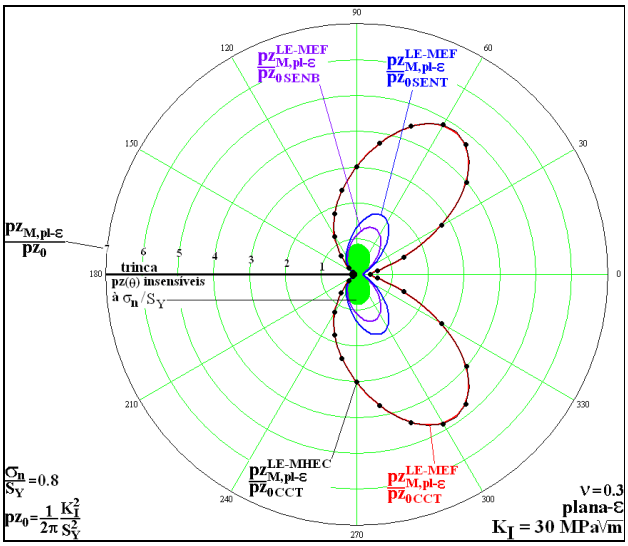


Figura 154 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$.

A Figura 155 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime CCT sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

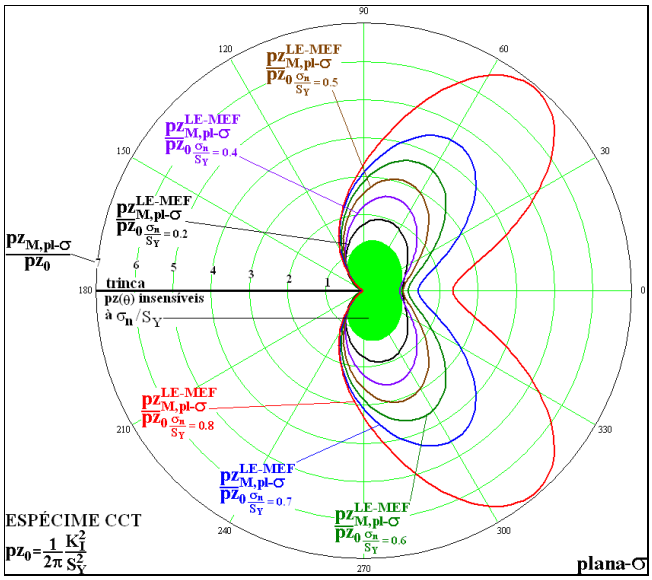


Figura 155 – Zonas plásticas para o espécime CCT obtidas pelo MEF sob tensão plana.

A Figura 156 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime CCT sob deformação plana para σ_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

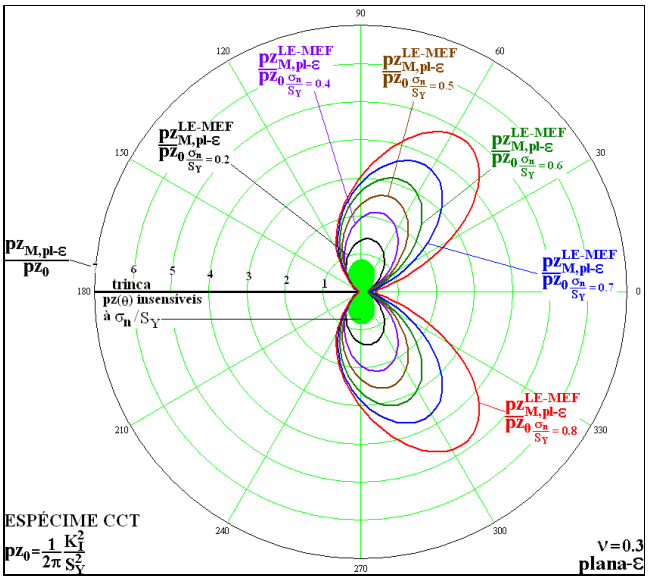


Figura 156 – Zonas plásticas para o espécime CCT obtidas pelo MEF sob deformação plana.

A Figura 157 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime SENT sob tensão plana para σ_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

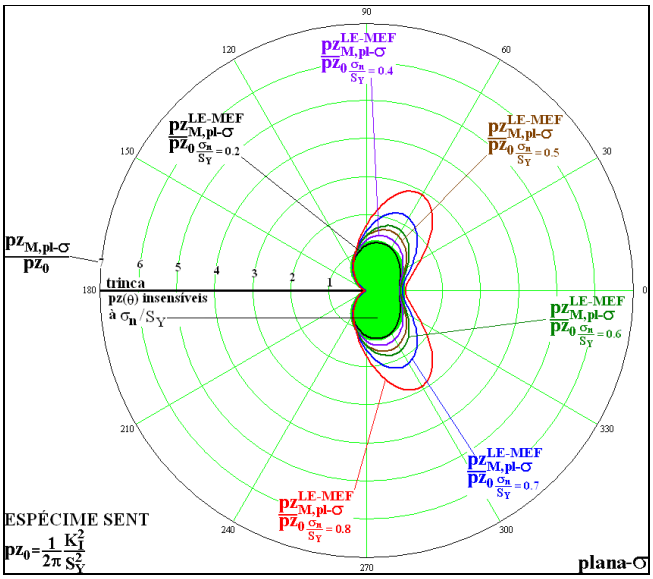


Figura 157 – Zonas plásticas para o espécime SENT obtidas pelo MEF sob tensão plana.

A Figura 158 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime SENT sob deformação plana para σ_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

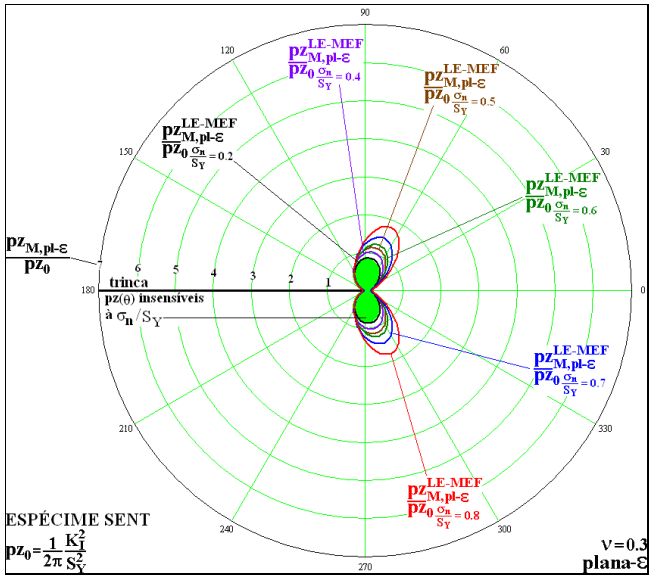


Figura 158 – Zonas plásticas para o espécime SENT obtidas pelo MEF sob deformação plana.

A Figura 159 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime SENB sob tensão plana para σ_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

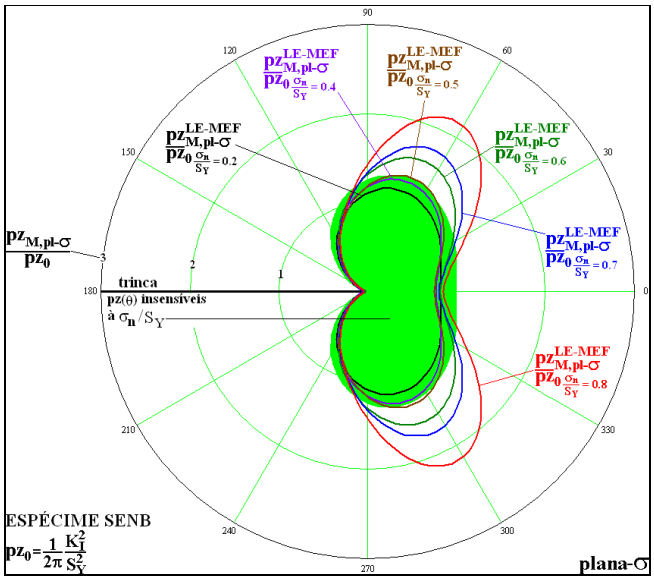


Figura 159 – Zonas plásticas para o espécime SENB obtidas pelo MEF sob tensão plana.

A Figura 160 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime SENB sob deformação plana para σ_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

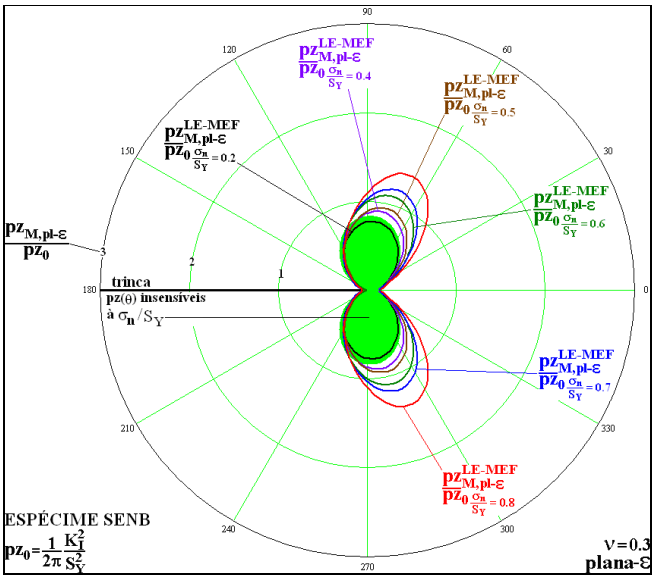


Figura 160 – Zonas plásticas para o espécime SENB obtidas pelo MEF sob deformação plana.

5.8. Conclusões do capítulo

Neste capítulo mostrou-se o uso de dois métodos numéricos diferentes para estimar as zonas plásticas lineares elásticas (LE). Exceto para níveis bem grosseiros de refinamentos de malha, tanto o Método dos Elementos de Finitos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA

(MEF) quanto o Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC) são ferramentas poderosas para estimar as zonas plásticas LE.

As estimativas das $pz(\theta)_M$ geradas pela função de tensão de Westergaard obtidas para o caso da placa de Griffith foram reproduzidas pelo MHEC, ratificando a ineficiência dos campos de tensões LE gerados a partir de K_I e de K_I mais *T-stress* para estimar $pz(\theta)_M$ para altos valores de σ_n/S_Y. Foi mostrado, para o exemplo da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração, que os campos de tensões obtidos numericamente pelo MHEC geram zonas plásticas sensíveis ao nível de σ_n/S_Y, ao tipo de carregamento e aos parâmetros geométricos, como a relação de a/W, diferentemente do que acontece quando se utiliza o campo de tensões LE gerados por K_I.

Este capítulo também estudou as estimativas das zonas plásticas de três espécimes diferentes sob um mesmo K_I para um determinado valor de σ_n/S_Y. Foi mostrado que para baixos valores de σ_n/S_Y, $\sigma_n/S_Y < 0{,}5$; as zonas plásticas dos três espécimes são diferentes, mas bem próximas das zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões determinado por K_I. Contudo, a medida que a relação σ_n/S_Y cresce, as zonas plásticas dos três espécimes começam a ficar cada vez mais diferentes entre si e maiores que a zona plástica obtida pelo campo de tensões obtido por K_I. Nesse mesmo exemplo se mostrou os efeitos de σ_n/S_Y para os três espécimes.

De forma similar ao que foi feito Capítulo 3, todas as zonas plásticas estimadas neste capítulo apresentam tensões maiores que a tensão de escoamento em seus interiores. Dessa maneira, o próximo capítulo mostra, apenas para o caso de materiais perfeitamente plásticos, o tratamento numérico para considerar a correção da singularidade no campo de tensões LE. Esse tratamento é similar ao que foi feito no Capítulo 4 para o caso em que o campo de tensões é obtido analiticamente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0710941/CA