

## 4

### **Propostas de correções das zonas plásticas obtidas linearmente para levar em consideração os efeitos do escoamento do material**

Como dito no capítulo anterior, as zonas plásticas estimadas pela truncamento do campo de tensões linear elástico gerado pela função de tensão de Westergaard, pela série de Williams, pelo  $K_I$  ou pelo  $K_I$  mais a  $T$ -stress não correspondem à realidade, pois o campo de tensões não pode ser singular na ponta da trinca. Com a tentativa de contornar essa limitação da solução linear elástica, este capítulo apresenta propostas de correções das zonas plásticas obtidas pelo truncamento do campo de tensões lineares elásticos que consideram o escoamento e o encruamento dos materiais. Dessa maneira, este capítulo é dividido em três seções. A primeira seção aborda o caso em que se trata apenas os materiais perfeitamente plásticos. A segunda seção apresenta as propostas de correções que tentam levar em conta os efeitos do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas. A terceira seção apresenta as conclusões do capítulo.

#### **4.1. Correção das zonas plásticas em que se considera materiais perfeitamente plásticos**

Esta seção é dividida em sete subseções. A primeira subseção mostra a proposta de correção feita por Irwin (1958) em que se utiliza a componente  $\sigma_{yy}$  gerada a partir do campo tensões obtidos por  $K_I$  e é feita apenas para a direção paralela ao plano da trinca. A segunda subseção apresenta a proposta feita por Rodriguez (2007), em que se usa a componente  $\sigma_{yy}$  gerada a partir do campo tensões obtidos pela função de tensão de Westergaard e é feita para todas direções ( $0^\circ < \theta < 360^\circ$ ). A terceira subseção apresenta uma discussão sobre a proposta feita por Rodriguez. A quarta subseção apresenta uma proposta de correção similar à que foi feita por Rodriguez. A diferença consiste na utilização da tensão equivalente de Mises em vez da componente  $\sigma_{yy}$ . Também fundamentada na proposta da Rodriguez, a quinta subseção mostra a proposição de uma correção

que considera a componente vertical da força de superfície. A sexta subseção apresenta uma proposta de correção em que se considera uma razão constante para ser acrescentada a zona plástica linear elástica original. Por último, a sétima subseção apresenta os efeitos de cada tipo de correção para o caso da placa de Griffith para os dois estados planos.

#### 4.1.1. Correção em que se considera a componente $\sigma_{yy}$ gerada pelo campo de tensões obtido por $K_I$ para $\theta = 0$ – Irwin (1958)

É importante ressaltar que esta subseção foi baseada no trabalho original de Irwin (1958). Entretanto, Castro & Meggiolaro (2009) também fazem uma apresentação da ideia feita por Irwin.

Ao se truncar o campo de tensões linear elástico, que é singular, à tensão de escoamento ( $S_Y$ ) sem se considerar os efeitos das tensões que ultrapassam o valor de  $S_Y$ , impede-se que a integral da componente  $\sigma_{yy}(x, 0) = K_I / \sqrt{2\pi x}$  no ligamento residual da peça reproduza o carregamento que originou  $K_I$ . Por esse motivo e por reconhecer que a zona plástica linear elástica truncada deveria aumentar de tamanho para garantir o equilíbrio de forças, Irwin (1958) estimou uma nova zona plástica,  $pz_{Irw}$ , denominada neste trabalho de zona plástica equilibrada.

Em seu trabalho, Irwin (1958) desprezou o efeito do encruamento ao supor que a componente  $\sigma_{yy}$  tem valor constante dentro da nova zona plástica igual a  $\kappa_1 \cdot S_Y$ , em que  $\kappa_1$  é uma constante que depende do estado plano dominante. Ao longo do ligamento residual e fora da  $pz_{Irw}$ , Irwin fez uma translação do campo de tensões no plano da trinca de um valor igual a  $x_1$ , em que  $x_1$  é a distância entre a ponta de trinca e o ponto no eixo  $x$  no qual a solução original previa  $\sigma_{yy}(x_1, 0) = \kappa_1 \cdot S_Y$ , ou seja,  $x_1 = pz\theta$ . Dessa maneira, o valor de  $x_1$  deve ser calculado para equilibrar os esforços que atuam no ligamento residual da peça trincada, fazendo com que a integral da tensão  $\sigma_{yy}(x, 0) = K_I / \sqrt{2\pi x}$  linear elástica original ao longo de  $x$  seja igual à área formada entre  $S_Y \cdot pz_{Irw}$ , que considera o escoamento (sem encruamento) e limita as tensões na  $pz_{Irw}$ , como mostrado na Figura 68.

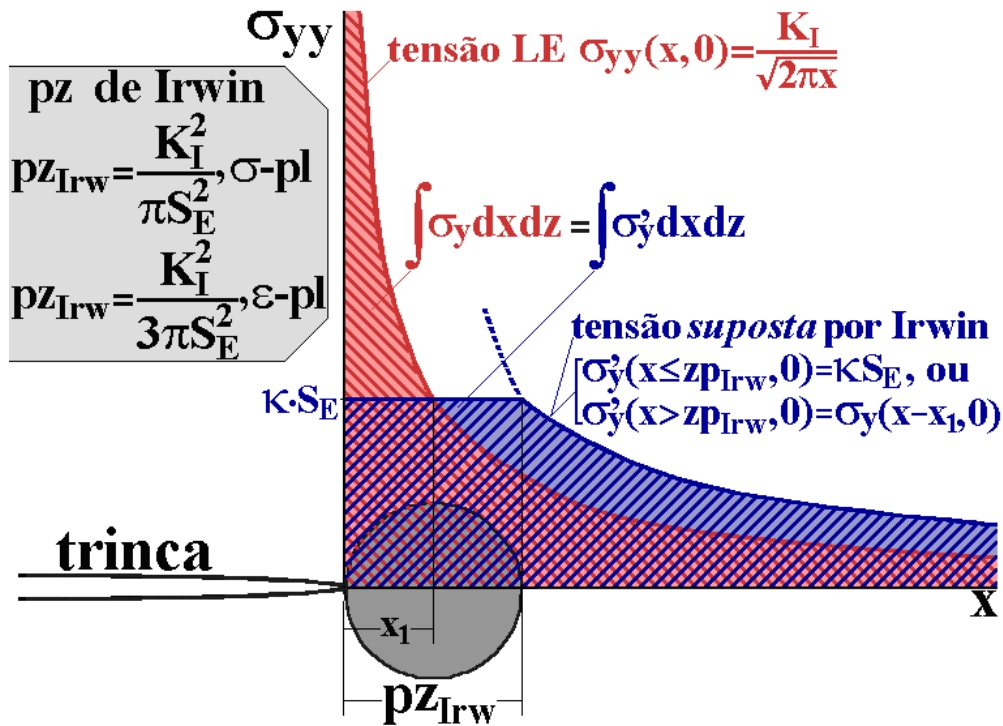


Figura 68 – Comparação entre a componente  $\sigma_{yy}(x, 0)$  gerada por  $K_I$  e a componente  $\sigma_{yy}(x-x_1, 0)$  gerada por  $K_I$  e transladada de  $x_1$  (adaptada de Castro & Meggiolaro, 2009).

O valor de  $pz_{Irw}$  pode ser determinado a partir das componentes de tensão  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  transladadas de  $x_1$  para ambos os estados planos. Considerando o estado plano de tensão e igualando-se a tensão equivalente de Mises à  $S_Y$ , tem-se que:

$$S_Y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-x_1)}}. \quad (55)$$

O valor de  $x$  determinado na Eq. (55) equivale a nova zona plástica estimada por Irwin (1958). Após algumas poucas operações na Eq. (55), é possível se obter a Eq. (56):

$$\frac{K_I^2}{S_Y^2} = 2\pi x - 2\pi x_1. \quad (56)$$

Ao se isolar  $x$  na Eq. (56) e lembrando que  $x_1$  é igual à  $pz_0$  e que  $pz_0 = (K_I^2 / (2\pi S_Y^2))$ , tem-se que:

$$x = 2pz_0 \therefore pz_{Irw} = 2pz_0. \quad (57)$$

Portanto, a nova zona plástica estimada por Irwin,  $pz_{Irw}$ , prevê uma zona plástica que é o dobro do tamanho da zona plástica prevista originalmente,  $pz_0$  para a direção paralela ao plano da trinca ( $\theta = 0^\circ$ ).

#### 4.1.2. Correção feita para todas as direções em que se considera a componente $\sigma_{yy}$ gerada pelo campo de tensões obtido pela função de tensão de Westergaard – Rodriguez (2007)

Rodriguez (2007) propôs uma forma alternativa para corrigir as zonas plásticas obtidas da solução linear a partir da translação da componente  $\sigma_{yy}$  de um valor  $r_1$ , igual ao que foi feito por Irwin (1958). Outra semelhança com o trabalho de Irwin, foi que Rodriguez analisou apenas o caso da placa de Griffith uniaxialmente carregada. Entretanto, Rodriguez utilizou o campo de tensões linear elástico gerado a partir da função de tensão de Westergaard. Além de usar o campo de tensões gerado a partir da função de tensão de Westergaard, Rodriguez tentou estender as correções para todas as direções do plano ( $0^\circ < \theta < 360^\circ$ ). Como o exemplo estudado por Rodriguez foi o da placa de Griffith uniaxialmente carregada, ele considerou apenas a componente  $\sigma_{yy}$  para a correção.

A correção proposta por Rodriguez (2007) pode ser melhor compreendida pela Figura 69.

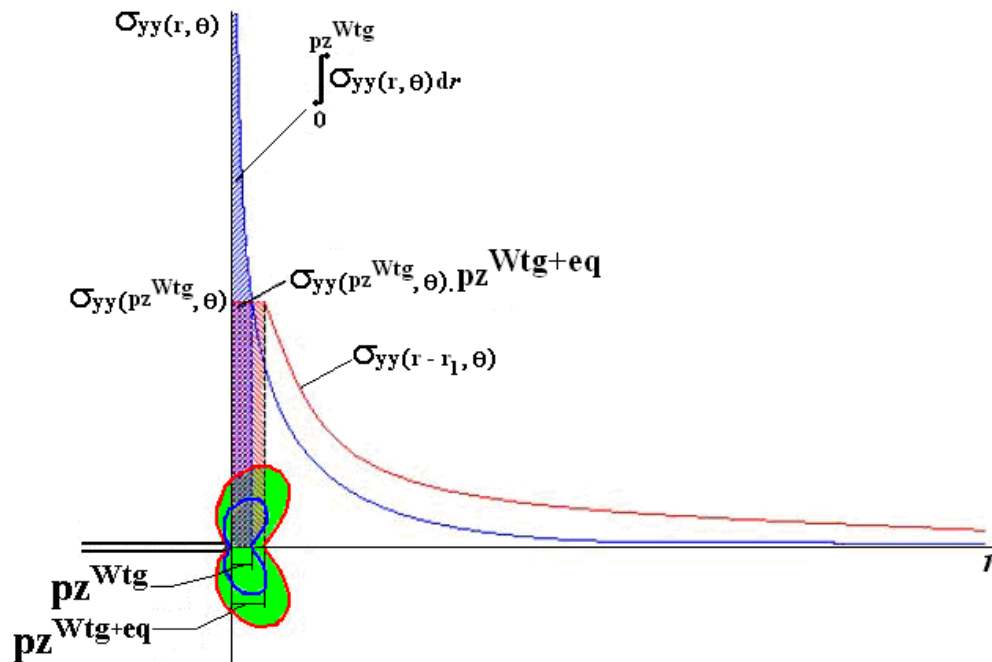


Figura 69 – Comparação entre a componente  $\sigma_{yy}(x, 0)$  gerada pela função de tensão de Westergaard e a componente  $\sigma_{yy}(r-r_1, 0)$  gerada pela função de tensão de Westergaard e transladada de  $r_1$  (adaptada de Rodriguez, 2007).

Ao se igualar as duas áreas hachuradas na Figura 69, obtém-se a Eq. (58):

$$\sigma_{yy}(p_{z_M}^{Wig}(\theta), \theta) p_{z_M}^{Wig+eq\sigma_y}(\theta) = \int_0^{p_{z_M}^{Wig}(\theta)} \sigma_{yy}(r, \theta) dr. \quad (58)$$

A partir da Eq. (58), a zona plástica corrigida por Rodriguez pode ser obtida pela Eq. (59):

$$p_{z_M}^{Wig+eq\sigma_y}(\theta) = \frac{\int_0^{p_{z_M}^{Wig}(\theta)} \sigma_{yy}(r, \theta) dr}{\sigma_{yy}(p_{z_M}^{Wig}(\theta), \theta)}. \quad (59)$$

Essa correção pode ser vista como uma tentativa de generalizar a correção feita por Irwin na direção paralela ao plano da trinca ( $\theta = 0$ ), que é baseada no equilíbrio das forças verticais que geram tensões singulares no interior das zonas plásticas. Entretanto alguns pontos devem ser ressaltados na correção feita por Rodriguez (2007), conforme é discutido na próxima subseção.

#### 4.1.3. Discussão sobre a proposta de Rodriguez

O argumento de Rodriguez (2007) para validar sua proposta de correção da zona plástica, que não foi devidamente explicado em seu trabalho, é baseado nos seguintes fatos. Primeiro, como o carregamento é uniaxial, considera-se apenas o equilíbrio das forças geradas pela tensão  $\sigma_{yy}$ . Além disso, tendo-se o campo de tensões representado  $K_I$ , Eq. (2), percebe-se que a razão entre as tensões,  $\sigma_{xx}/\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{yy}/\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{xy}/\sigma_{xx}$  é mantida constante para um determinado  $\theta$ , independentemente do valor do raio. Por esse fato, Rodriguez argumenta que ao se usar apenas  $\sigma_{yy}$  na correção também se altera as outras componentes devido à razão entre elas permanecer constante.

Em contrapartida ao primeiro argumento de Rodriguez e utilizando-se o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard, a Figura 70 mostra que mesmo que o carregamento seja uniaxial, a trinca gera para  $\theta = 0^\circ$ , singularidades na componente  $\sigma_{xx}$ . Para outros valores de  $\theta$  a singularidade também ocorre na componente  $\sigma_{xy}$ .

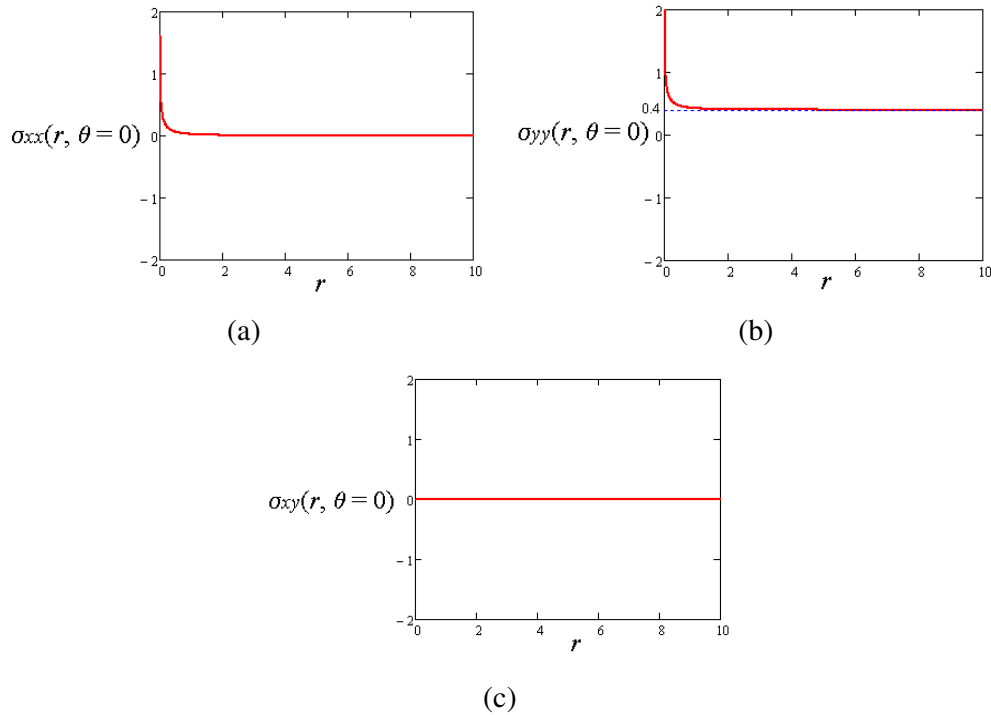


Figura 70 – Mostra os comportamentos: (a) da componente  $\sigma_{xx}(r,0)$ , (b) da componente  $\sigma_{yy}(r,0)$  e (c) da componente  $\sigma_{xy}(r,0)$  na direção paralela ao plano da trinca que são geradas pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard.

Apesar de não ser mostrado neste trabalho, também é importante comentar que essas singularidades presentes nas componentes  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{xy}$  também aparecem quando se utiliza o campo de tensões gerado apenas por  $K_I$ .

Já em relação ao segundo argumento, a afirmação feita é verdadeira apenas quando se usa Eq. (2). Entretanto, quando se utiliza o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard, o argumento de Rodriguez não é verificado. Com objetivo de verificar detalhadamente esse segundo argumento de Rodriguez, nove funções são definidas. As três primeiras dessas funções usam o campo de tensões gerado por  $K_I$  e a componente  $\sigma_{yy}$  no denominador. As outras seis funções utilizam o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard, sendo que três usam a componente  $\sigma_{yy}$  no denominador e as outras três utilizam a tensão equivalente de Mises.

Ao se usar o campo de tensões gerado por  $K_I$  pode-se definir as equações (60), (61) e (62):

$$RK_{S_{xx}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}, \quad (60)$$

$$RK_{S_{yy}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yy}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}, \quad (61)$$

$$RK_{S_{xy}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}. \quad (62)$$

Ao se utilizar o campo tensões gerado pela função de tensão de Westergaard as equações (63), (64), (65), (66), (67) e (68) podem ser definidas:

$$RWtg_{S_{xx}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} = \frac{\operatorname{Re}(Z) - y \operatorname{Im}(Z') - \sigma_n}{\operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z')}, \quad (63)$$

$$RWtg_{S_{yy}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yy}} = \frac{\operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z')}{\operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z')}, \quad (64)$$

$$RWtg_{S_{xy}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} = \frac{-y \operatorname{Re}(Z')}{\operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z')}. \quad (65)$$

$$RWtg_{S_{xx}S_m}(Z(r, \theta)) = \frac{\sigma_{xx}(Z(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))} = \frac{\operatorname{Re}(Z(r, \theta)) - y \operatorname{Im}(Z'(r, \theta)) - \sigma_n}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))}, \quad (66)$$

$$RWtg_{S_{yy}S_m}(Z(r, \theta)) = \frac{\sigma_{yy}(Z(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))} = \frac{\operatorname{Re}(Z(r, \theta)) + y \operatorname{Im}(Z'(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))}, \quad (67)$$

$$RWtg_{S_{xy}S_m}(Z(r, \theta)) = \frac{\sigma_{xy}(Z(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))} = \frac{-y \operatorname{Re}(Z'(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))}. \quad (68)$$

A Figura 71 mostra o comportamento das nove funções definidas acima. Nela é possível ver que o segundo argumento de Rodriguez não vale para o caso em que se usa a função de tensão de Westergaard para representar o campo de tensões. A Figura 71(a) mostra o comportamento das funções obtidas pelas equações (60), (63) e (66). A Figura 71(b) mostra o comportamento das funções obtidas pelas equações (61), (64) e (67). Por último, a Figura 71(c) mostra o comportamento das funções obtidas pelas equações (62), (65) e (68). Na Figura 71, todas as funções são avaliadas para um valor de  $\theta$  igual a  $45^\circ$ .

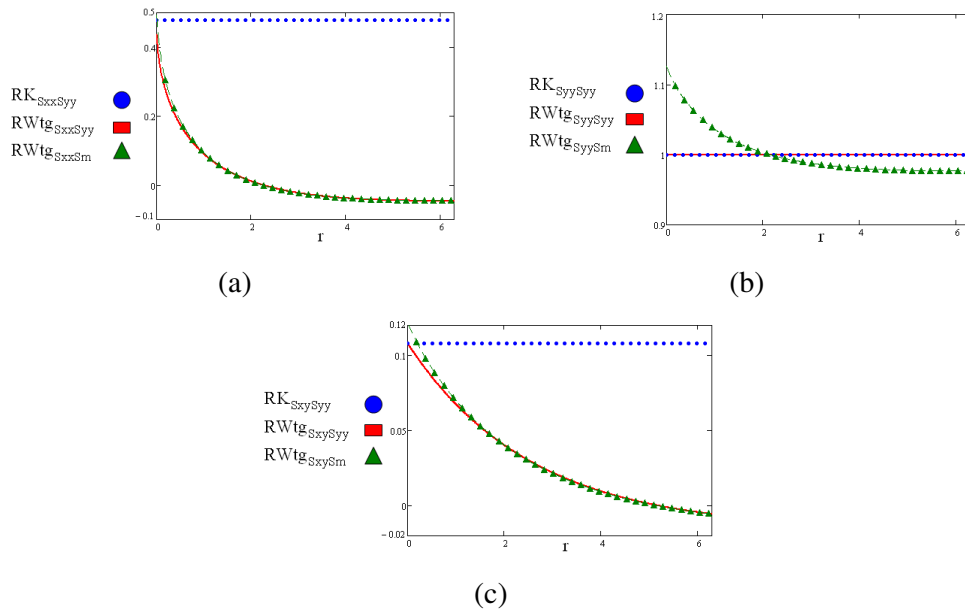


Figura 71 – Mostra os comportamentos: (a) da componente  $\sigma_{xx}(r,0)$ , (b) da componente  $\sigma_{yy}(r,0)$  e (c) da componente  $\sigma_{xy}(r,0)$  na direção paralela ao plano da trinca que são geradas pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard.

Analisando a Figura 70 e a Figura 71 é possível verificar que os argumentos de Rodriguez (2007) não são válidos para todas as situações. Dessa forma este trabalho apresenta, nas próximas subseções, três formas alternativas para as correções das  $pz(\theta)_M$ .

#### 4.1.4. Correção feita para todas as direções em que se considera a componente $\sigma_{Mises}$ gerada pelo campo de tensões obtido pela função de tensão de Westergaard

O principal argumento de Rodriguez (2007) a favor da correção  $pz_M^{Wig+eq\sigma_y}(\theta)$  é que o exemplo estudado por ele apresenta um carregamento uniaxial. Entretanto, como proceder para casos de carregamentos mais complicados como o caso da placa de Griffith carregada biaxialmente, ou o caso de uma placa sob flexo tração? Nesses casos, por que razão seria necessário utilizar apenas a componente  $\sigma_{yy}$  para fazer a correção das zonas plásticas?

Ao se lembrar que o problema de estimar zonas plásticas à frente da ponta de trincas é um problema intrinsecamente não linear e que por isso, qualquer correção dessas zonas plásticas obtidas de uma solução linear serve apenas como uma medida qualitativa, a correção que utiliza a tensão equivalente de Mises pode



ser uma razoável alternativa. Nesta proposta, substitui-se na Eq. (59) a componente  $\sigma_{yy}$  pela tensão equivalente de Mises,  $\sigma_{Mises}$ , conforme mostra a Eq. (69):

$$pz_M^{Wtg+eqM}(\theta) = \frac{\int_0^{pz_M^{Wtg}(\theta)} \sigma_{Mises}(r, \theta) dr}{\sigma_{Mises}(pz_M^{Wtg}(\theta), \theta)}. \quad (69)$$

Como as  $pz_M^{Wtg}(\theta)$  são determinadas para os pontos em que  $\sigma_{Mises}(pz_M^{Wtg}(\theta), \theta) = S_Y$ , a Eq. (69) pode ser reescrita como:

$$pz_M^{Wtg+eqM}(\theta) = \frac{\int_0^{pz_M^{Wtg}(\theta)} \sigma_{Mises}(r, \theta) dr}{S_Y}. \quad (70)$$

A Eq. (70) define as zonas plásticas corrigidas em que se usa  $\sigma_{Mises}$ .

#### 4.1.5. Correção em que se considera um incremento de zona plástica constante nas $pz(\theta)_M$ originais

Nesta correção se utiliza um incremento constante ao longo de cada raio definido para uma direção  $\theta$ . Essa correção pode ser resumida pela Eq. (71):

$$pz_M^{Wtg+eqR}(\theta) = pz_M^{Wtg}(\theta) + \kappa, \quad (71)$$

em que  $\kappa = pz_M^{Wtg+eq\sigma_y}(\bar{\theta}) - pz_M^{Wtg}(\bar{\theta})$  ou  $\kappa = pz_M^{Wtg+eqM}(\bar{\theta}) - pz_M^{Wtg}(\bar{\theta})$ . Nesses dois casos,  $\bar{\theta}$  é um valor conhecido, normalmente igual a zero. Essa constante tem o mesmo sentido de equilíbrio de forças para a direção  $\theta = 0^\circ$ , conforme foi feito por Irwin (1958). Para as outras direções, adota-se o mesmo valor  $\kappa$  de correção. Essa correção possui a vantagem de ser de fácil implementação, pois a integração necessária para determinar  $\kappa$  para  $\theta = 0^\circ$  na Eq. (59) ou Eq. (70) é feita apenas uma vez.

#### 4.1.6. Correção feita para todas as direções em que se considera a força de superfície em que o campo de tensões é obtido pela função de tensão de Westergaard

Esta correção utiliza a componente perpendicular da força de superfície para fazer a correção das  $pz_M^{Wtg}(\theta)$ . Esta correção é mais consistente que a correção de

Rodriguez (2007) por considerar a componente perpendicular à superfície da força de superfície, cuja integral ao longo da área de interesse resulta na força aplicada, diferentemente da simples componente de tensão. Essa correção pode ser resumida pela Eq. (72):

$$pZ_M^{Wig+eqTr}(\theta) = \frac{\int_0^{pZ_M^{Wig}(\theta)} t_{yy}(r, \theta) dr}{t_{yy}(pZ_M^{Wig}(\theta), \theta)}, \quad (72)$$

em que  $t_{yy}$  é determinada pela fórmula de Cauchy, Eq. (73):

$$\begin{Bmatrix} t_{xx}(r, \theta) \\ t_{yy}(r, \theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(r, \theta) & \sigma_{xy}(r, \theta) \\ \sigma_{xy}(r, \theta) & \sigma_{yy}(r, \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix}. \quad (73)$$

#### 4.1.7. Zonas plásticas corrigidas para o caso da placa de Griffith

A comparação de todas as propostas de correções é feita para o exemplo da placa de Griffith. As próximas doze figuras mostram as diferenças em termos de estimativa de zonas plásticas entre cada uma dessas propostas para os dois estados planos. Nessas figuras também se apresentam as zonas plásticas estimadas pelo truncamento da tensão equivalente de Mises, que é gerada pelo campo de tensões obtido pelo  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $T$ -stress e pela função de tensão de Westergaard.

Em ambos os casos planos, as zonas plásticas corrigidas aumentam de tamanho. Esse fato já era esperado, pois ao se considerar um material perfeitamente plástico e ao se limitar as tensões dentro das zonas plásticas à tensão de escoamento, uma quantidade maior de material deve deformar plasticamente, o que faz com que as zonas plásticas aumentem de tamanho.

Em ambos os estados planos e para todos os casos de  $\sigma_r/S_Y$ , as estimativas  $pZ_M^{Wig+eq\sigma_y}$  são bem próximas das estimativas  $pZ_M^{Wig+eqTr}$ . Essas duas estimativas são, em geral, o dobro das zonas plásticas  $pZ_M^{Wig}$ . As estimativas  $pZ_M^{Wig+eqM}$  são um pouco menores as estimativas  $pZ_M^{Wig+eq\sigma_y}$ . As estimativas  $pZ_M^{Wig+eqR}$  são maiores que as estimativas  $pZ_M^{Wig}$  e menores que as estimativas  $pZ_M^{Wig+eqM}$ .

A Figura 72 mostra todas as propostas de correção das  $pZ(\theta)_M$  com  $\sigma_r/S_Y = 0,2$  para o caso plano de tensão.

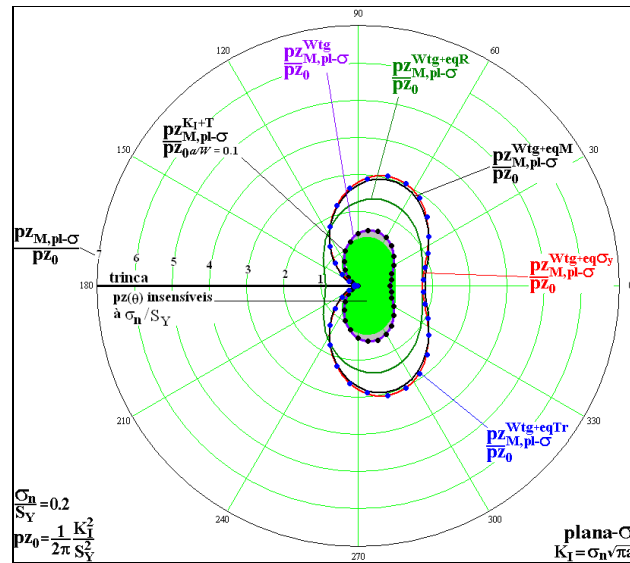


Figura 72 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 73 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso plano de tensão.

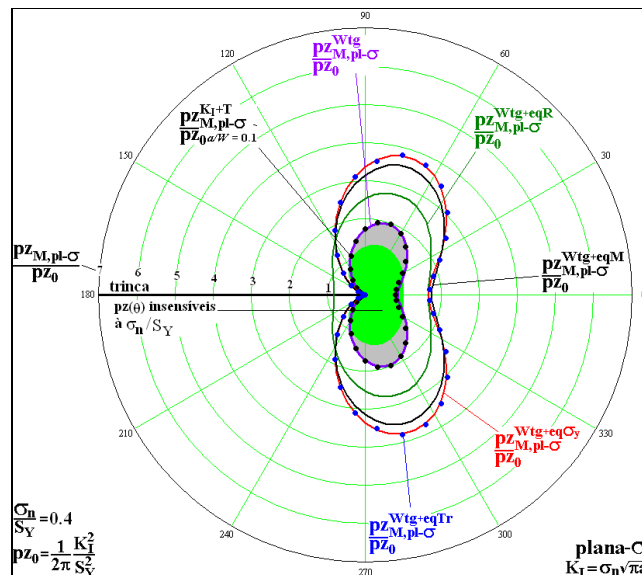


Figura 73 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 74 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

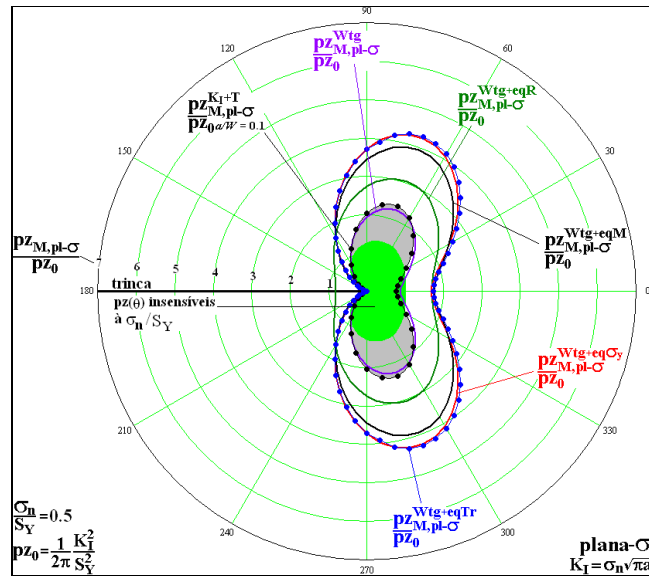


Figura 74 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 75 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

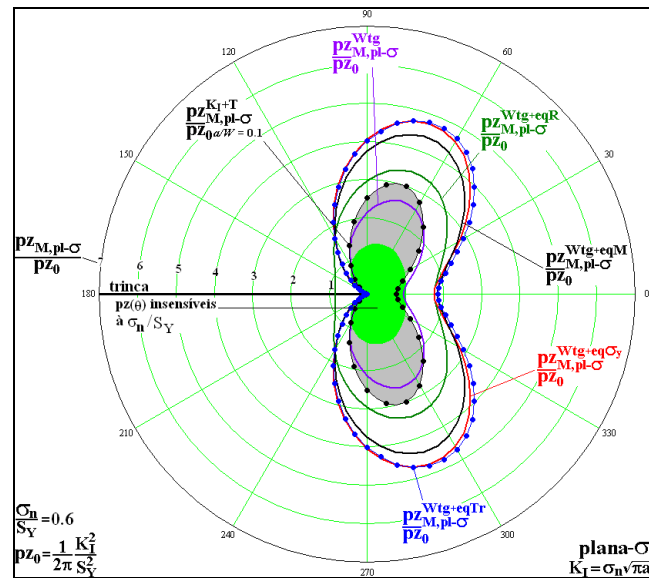


Figura 75 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 76 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

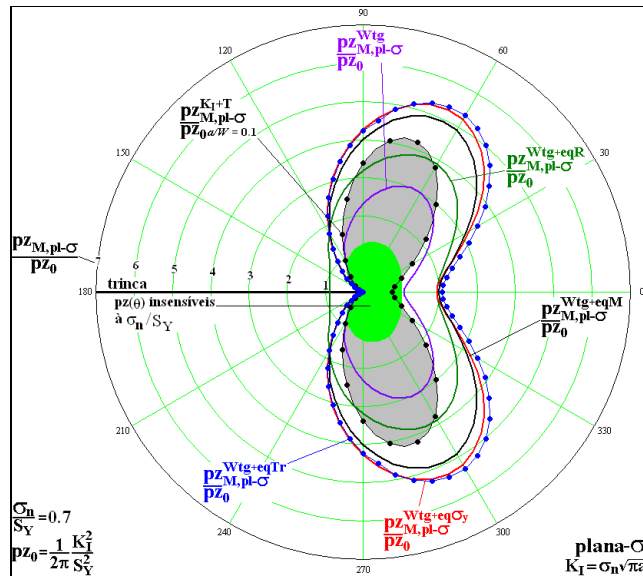


Figura 76 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 77 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

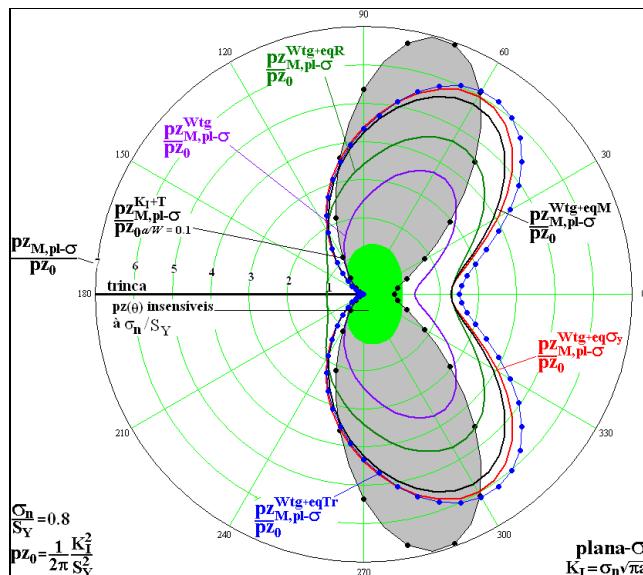


Figura 77 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 78 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

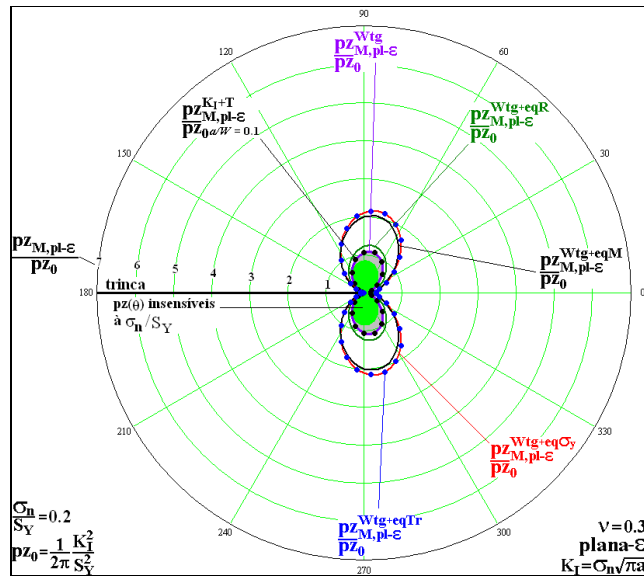


Figura 78 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 79 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

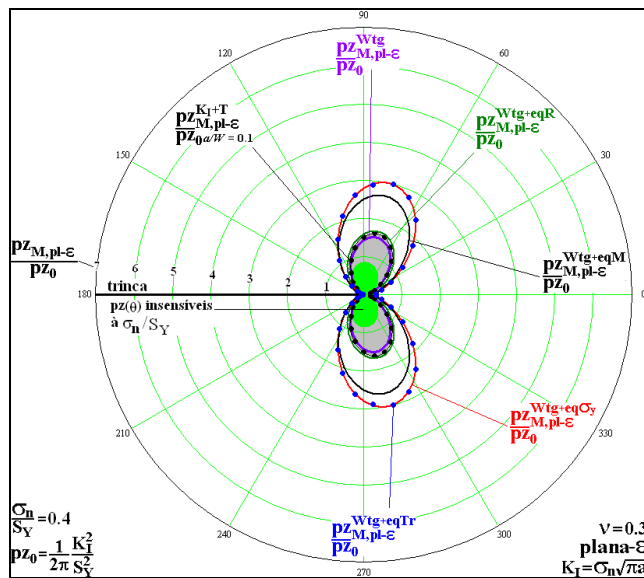


Figura 79 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 80 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

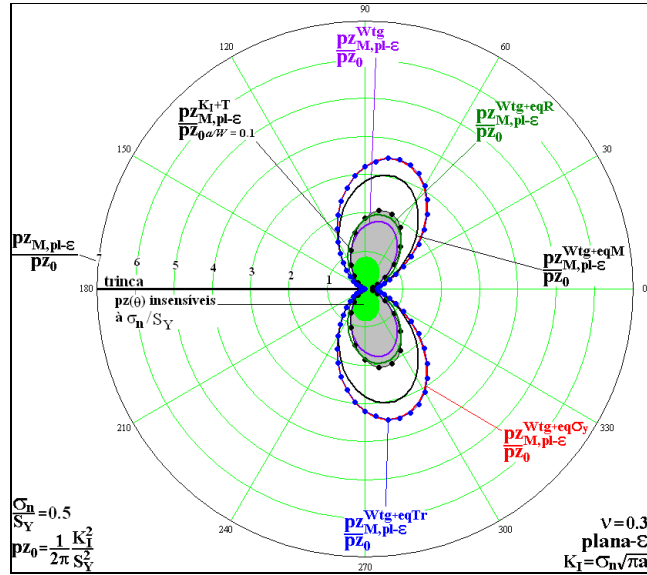


Figura 80 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 81 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

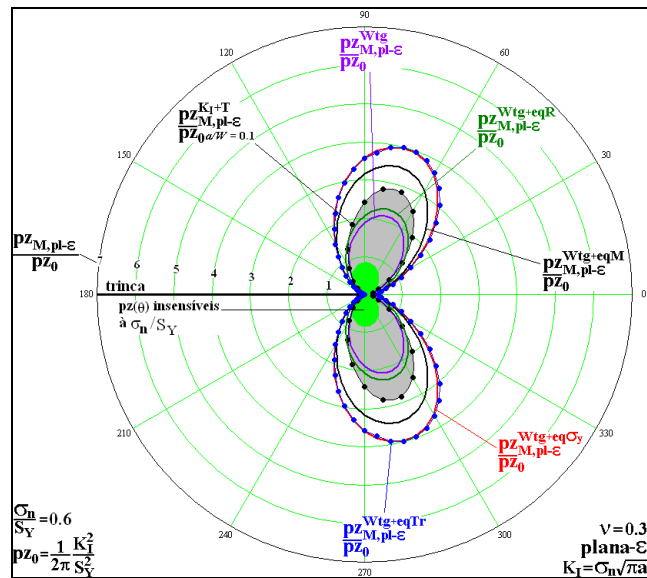


Figura 81 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 82 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

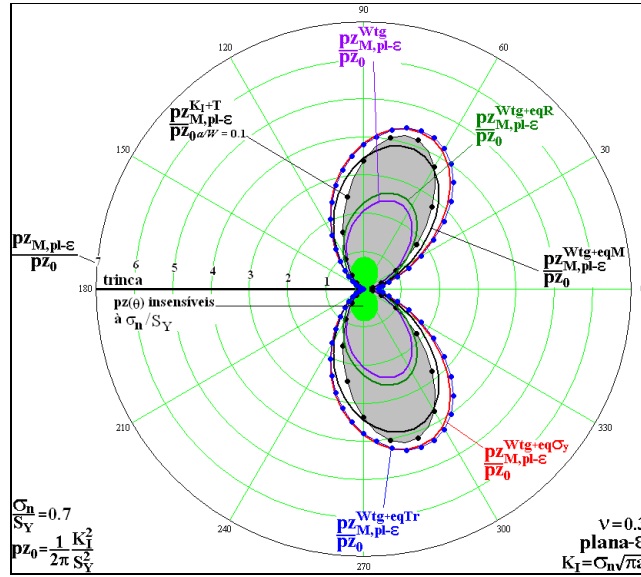


Figura 82 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 83 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

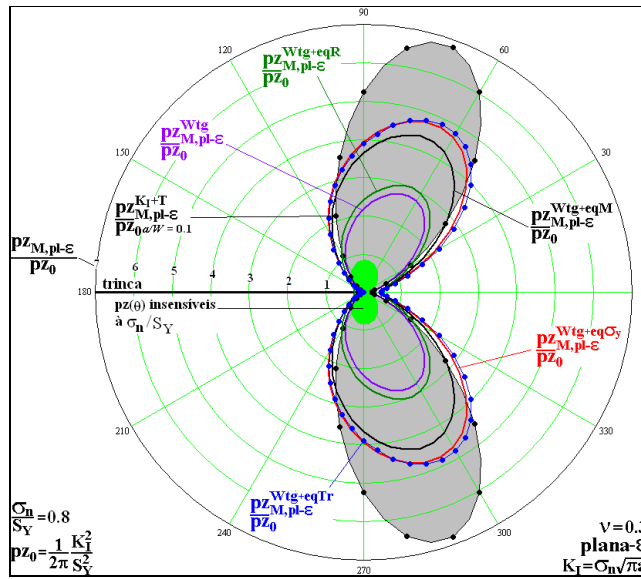


Figura 83 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso da placa de Griffith.



## 4.2. Proposta de correção para levar em consideração o efeito do encruamento do material

Esta seção tem três subseções. A primeira subseção mostra duas propostas de correção das zonas plásticas em que se utiliza o campo de tensões gerado por  $K_I$ . A segunda subseção mostra uma proposta de correção em que se usa o campo de tensões obtido a partir da função de tensão de Westergaard. A terceira subseção apresenta o caso da placa de Griffith em que se mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  obtidas a partir da proposta de correção que usa uma relação exponencial entre a tensão e a coordenada  $r$  (Sousa *et al.*, 2010).

### 4.2.1. Proposta de correção que usa o campo de tensões gerado por $K_I$

Esta subseção é dividida em duas outras subseções. Essas duas subseções mostram as propostas feitas por Kujawaski & Ellyin (1986) para considerar o efeito do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas a partir do uso do  $K_I$  para representar o campo de tensões. A diferença básica entre essas duas propostas está na relação adotada entre tensão e deformação.

#### 4.2.1.1. Proposta que utiliza uma regra exponencial e $K_I$

Esta lei adota a seguinte relação entre tensão e deformação para a fase plástica,  $\sigma_{pl}$  e  $\varepsilon_{pl}$ :

$$\sigma_{pl} = S_Y \left( \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_Y} \right)^{n_e}, \quad (74)$$

em que  $\varepsilon_Y$  é a deformação plástica correspondente ao começo do escoamento,  $n_e$  é o expoente do encruamento e  $S_Y$  é a tensão de escoamento. Kujawaski & Ellyin (1986) utilizaram a Eq. (74) e apresentaram a seguinte expressão para determinar as zonas plásticas:

$$p_{z,KE-Exp} = \frac{K_I^2}{S_Y^2 (1 + n_e) \pi}. \quad (75)$$

#### 4.2.1.2. Proposta que utiliza a equação de Ramberg-Osgood e o $K_I$

Esta estimativa de zona plástica utiliza a equação de Ramberg-Osgood para simular o comportamento do material, de acordo com a Eq. (21). Kujawaski & Ellyin (1986) partiram dessa equação e propuseram a seguinte expressão para a determinação das zonas plásticas:

$$pz_{KE-RO} = \frac{K_I^2}{S_Y^2 (1 + \tilde{n}^2)} \pi, \quad (76)$$

em que

$$\tilde{n} = \frac{1 + n_e \left( \frac{W_0^P}{W_0^E} \right)}{1 + \left( \frac{W_0^P}{W_0^E} \right)}, \quad (77)$$

e

$$W_0^P = \frac{1}{(1 + n_Y)} S_Y \varepsilon_Y \text{ e } W_0^E = \frac{S_Y^2}{2E}. \quad (78)$$

As duas próximas subseções apresentam as propostas de correção das zonas plásticas em que se utiliza o campo de tensões obtido a partir da função de tensão de Westergaard.

#### 4.2.2. Proposta de correção que usa o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard

Esta subseção apresenta a proposta em que se adota uma relação exponencial entre a tensão e a coordenada  $r$  (Sousa *et al*, 2010).

Na realidade, para que se possa levar em consideração os efeitos do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas é necessário que se tenha alguma expressão que relacione deformação e/ou tensão com as coordenadas polares;  $\varepsilon(r, \theta)$  e/ou  $\sigma(r, \theta)$ . Contudo, como este trabalho está usando um campo de tensões para determinar as  $pz(\theta)_M$  a partir do critério de escoamento de Mises para depois corrigir essas  $pz(\theta)_M$  para levar em consideração os efeitos do encruamento, é necessário que se tenha alguma relação  $\sigma(r, \theta)$  estabelecida. Caso se adote alguma relação entre  $\varepsilon(r, \theta)$  e  $r$ , é necessário que utilize uma relação

adicional entre  $\sigma$  e  $\varepsilon$  para que se tenha, posteriormente, a relação  $\sigma(r, \theta)$  desejada.

Ao se adotar esse procedimento de estimativa das  $p_z(\theta)_M$ , que tenta levar em consideração os efeitos do encruamento, espera-se que ao se considerar um material com bastante encruamento as estimativas  $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_M$  reproduzam as estimativas  $p_z(\theta)_M$ . Caso se considere um material perfeitamente plástico, espera-se que as  $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_M$  reproduzam as  $p_z^{\text{Wtg+eq}}_M$ . Em situações intermediárias, espera-se que à medida que o encruamento aumente, as  $p_z^{\text{Wtg+eq}}_M$  sejam cada vez menores, pois o material suportaria tensões maiores dentro das zonas plásticas. Para melhor compreensão das expectativas de comportamento das  $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_M$  e da necessidade que se tem de se obter  $\sigma(r, \theta)$ , apresenta-se a Figura 84.

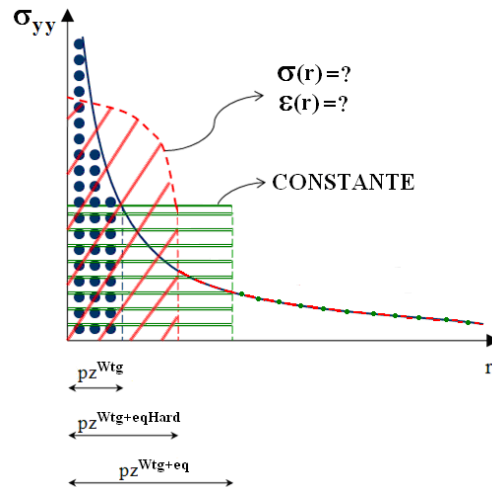


Figura 84 – Comportamento da componente de tensão  $\sigma_y$  e das estimativas  $p_z^{\text{Wtg}}_M$ ,  $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_M$  e  $p_z^{\text{Wtg+eq}}_M$  para um determinado valor de  $\theta$ .

Ao se analisar a Figura 84 é possível perceber que para uma determinada direção  $\theta$ , é necessário que se tenha uma expressão que estabeleça a relação entre a tensão e/ou a deformação em função da coordenada  $r$ . Com base nisso, esta subseção mostra a proposta que utiliza uma relação exponencial entre tensão e a coordenada polar  $r$  ( $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_{\text{Exp}-\sigma, r}$ ), (Sousa *et al*, 2010). Essa proposta pode ser vista pela Eq. (79):

$$\sigma = \alpha r^{1/(1+m)}, \quad (79)$$

em que  $\alpha$  e  $m$  são parâmetros que devem ser ajustados a partir da curva do modelo constitutivo do material.

A Figura 85 mostra como a Eq. (79) simula somente a fase plástica do comportamento do material.

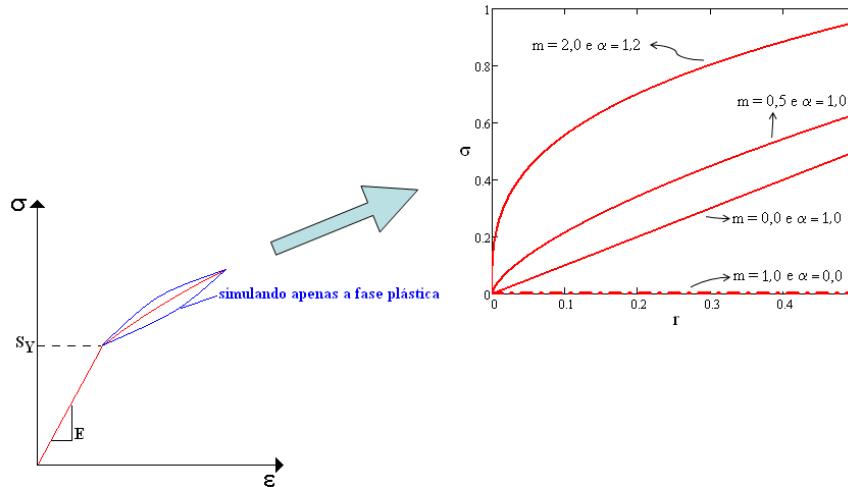


Figura 85 – Simulação da fase plástica de uma material que estabelece uma relação entre tensão e a coordenada polar  $r$  para vários valores de  $m$  e  $\alpha$ .

A hipótese básica nesta proposta é ajustar o modelo idealizado pela Eq. (79), que relaciona tensão ( $\sigma$ ) e posição ( $r$ ), com o comportamento plástico do material, que relaciona tensão ( $\sigma$ ) e deformação ( $\epsilon$ ). Essa hipótese é feita para que se tenha alguma maneira de comparar o modelo representado pela Eq. (79) com algum comportamento real do material. É importante lembrar mais uma vez que essa hipótese, assim como todas as outras correções, é apenas uma maneira qualitativa de se estimar os efeitos do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas.

Como o modelo proposto simula apenas a fase plástica do material, a estimativa  $p z_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  pode ser feita compondo as duas áreas mostradas na Figura 86. Uma das áreas, denominada de  $A_{Linear}$ , é obtida da mesma forma feita por Rodriguez (2007). A outra área, denominada de  $A_{NaoLinear}$ , é obtida pela integração da Eq. (79) de zero até  $p z_M^{Wtg+eqHard}$ . A soma dessas duas áreas deve ser igual à área determinada pela integração da componente  $\sigma_{yy}$  de zero até  $p z_M^{Wtg}$ .

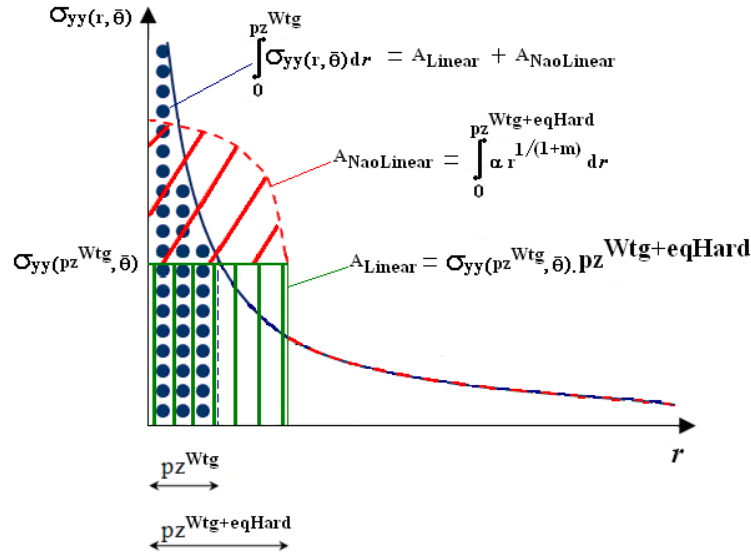


Figura 86 – Determinação da estimativa  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  para um determinado valor de  $\bar{\theta}$  a partir da igualdade entre as áreas em azul pontilhado e  $A_{Total}$ , em que  $A_{Total} = A_{Linear} + A_{NaoLinear}$ .

Ao se expressar a ideia de composição de duas áreas, uma correspondente à parte linear elástica e outra que correspondente à parte plástica, a proposta apresentada nesta subsecção pode ser resumida pela Eq. (80):

$$A_{Total} = A_{Linear} + A_{NaoLinear} = \int_0^{pZ_M^{Wtg}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta) dr, \quad (80)$$

em que

$$A_{Linear} = \sigma_{yy}(\sigma_n, pZ_M^{Wtg}, \theta) pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}, \quad (81)$$

e

$$A_{NaoLinear} = \int_0^{pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}} [\alpha r^{1/(1+m)}] dr, \quad (82)$$

resultando em

$$\begin{aligned} & \sigma_{yy}(\sigma_n, pZ_M^{Wtg}, \theta) pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r} + \int_0^{pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}} [\alpha r^{1/(1+m)}] dr = \\ & = \int_0^{pZ_M^{Wtg}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta) dr \end{aligned} \quad (83)$$

O valor de  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  que satisfizer a Eq. (83) será a zona plástica corrigida que considera os efeitos do encruamento conforme esta proposta.

Apesar de que toda a demonstração feita nesta subsecção tenha utilizado a componente  $\sigma_{yy}$  para fazer a correção das zonas plásticas, é importante ressaltar

que a tensão equivalente de Mises também pode ser usada na correção das zonas plásticas do tipo  $pZ_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$ .

#### 4.2.3. Estimativas dos efeitos do encruamento nas zonas plásticas para o caso da placa de Griffith

Esta subsecção apresenta as zonas plásticas  $pZ_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$  para o exemplo da placa de Griffith para os dois casos planos. Neste exemplo, adota-se um módulo de Young igual a 73 GPa, para seis níveis de  $\sigma_r/S_Y$ , e para dois valores do expoente de encruamento ( $\alpha_e$ ). O coeficiente de encruamento,  $n_e$ , é dado como uma função de  $\alpha_e$ , conforme mostra a Eq. (84):

$$\alpha_e = \left( \frac{1}{0,8} \right)^{1/n_e}. \quad (84)$$

Por simplicidade, somente a proposta  $pZ_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$  e apenas a correção  $\sigma_{yy}$  são utilizadas nesta subsecção. Por causa disso, os resultados deste exemplo são chamados de  $pZ_M^h^{Wig+eqHardExp-\sigma_y}$ , em que o subscrito  $h$  significa o valor de  $\alpha_e$  adotado.

Os valores de  $\sigma_r/S_Y$  testados são: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; e 0,8 para os casos de tensão e de deformação plana. Os valores de  $n_e$  são: 0,1 e 0,3. Os valores de  $m$  e  $\alpha$  do modelo  $pZ_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$ , Eq. (79), são ajustados visualmente a partir do comportamento da equação de Ramberg-Osgood para cada valor de  $n_e$  e  $\alpha_e$ . Para o caso em que  $n_e = 0,1$ , tem-se  $\alpha_e = 9,313$  e  $S_Y = 1,815 \cdot 10^8$  Pa. Para o caso em que  $n_e = 0,3$ ; tem-se  $\alpha_e = 2,104$  e  $S_Y = 7,21 \cdot 10^7$  Pa. O comportamento da equação de Ramberg-Osgood para os dois valores  $n_e$  adotados pode ser visto na Figura 87. Em todos os casos de  $\sigma_r/S_Y$ , mostra-se que para ( $\alpha_e = 0,0$ ) se recai na estimativa que considera materiais perfeitamente plásticos

$$pZ_{M,h=0.0}^{Wig+eqHardExp-\sigma_y} = pZ_M^{Wig+eq\sigma_y}.$$

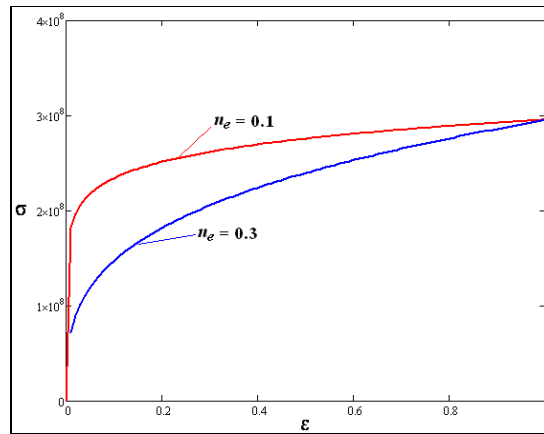


Figura 87 – Comportamento da equação de Ramberg-Osgood para  $\alpha_e = 0,1$  e  $\alpha_e = 0,3$ .

Para utilizar o modelo  $pz_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$  é necessário que se use somente a parte plástica do comportamento da equação de Ramberg-Osgood, conforme mostra a Figura 88.

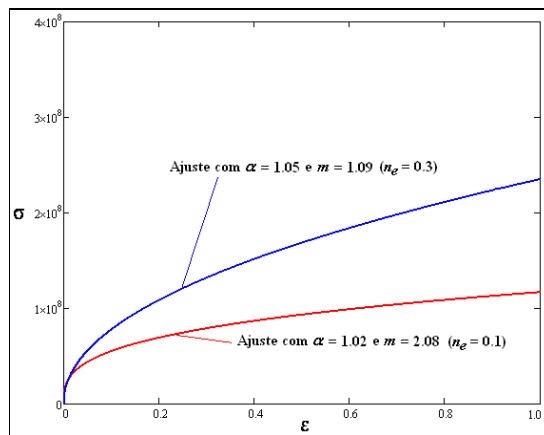


Figura 88 – Comportamento da equação de Ramberg-Osgood sem a parte elástica para  $\alpha_e = 0,1$  e  $\alpha_e = 0,3$ .

A Figura 88 também mostra os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $m$  do modelo  $pz_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$ . De acordo com essa figura, percebe-se que para  $n_e = 0,3$  tem-se um maior encruamento do que para  $n_e = 0,1$ . Dessa forma, esperam-se estimativas  $pz(\theta)_M$  maiores para esse caso do que para  $n_e = 0,3$ . Para o caso em que  $n_e = 0,1$ , tem-se  $\alpha = 1,02$  e  $m = 2,08$ . Para o caso em que  $n_e = 0,3$ , tem-se  $\alpha = 1,05$  e  $m = 1,09$ .

A Figura 89 mostra o ajuste de  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  a partir da equação de Ramberg-Osgood para  $n_e = 0,1$ .

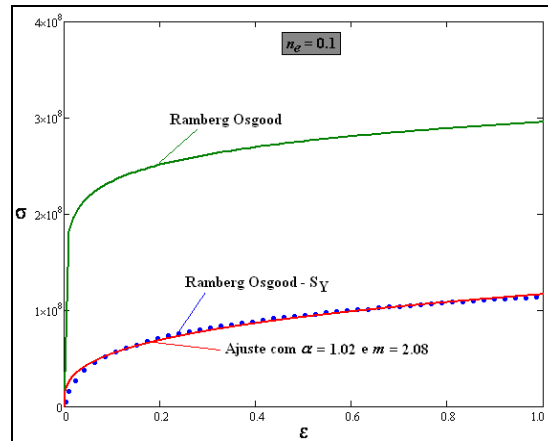


Figura 89 – O ajuste da equação de Ramberg-Osgood para  $\alpha_e = 0,1$ .

A Figura 90 mostra o ajuste de  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  a partir da equação de Ramberg-Osgood para  $n_e = 0,3$ .

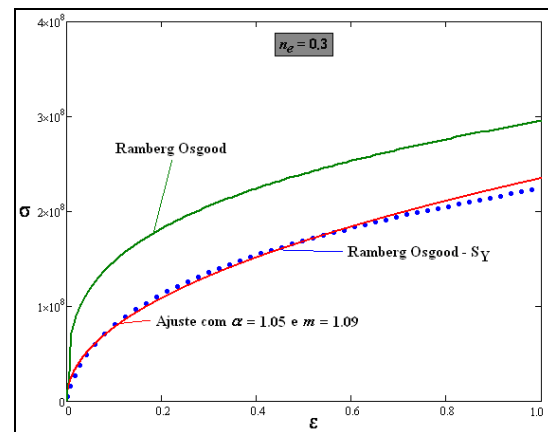


Figura 90 – O ajuste da equação de Ramberg-Osgood para  $\alpha_e = 0,3$ .

Nas próximas doze figuras, é possível observar que as estimativas

$pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$ , que são iguais às estimativas  $pZ_M^{Wtg+eq\sigma_y}$ , são maiores que as

estimativas  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$  e  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$  para os dois estados planos. É

importante observar também que as estimativas  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$  são maiores



que as estimativas  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$ , conforme o esperado. Esse fato também

acontece para os dois estados planos e para todos os valores de  $\sigma_n/S_Y$  adotados.

A Figura 91 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

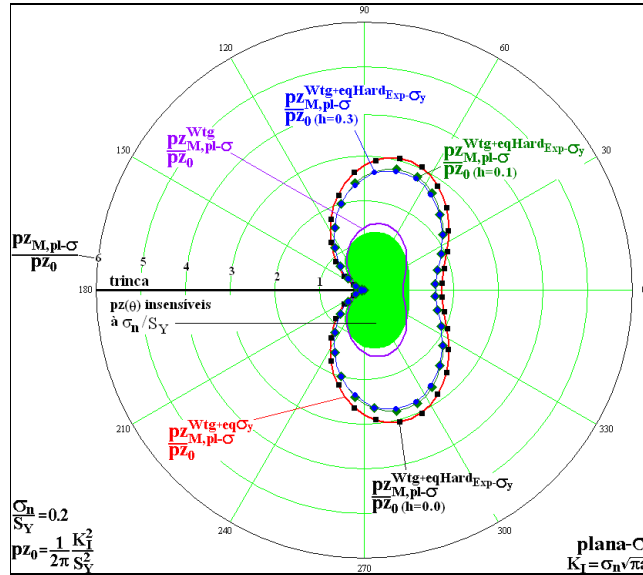


Figura 91 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 92 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

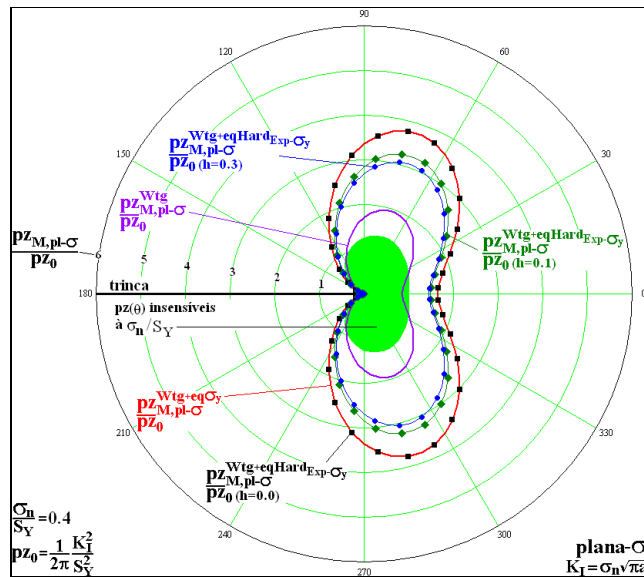


Figura 92 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 93 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

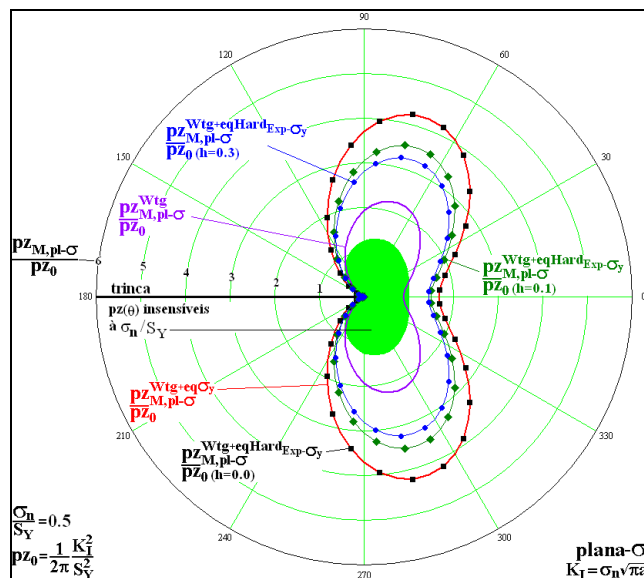


Figura 93 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

A Figura 94 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

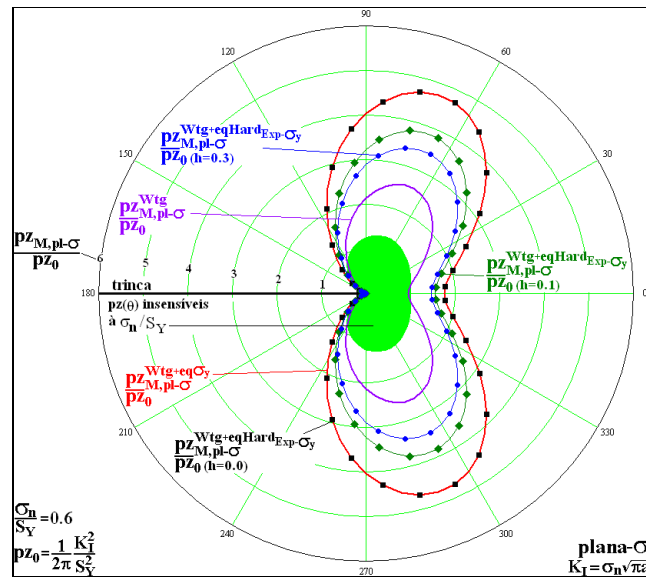


Figura 94 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/\sigma_Y = 0,6$ .

A Figura 95 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/\sigma_Y = 0,7$ .

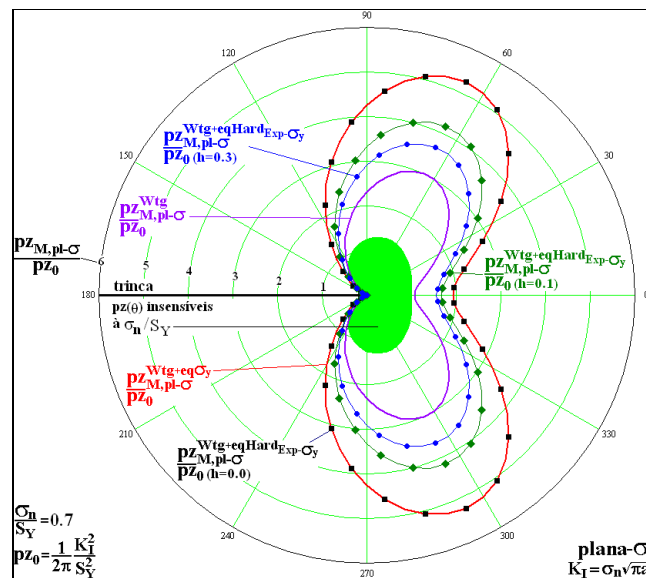


Figura 95 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/\sigma_Y = 0,7$ .

A Figura 96 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/\sigma_Y = 0,8$ .

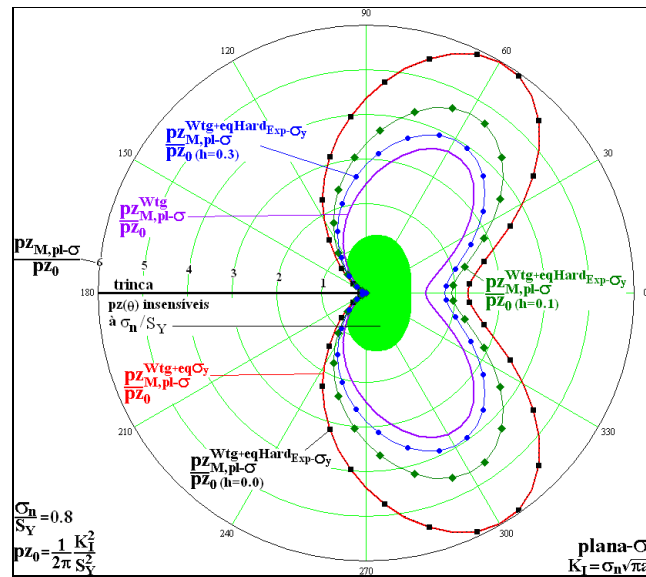


Figura 96 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

A Figura 97 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

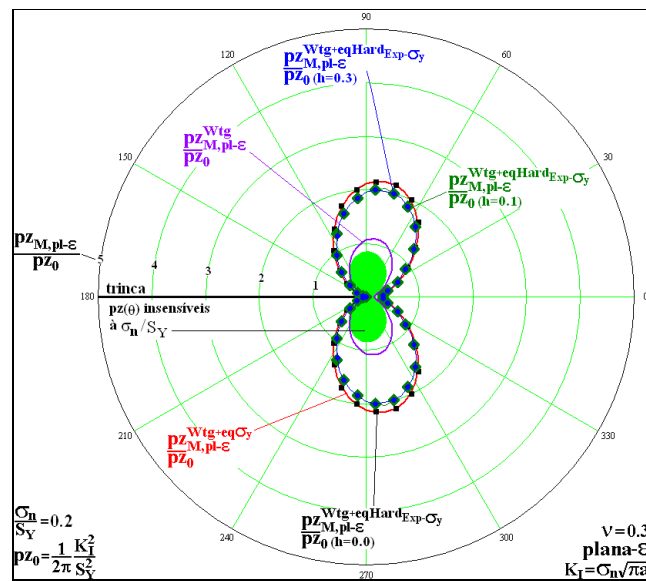


Figura 97 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 98 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

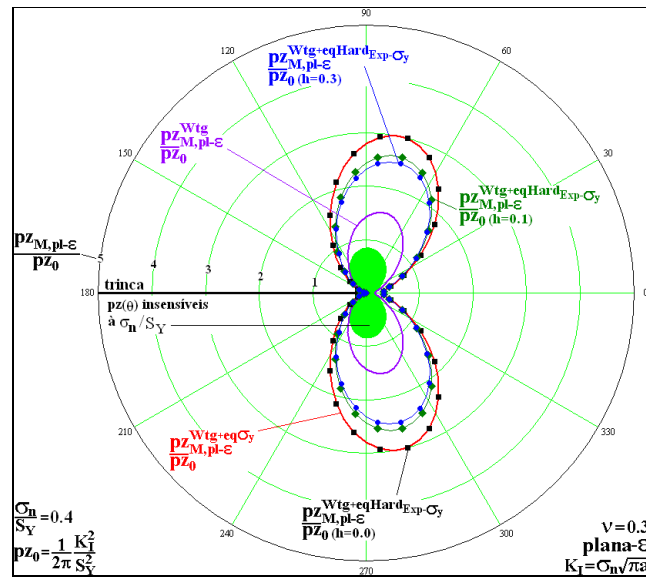


Figura 98 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$ .

A Figura 99 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$ .

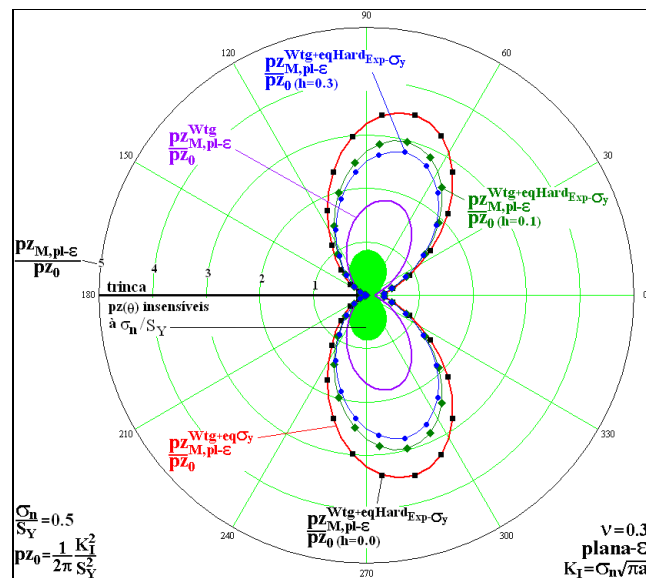


Figura 99 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$ .

A Figura 100 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$ .

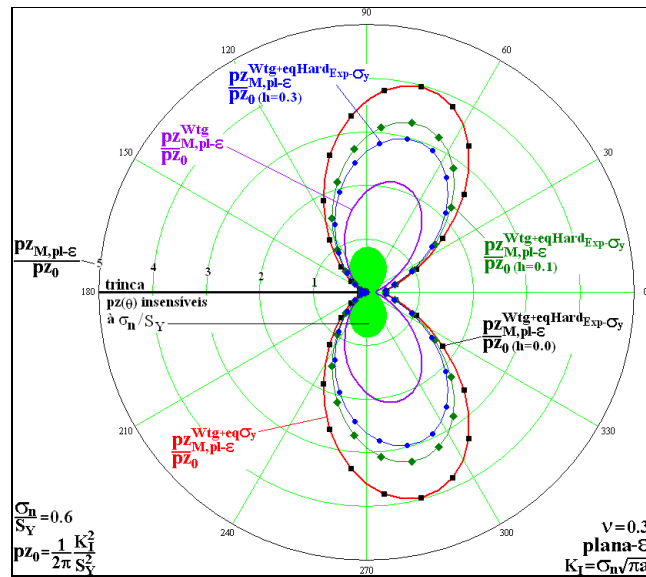


Figura 100 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

A Figura 101 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

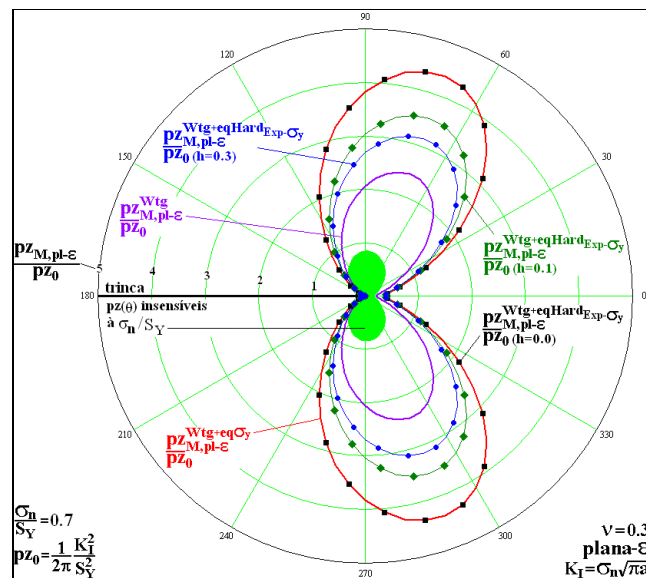


Figura 101 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

A Figura 102 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

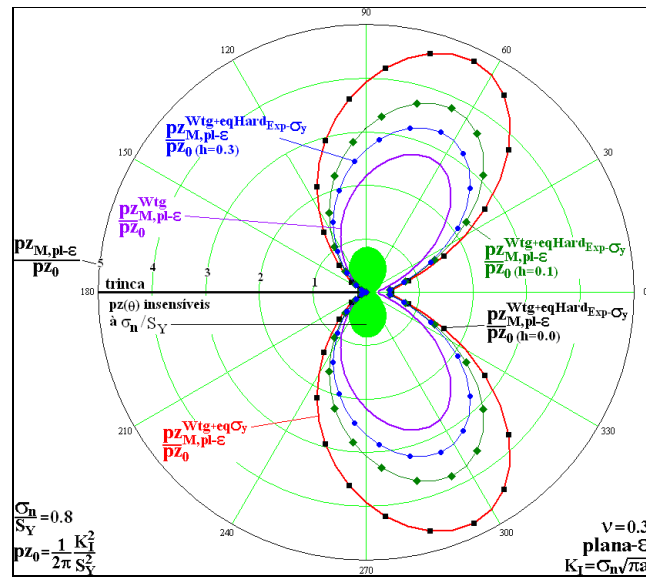


Figura 102 – Comparação entre as  $pZ$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pZ$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$ .

### 4.3. Conclusões do capítulo

Como visto no Capítulo 3, até as zonas plásticas obtidas por campos de tensões lineares elásticos completos não são realistas por não considerarem o escoamento do material. Dessa maneira, este capítulo apresentou, baseado no trabalho pioneiro de Irwin (1958) e no trabalho de Rodriguez (2007), mais três propostas de correção das zonas plásticas lineares elásticas (LE) que consideram materiais perfeitamente plásticos. Em todas essas três propostas, considera-se o campo de tensões gerado a partir de uma função de tensão de Westergaard, conforme foi feito por Rodriguez. A ideia básica dessas correções é de que as forças que estão associadas às tensões superiores ao limite de escoamento do material devem ser redistribuídas, ou seja, devem ser equilibradas. Para que isso possa ocorrer, uma quantidade maior de material deforma plasticamente, fazendo com que as zonas plásticas originais, obtidas pelos campos de tensões LE, dobrem de tamanho, conforme verificado por Irwin. Em seguida, este capítulo apresentou, fundamentado nas ideias de Kujawski & Ellyin (1985), uma proposta de se fazer as correções nas zonas plásticas LE de tal forma que se considere também os efeitos do encruamento do material. Para estudar os efeitos do encruamento nas zonas plásticas, usou-se o caso da placa de Griffith com dois materiais com

comportamentos diferentes (um com maior encruamento do que o outro). Conforme o esperado, o material com maior encruamento apresentou zonas plásticas menores do que o material com o menor encruamento. Isso acontece devido ao fato de que com maior encruamento, o material suporta tensões mais elevadas dentro da zona plástica.

Todas as zonas plásticas corrigidas apresentadas neste capítulo partem de campos de tensões determinados analiticamente. Para os casos em que não se conhece ou em que não se tem um campo de tensões analítico, é imprescindível o uso de ferramentas numéricas. Dessa maneira, o próximo capítulo mostra a estimativa de zonas plásticas obtidas a partir de campos de tensões determinados numericamente. Dois métodos numéricos são usados. O Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC).