

3

Estimativas de zonas plásticas a partir do uso da Mecânica da Fratura Linear Elástica com os campos de tensões obtidos analiticamente

Como visto nos Capítulos 1 e 2, o campo de tensões linear elástico usado na MFLE pode ser gerado por expressões que usam K_I , o que corresponde à utilizar a Eq. (2). Também foi comentado no Capítulo 2 que no caso da placa de Griffith, tanto a função de tensão de Westergaard quanto a série de Williams resultam, após algumas simplificações, no K_I . Entretanto, foi mostrado no Capítulo 1 que ao se utilizar o campo de tensões gerado por K_I as zonas plásticas para o caso da placa de Griffith são insensíveis à relação σ_n/S_Y . Além disso, a resposta esperada para componente σ_{yy} , que deveria tender para a tensão nominal para pontos afastados da frente da trinca, isto é, $\sigma_{yy}(K_I, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = \sigma_n$, não é satisfeita. Em vez disso, o resultado obtido é $\sigma_{yy}(K_I, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = 0$. Por esses motivos, este capítulo avalia as estimativas de zonas plásticas feitas a partir do uso dos campos de tensões obtidos K_I, K_I com adição da T -stress, pela série de Williams e pela função de tensão de Westergaard.

Todas essas informações sobre os campos de tensões e sobre as zonas plásticas obtidas a partir de uma abordagem analítica são tratadas neste capítulo, que é dividido em sete seções. A primeira seção mostra como o campo de tensões é determinado a partir de K_I . A segunda seção apresenta a proposta de estender o uso da MFLE a partir da adição da T -stress na componente σ_{xx} que é obtida a partir do campo de tensões determinado por K_I . A terceira seção explica como obter o campo de tensões a partir da função de tensão de Westergaard. A quarta seção mostra como utilizar a série de Williams para representar o campo de tensões. A quinta seção explica como utilizar o Método dos Mínimos Quadrados para ajustar o campo de tensões obtido pela série de Williams ao campo de tensões determinado pela função de tensão de Westergaard. A sexta seção mostra em termos de estimativa de zonas plásticas como a T -stress corresponde ao primeiro termo constante de ordem zero da série de Williams, e que, por isso

mesmo, não representa a solução completa do campo de tensões. A sétima seção faz alguns comentários importantes sobre as estimativas analíticas das zonas plásticas a partir dos quatro campos de tensões utilizados pela MFLE.

3.1. Campo de tensões gerado a partir de expressões que utilizam o K_I

Ao se usar a Eq. (2) para representar o campo de tensões na placa de Griffith, a resposta esperada para a componente σ_{yy} em regiões longe da ponta da trinca, que é $\sigma_{yy}(K_I, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = \sigma_n$, não é encontrada. Em vez disso, obtém-se $\sigma_{yy}(K_I, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = 0$, o que é um erro. Quanto a estimativa das zonas plásticas, foi visto que elas são insensíveis à relação σ_n/S_Y , conforme se viu na Figura 4 e na Figura 5 do Capítulo 1.

3.2. Campo de tensões gerado a partir de expressões que utilizam K_I com adição da T -stress

Como visto anteriormente no Capítulo 2, o termo T -stress foi proposto primeiramente por Irwin (1958) para ajustar resultados experimentais fotoelásticos feitos por Wells & Post (1958). Larsson & Carlsson (1973), que investigaram os limites recomendados pela ASTM (1970) para o uso de K_I , disseram que a adição da T -stress na componente σ_{xx} ajustava as formas das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise linear elástica com as formas das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise não linear com elementos finitos. A adição da T -stress no campo linear elástico pode ser visto na Eq. (26):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{stress} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

A T -stress pode ser interpretada como o termo constante de ordem zero na série de Williams, conforme é visto na subseção 3.6. Entretanto, apesar de mudar a forma das zonas plásticas e de fazer com que elas fiquem sensíveis à relação σ_n/S_Y , a solução linear elástica gerada por K_I mais T -stress não é completa por não reproduzir as condições de contorno e nem satisfazer a resposta esperada para a

componente σ_{yy} . Como exemplo, cita-se o caso da placa de Griffith em que a resposta $\sigma_{yy}^{\infty} = \sigma_n$ não é encontrada.

Os efeitos da adição da *T-stress* no tamanho e forma das zonas plásticas podem ser vistos no exemplo de um disco circular com uma trinca interna. Esse exemplo mostra que as zonas plásticas obtidas a partir do campo gerado por K_I mais *T-stress* são sensíveis à relação σ_n/S_Y e aos parâmetros geométricos, como a relação entre o comprimento da trinca e o diâmetro do disco.

3.2.1. Disco circular com uma trinca interna

A Figura 8 mostra um disco circular com uma trinca interna de comprimento $2a$ sob uma pressão interna constante de valor igual a σ_n e com um diâmetro igual a $2R$.

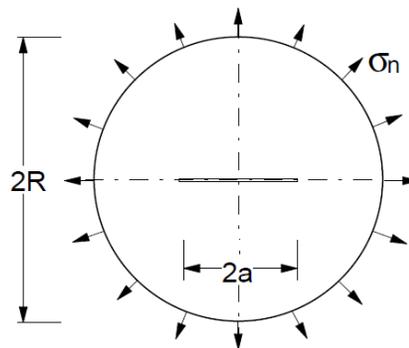


Figura 8 – Disco circular com uma trinca interna (adaptada de Fett, 1998).

Fett (1998) apresentou a Eq. (27) que fornece os valores da *T-stress* para o caso do disco circular com uma trinca interna. Os valores da *T-stress* dependem de σ_n e da relação a/R .

$$T_{stress} = \sigma_n \frac{-1 + a/R - 2.34a/R^2 + 4.27^3 - 3.326a/R^4 + 0.9824^5}{1 - a/R}. \quad (27)$$

Os valores de K_I para o caso do disco circular com uma trinca interna podem ser obtidos por:

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a} F(a/R), \quad (28)$$

em que os valores de $F(a/R)$ são obtidos no trabalho de Tada *et al* (1985), conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Valores de $F(a/R)$ dependentes da relação a/R (Tada *et al.*, 1985).

a/R	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$F(a/W)$	1.000	1.022	1.062	1.135	1.252
a/R	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(a/W)$	1.393	1.513	1.597	2.236	3.036

Os valores de K_I também dependem de σ_n e da relação a/R . Com os valores de K_I obtidos a partir da Tabela 1 e da Eq. (28) somados aos valores da T -stress obtidos pela Eq. (27), pode-se estimar as zonas plásticas para o caso do disco circular com uma trinca interna. As zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ sob a influência de K_I mais T -stress são mostradas na Figura 9 para o caso de tensão plana ($p_z(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I+T}$), para relações de a/R iguais à 0,4 e a 0,5 e para razões de σ_n/S_Y iguais à 0,2 e 0,8.

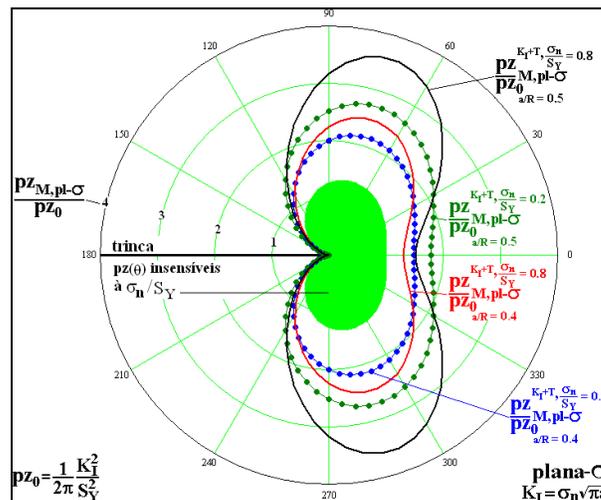


Figura 9 – Zonas plásticas estimadas para o exemplo do disco circular com uma trinca interna, em que o campo de tensões é obtido a partir de K_I mais T -stress, Eq. (26), sob condições de tensão plana ($p_z(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I+T}$).

A Figura 10 refere-se ao caso de deformação plana ($p_z(\theta)_{M,pl-\epsilon}^{K_I+T}$).

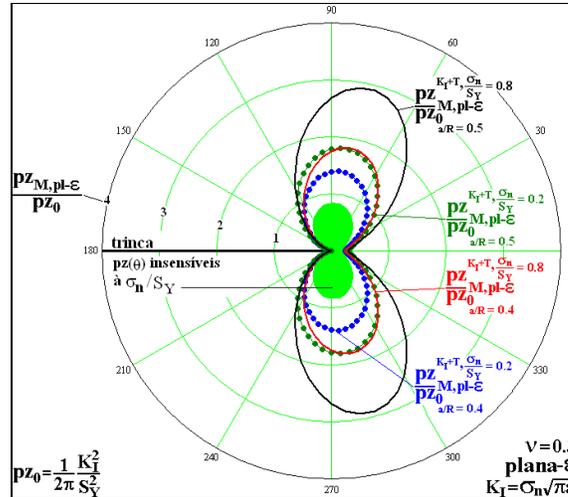


Figura 10 – Zonas plásticas estimadas para o exemplo do disco circular com uma trinca interna, em que o campo de tensões é obtido a partir de K_I mais T -stress, Eq. (26), sob condições de deformação plana $(pz(\theta)_{M,pl-\epsilon}^{K_I+T})$.

Ao se analisar a Figura 9 e a Figura 10, é possível ver que com a adição da T -stress na componente σ_{xx} , as $pz(\theta)_M$ se tornam sensíveis à relação σ_n/S_Y e aos parâmetros geométricos. O efeito de σ_n/S_Y pode ser visto ao se fixar $a/R = 0,4$ ou $0,5$. Em seguida, para cada valor de a/R adotado, aumenta-se σ_n/S_Y de $0,2$ a $0,8$. De maneira semelhante, o efeito de a/R pode ser visto ao se fixar $\sigma_n/S_Y = 0,2$ ou $0,8$. Em seguida, aumenta-se a/R de $0,4$ a $0,5$. Tem-se como resultado, que as zonas plásticas aumentam tanto com o aumento de σ_n/S_Y quanto com o aumento de a/R , conforme foi observado por Irwin (1958).

3.3. Campo de tensões gerado a partir da função de tensão de Westergaard

De acordo com a revisão bibliográfica feita neste trabalho, apenas dois tipos de funções de tensão de Westergaard foram encontradas. Uma para o caso da placa de Griffith, que foi mostrada na Eq. (15) e outra para o caso de uma placa retangular semi infinita com uma trinca central, cuja função de tensão de Westergaard é dada pela Eq. (29):

$$Z_{RetPlaca} = \frac{\sigma_n \sin\left(\frac{z\pi}{W}\right) \left[\frac{a\pi}{W} \csc\left(\frac{a\pi}{W}\right) \right]^{0,5}}{\left[\sin^2\left(\frac{z\pi}{W}\right) - \sin^2\left(\frac{a\pi}{W}\right) \right]^{0,5}}, \quad (29)$$

que foi apresentada por Efits & Liebowitz (1972). É importante mencionar que essa função é aproximada e que por isso, ela tem um limite de validade estabelecido para $(a\pi/W \ll 0,3)$, em que W é a largura da placa.

O campo de tensões para a placa de Griffith e para a placa retangular semi infinita é dado pela Eq. (16), Eq. (17), e Eq. (18). Para os dois exemplos, quando se tem o caso uniaxial, é necessário que se adicione $-\sigma_n$ na componente σ_{xx} , de tal forma que se force a obtenção das respostas esperadas. Para o caso da placa de Griffith, o que se espera para o caso uniaxial é $\sigma_{xx}(x = \infty) = 0$. Para o caso da placa retangular com trinca central a resposta esperada é $\sigma_{xx}(x = W) = 0$.

Nos dois exemplos, o campo de tensões obtido a partir K_I mais $T-stress$, embora resulte em zonas plásticas sensíveis à σ_n/S_y e aos parâmetros geométricos, não é a solução linear elástica completa, pois a componente σ_{yy} gerada por esse campo de tensões não reproduz a resposta esperada no contorno. Em contrapartida, a solução obtida a partir da função de tensão de Westergaard satisfaz todas as condições de contorno e todas as respostas esperadas das componentes de tensão nos bordos das peças.

Em relação às estimativas das zonas plásticas, os resultados gerados pela função de tensão de Westergaard são praticamente idênticos aos resultados gerados pelo campo de tensões obtido por K_I mais $T-stress$ para baixos níveis de tensão. Para níveis de tensão maiores que 0,2; os resultados das estimativas das zonas plásticas obtidos a partir da função de tensão de Westergaard são menores que os resultados gerados pelo campo de tensões obtido por K_I mais $T-stress$.

A placa de Griffith uniaxialmente carregada, que já foi estudada por Rodriguez (2007), será o primeiro exemplo em que se mostra os efeitos da relação σ_n/S_y nas estimativas das zonas plásticas. Em seguida, apresentam-se as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa retangular com uma trinca central, em que se usa a função de tensão de Westergaard representada pela Eq. (29).

3.3.1. Placa de Griffith uniaxialmente carregada

A Figura 11 mostra a placa de Griffith uniaxialmente carregada.

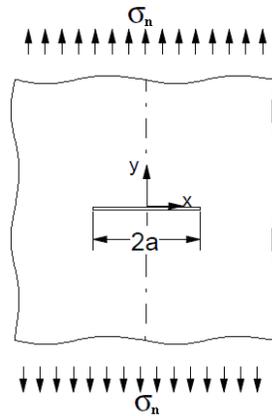


Figura 11 – Placa de Griffith uniaxialmente carregada.

A Figura 12 mostra as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa de Griffith sob tensão plana ($pZ_{M,pl-\sigma}^{Wtg}$) com os valores de σ_n/S_Y iguais à 0,2; 0,4; 0,6; 0,7 e 0,8.

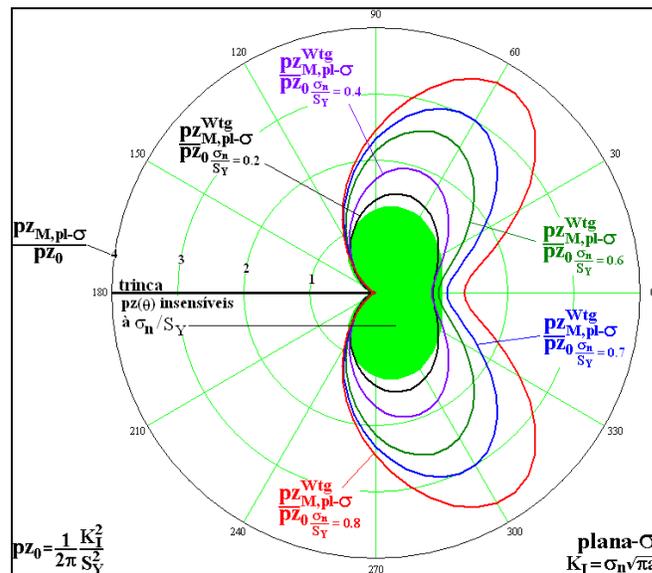


Figura 12 – Zonas plásticas $pZ(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa de Griffith sob tensão plana e com $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$ e $0,8$.

A Figura 13 mostra as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa de Griffith sob deformação plana ($pZ_{M,pl-\varepsilon}^{Wtg}$) com os valores de σ_n/S_Y iguais à 0,2; 0,4; 0,6; 0,7 e 0,8.

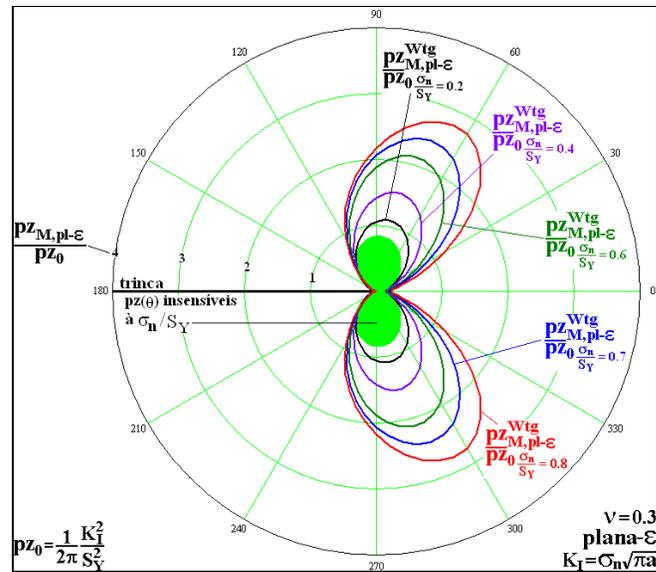


Figura 13 – Zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa de Griffith sob deformação plana e com $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$ e $0,8$.

Ao se analisar a Figura 12 e a Figura 13, percebe-se que a medida que o valor σ_n/S_Y aumenta, as zonas plásticas aumentam de tamanho.

3.3.2. Placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central

A Figura 14 mostra uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central, cujo comprimento é igual a $2a$ e que tem uma carga distribuída que gera uma tensão nominal de valor igual a σ_n , com uma largura de W .

Nesse exemplo, mostra-se que as zonas plásticas correspondentes ao exemplo da placa retangular semi infinita com $a/W = 0,025$ reproduzem os resultados de zonas plásticas obtidas para o caso da placa de Griffith. Em seguida, mostra-se o efeito dos parâmetros geométricos, tal como o ligamento residual. Para tanto, comparam-se as estimativas de zonas plásticas correspondentes à três valores de a/W : $a/W = 0,025$; $a/W = 0,05$ e para $a/W = 0,091$. Todos os valores estão dentro do limite de validade da função de tensão da placa retangular semi infinita com uma trinca central.

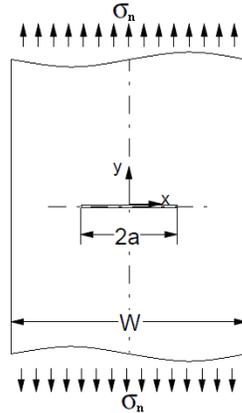


Figura 14 – Placa retangular semi infinita com uma trinca central.

A Figura 15 mostra que para $a/W = 0,025$ as zonas plásticas sob tensão plana para a placa retangular semi infinita com uma trinca central ($pZ_{M,pl-\sigma}^{Wtg,a/W}$) são praticamente iguais às zonas plásticas para o caso da placa de Griffith ($pZ_{M,pl-\sigma}^{Wtg}$).

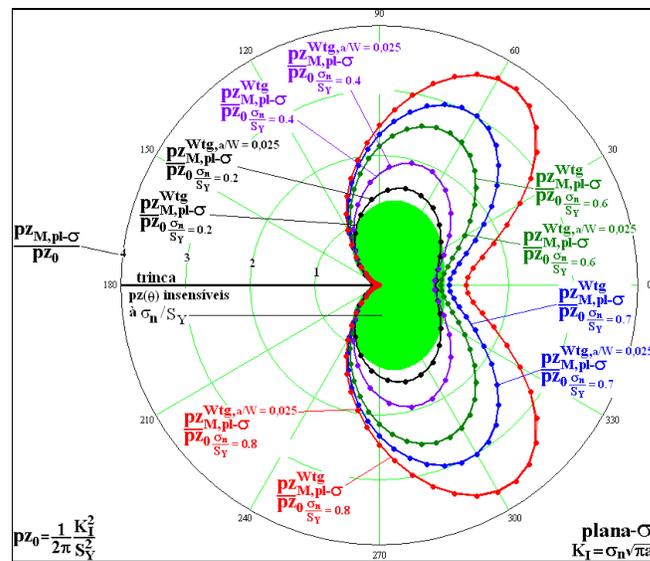


Figura 15 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com $a/W = 0,025$ e para a placa de Griffith sob tensão plana para $\sigma_n/S_y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$ e $0,8$.

A Figura 16 mostra que para $a/W = 0,025$ as zonas plásticas sob deformação plana para a placa retangular semi infinita com uma trinca central ($pZ_{M,pl-\epsilon}^{Wtg,a/W}$) são praticamente iguais às zonas plásticas para o caso da placa de Griffith ($pZ_{M,pl-\epsilon}^{Wtg}$).

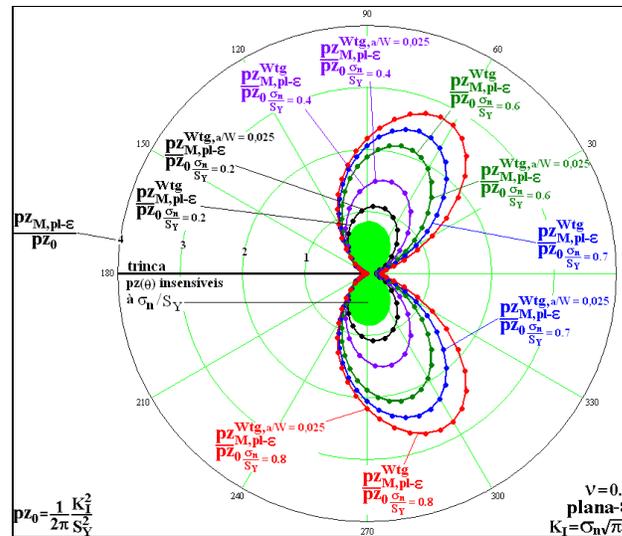


Figura 16 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com $a/W = 0,025$ e para a placa de Griffith sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$ e $0,8$.

A Figura 17 mostra as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central sob tensão plana para $a/W = 0,025$; $a/W = 0,05$ e para $a/W = 0,091$.

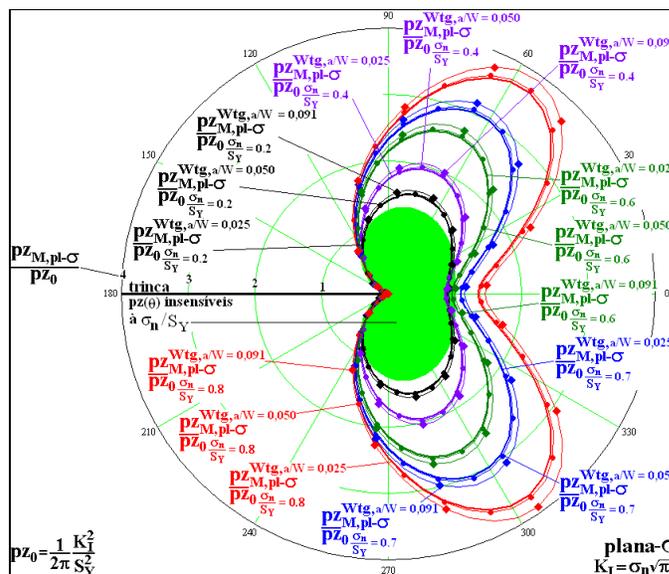


Figura 17 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com $a/W = 0,025$; $0,05$ e $0,091$ e para a placa de Griffith sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$ e $0,8$.

A Figura 18 mostra as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central sob deformação plana para $a/W = 0,025$; $a/W = 0,05$ e para $a/W = 0,091$.

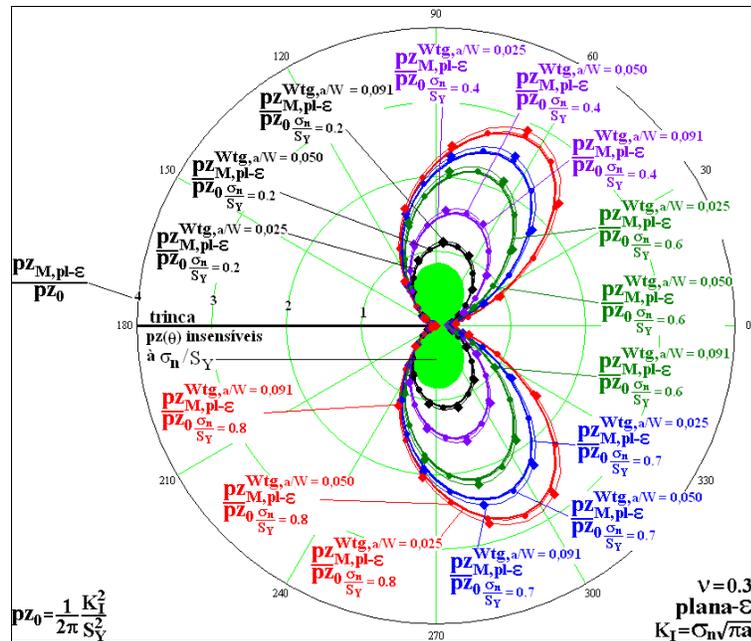


Figura 18 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com $a/W = 0,025$; 0,05 e 0,091 e para a placa de Griffith sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$; 0,4; 0,6; 0,7 e 0,8.

Ao se analisar a Figura 17 e a Figura 18, percebe-se, em ambos os estados planos, que a medida que se aumenta a relação a/W , o que corresponde à diminuir o ligamento residual, as zonas plásticas aumentam de tamanho. Esse resultado já era esperado, pois à medida que o ligamento residual diminui, a tensão aumenta nessa regiões, gerando, conseqüentemente, uma maior zona de plastificação.

Uma outra observação bastante importante, é que as zonas plásticas estimadas para $a/W = 0,05$ são bem próximas das zonas plásticas obtidas para $a/W = 0,025$ que por sua vez reproduzem as zonas plásticas correspondentes à placa de Griffith. A próxima subseção avalia os efeitos da $T-stress$ nas estimativas das zonas plásticas para o caso de uma placa retangular com uma trinca central. Juntamente com essas estimativas geradas a partir do campo de tensões obtido por K_I mais $T-stress$, também se avalia as zonas plásticas geradas pelo campo de tensões obtido a partir função de tensão de Westergaard. Com isso, é possível ver que a partir de um determinado nível de tensão, as zonas plásticas geradas por K_I mais $T-stress$ não reproduzem as estimativas obtidas a partir da função de tensão de Westergaard, que é a solução linear elástica para corpos trincados.

3.3.3. Placa retangular com uma trinca central

A Figura 19 mostra uma placa retangular com uma trinca central, cujo comprimento da trinca é igual a $2a$ e que tem uma carga distribuída que gera uma tensão nominal de valor igual a σ_n , com uma largura de $2W$ e com uma altura de $2H$.

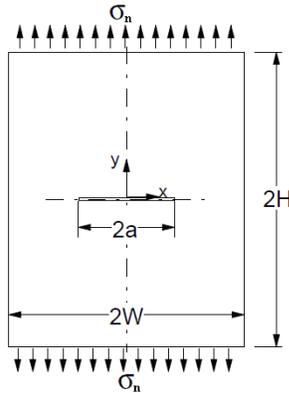


Figura 19 – Placa retangular com uma trinca central.

Como visto na seção anterior, os valores de $a/W = 0,05$ para placa retangular semi infinita com uma trinca central geram estimativas de zonas plásticas praticamente iguais aos resultados obtidos para o caso da placa de Griffith. É importante observar que para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central, a largura da placa foi definida por W . Já para o caso da placa retangular com uma trinca central, a largura é definida por $2W$. Dessa forma, os resultados obtidos para $a/W = 0,05$ para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central correspondem à $a/W = 0,1$ para o caso da placa retangular com uma trinca central.

Fett (1998) apresentou a Eq. (30) em que se obtém os valores da T -stress em função da tensão nominal σ_n , da relação a/W e de γ para uma placa retangular com uma trinca interna:

$$T_{stress} = \frac{\sigma_n \gamma}{(1 + a/W)}, \quad (30)$$

em que o parâmetro γ depende da relação H/W e é obtido pela Tabela 2, de acordo com o que foi mostrado por Fett (1998). Como se pretende simular nesse exemplo o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central, usa-se o maior valor da relação H/W apresentado por Fett, que corresponde à $H/W = 1,25$.

Tabela 2 – Valores de γ dependentes da relação a/W e H/W (Fett, 1998).

a/W	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$H/W = 1,25$	-1,0	-0,9	-0,83	-0,777	-0,716	-0,656
a/W	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$H/W = 1,25$	-0,596	-0,53	-0,47	-0,43	-0,413	

Os valores de K_I para a placa retangular com trinca central também podem ser obtidos pela Eq. (28). A diferença entre os dois casos é que para o caso da placa retangular, os valores de $F(a/W)$ são dadas pela Tabela 3, conforme mostrado por Tada *et al* (1985).

Tabela 3 – Valores de $F(a/W)$ dependentes da relação a/W (Tada *et al*, 1985).

a/W	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$F(a/W)$	1.0000	1.0060	1.0246	1.0577	1.1094
a/W	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(a/W)$	1.1867	1.3033	1.4882	1.8160	2.5776

O próximo passo é estudar as estimativas das zonas plásticas a partir dos três campos de tensões, que são: campo de tensões gerado por K_I ($p_z(\theta)_M^{K_I}$), campo de tensões obtido por K_I mais T -stress ($p_z(\theta)_M^{K_I+T}$) e pela função de tensão de Westergaard ($p_z(\theta)_M^{Wtg}$). A Figura 20 mostra as zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

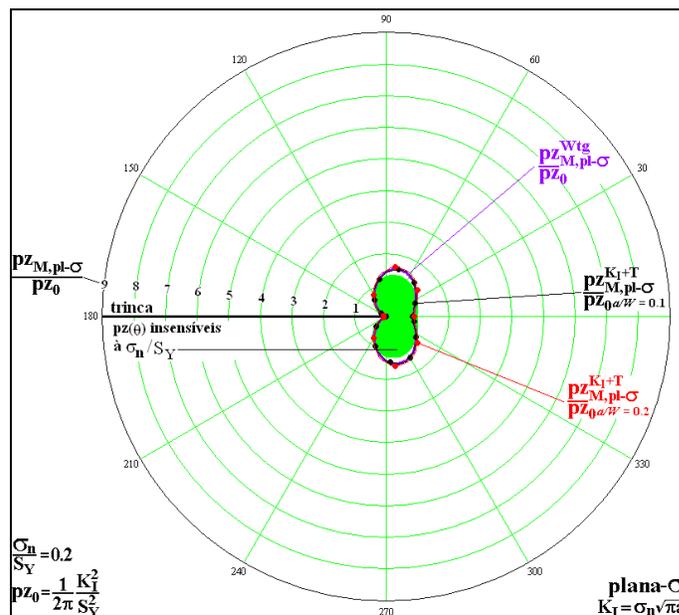


Figura 20 – Zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

A Figura 21 mostra as zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

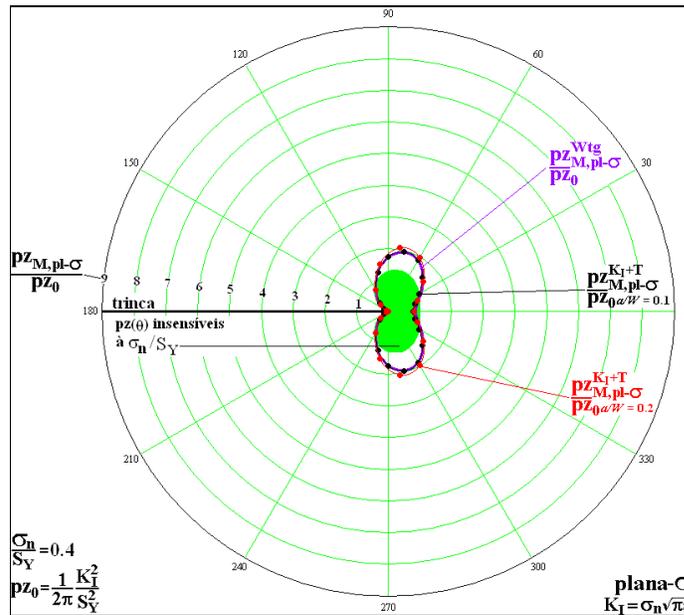


Figura 21 – Zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

A Figura 22 mostra as zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

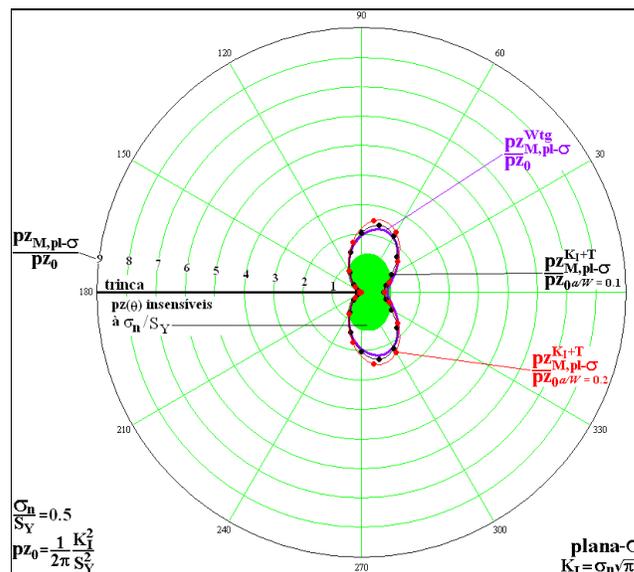


Figura 22 – Zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

A Figura 23 mostra as zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

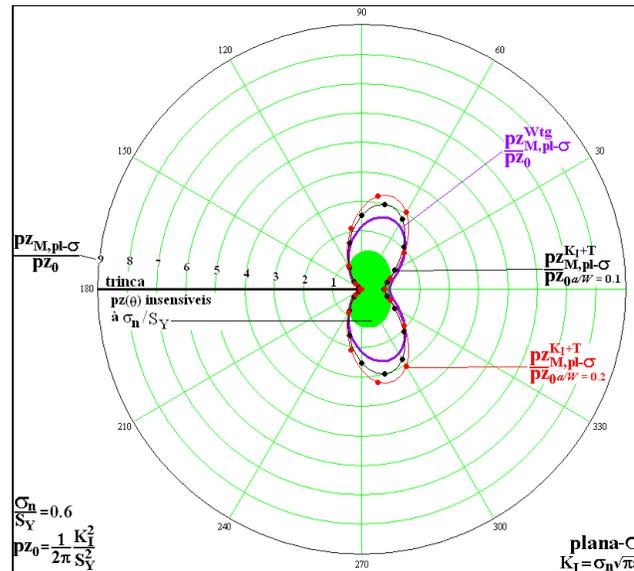


Figura 23 – Zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

A Figura 24 mostra as zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

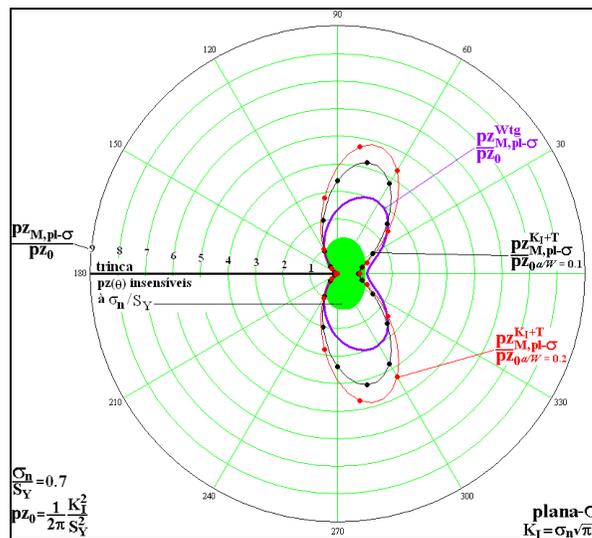


Figura 24 – Zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

A Figura 25 mostra as zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

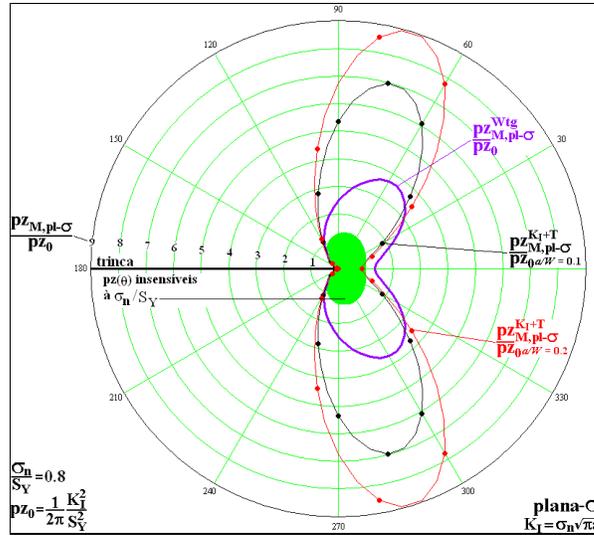


Figura 25 – Zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

A Figura 26 mostra as zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

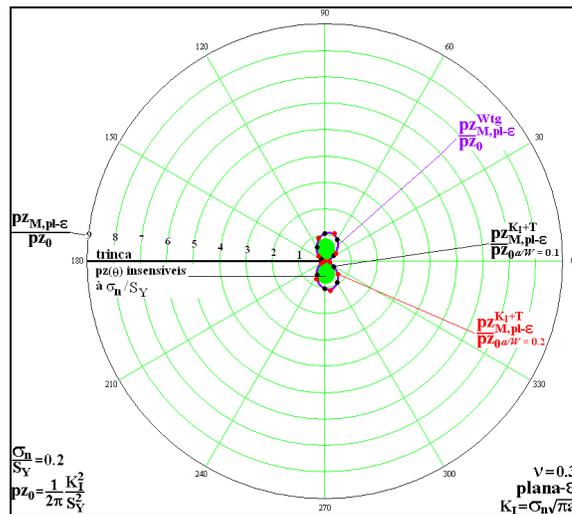


Figura 26 – Zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

A Figura 27 mostra as zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

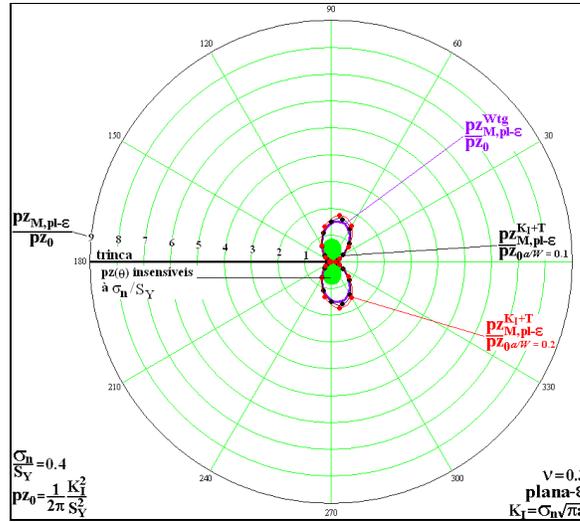


Figura 27 – Zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

A Figura 28 mostra as zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

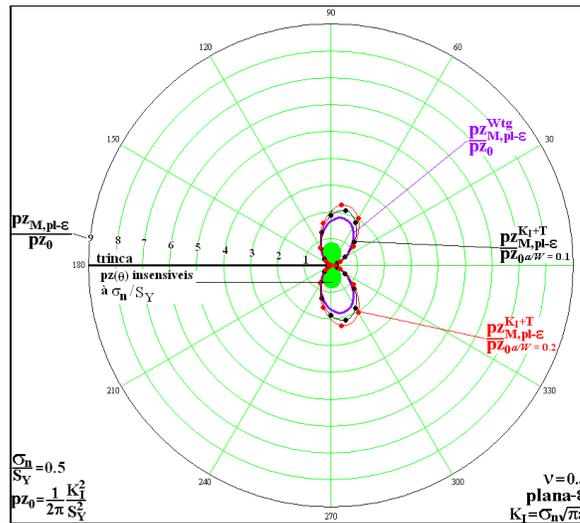


Figura 28 – Zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

A Figura 29 mostra as zonas plásticas $pz(\theta)_M$ estimadas sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

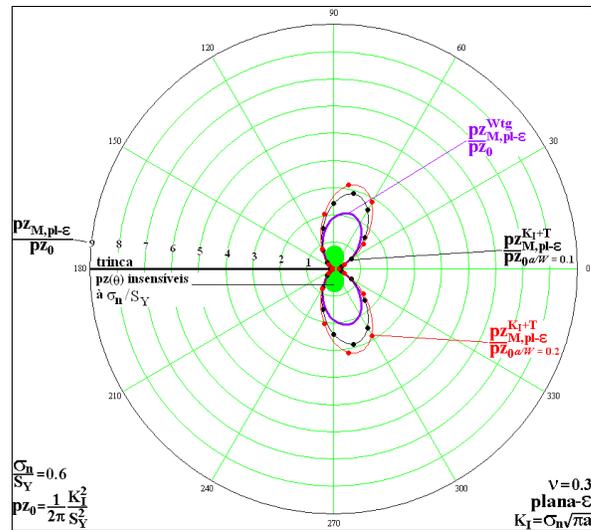


Figura 29 – Zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

A Figura 30 mostra as zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

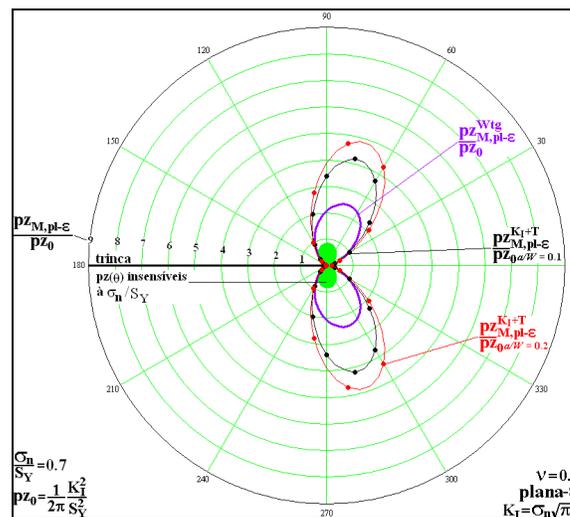


Figura 30 – Zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

A Figura 31 mostra as zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$ e para $a/W = 0,1$ e $0,2$.

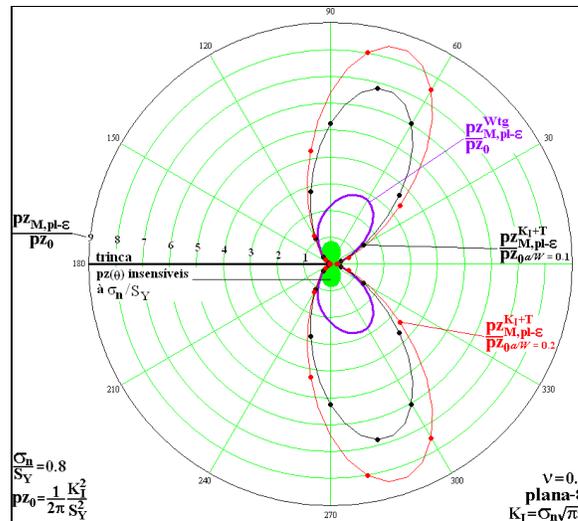


Figura 31 – Zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com $a/W = 0,1$ e $0,2$ e com $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

É possível observar nas doze figuras anteriores que a adição da $T-stress$ na componente σ_{xx} obtida a partir K_I consegue capturar os efeitos da relação σ_n/S_Y no tamanho e forma das zonas plásticas, conforme já tinha sido visto no exemplo do disco circular com um trinca interna. Além disso, essas figuras mostram que os efeitos σ_n/S_Y também podem ser identificados ao se utilizar o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard. Os efeitos dos parâmetros geométricos também podem ser vistos nessas figuras pelos dois valores a/W utilizados, pois de acordo com o que era esperado, as zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ correspondentes à $a/W = 0,1$ são menores que as zonas plásticas $p_z(\theta)_M$ correspondentes à $a/W = 0,2$. O fato das zonas plásticas correspondentes à $a/W = 0,1$ serem menores que as zonas plásticas correspondentes à $a/W = 0,2$ ocorre independentemente do valor de σ_n/S_Y .

Também é importante observar que para baixos níveis de tensão, $\sigma_n/S_Y = 0,2$ e $\sigma_n/S_Y = 0,4$ por exemplo, as zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões gerado por K_I mais $T-stress$ são bem semelhantes às zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard. Entretanto, quando o valor σ_n/S_Y cresce, a diferença entre as duas estimativas aumenta, e as zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões gerado por K_I mais $T-stress$ são maiores que as zonas plásticas geradas pelo campo de tensões obtido pela função de tensão de Westergaard.

3.4. O campo de tensões gerado pela série de Williams

É muito importante comentar que a demonstração utilizada nesta subseção foi retirada do trabalho de Lopes (2002), que é co-orientador deste trabalho.

Williams apresentou uma forma diferente para a Eq. (19):

$$\Phi = r^{\lambda+1} \begin{bmatrix} c_1 \sin[(\lambda+1)\theta^*] + c_2 \cos[(\lambda+1)\theta^*] \\ c_3 \sin[(\lambda-1)\theta^*] + c_4 \cos[(\lambda-1)\theta^*] \end{bmatrix}, \quad (31)$$

em que c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes e λ é um expoente que deve ser determinado conforme as condições de contorno do problema. A Eq. (31) pode ser reescrita em uma forma mais compacta, de acordo com o que mostra a Eq. (32):

$$\Phi = r^{\lambda+1} F(\theta^*, \lambda). \quad (32)$$

Para que Φ seja uma função de tensão, é necessário que ela satisfaça a Eq. (33):

$$\nabla^4 \Phi(r, \theta^*) = 0, \quad (33)$$

sendo que as componentes de tensão podem ser obtidas conforme mostra a Eq (34):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^{*2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^*} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta^*} \end{Bmatrix}, \quad (34)$$

em que, por simplicidade, tem-se que $\Phi = \Phi(r, \theta^*)$.

Ao se substituir a função de tensão proposta por Williams, Eq. (31) ou Eq. (32), na Eq. (34), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = r^{\lambda-1} \begin{Bmatrix} F''(\theta^*) + (\lambda+1)F(\theta^*) \\ \lambda(\lambda+1)F(\theta^*) \\ -\lambda F'(\theta^*) \end{Bmatrix}, \quad (35)$$

em que $F'(\theta^*)$ é a derivada de F com respeito a θ^* . Para que a condição de superfície livre seja satisfeita nas faces da trinca, é necessário que:

$$\sigma_{\theta\theta}(0) = \sigma_{\theta\theta}(2\pi) = \sigma_{r\theta}(0) = \sigma_{r\theta}(2\pi) = 0, \quad (36)$$

implicando em:

$$F(0) = F(2\pi) = F'(0) = F'(2\pi) = 0. \quad (37)$$

Na solução geral da Eq. (31) as constantes não são nulas, as condições de contorno descritas pela Eq. (37) são satisfeitas se:

$$\sin(2\pi\lambda) = 0, \quad (38)$$

com

$$\lambda = \frac{n}{2}, \quad (39)$$

em que $n = 1, 2, 3, \dots$

Ao se substituir a Eq. (37) e a Eq. (39) na Eq. (31), se elimina duas constantes, tendo-se como resultado a Eq. (40):

$$\Phi = r^{\frac{n}{2}+1} \left\{ \begin{array}{l} c_3 \left[\sin \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta^* \right] - \frac{n-2}{n+2} \sin \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \theta^* \right] \right] + \\ c_4 \left[\cos \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta^* \right] - \cos \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \theta^* \right] \right] \end{array} \right\}. \quad (40)$$

Ao se escrever $\theta = \theta^* - \pi$ e $n = 1$ na Eq. (40), tem-se que:

$$\Phi = r^{\frac{3}{2}} \left[s_1 \left[-\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{3} \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] + t_1 \left[-\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \right], \quad (41)$$

$$+ s_2 r^2 [1 - \cos(2\theta)] + \dots$$

em que s_i e t_i são constantes que precisam ser definidas ($i = 1, 2, 3, \dots$). A troca de variável de θ^* para θ é importante para que se possa relacionar os termos da Eq. (40) com os termos de K . Ao se substituir a Eq. (41) na Eq. (34), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\sqrt{r}} \left\{ \begin{array}{l} s_1 \left[-5 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] + \\ s_1 \left[-3 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] + \\ s_1 \left[-\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] + \\ t_1 \left[-5 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + 3 \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ t_1 \left[-3 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - 3 \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ t_1 \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + 3 \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\}, \quad (42)$$

As constantes s_1 e t_1 podem ser relacionadas aos modos I e II de trincamento. Dessa forma, tem-se que:

$$s_1 = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \text{ e } t_1 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (43)$$

3.5. A utilização do Método dos Mínimos Quadrados para ajustar a série de Williams à função de tensão de Westergaard

Esta subseção, que também foi feita na sua essência a partir do trabalho de Lopes (2002), apresenta a obtenção de n termos da série de Williams, de tal forma que se ajuste a série de Williams aos resultados obtidos pelas componentes de tensão obtidas a partir da função de tensão de Westergaard. Para elucidar esse ajuste, é necessário definir os seguintes vetores e matrizes:

1) matriz \mathbf{T} que armazena em suas linhas os n primeiros termos da série de Williams que são avaliados nos mesmo pontos em que se avalia as componentes de tensão obtidas a partir da função de tensão de Westergaard;

2) vetor \mathbf{c} que tem em seus elementos representando os coeficientes dos n primeiros termos da série de Williams;

3) vetor \mathbf{t}_n que armazena as componentes de tensão obtidas a partir da função de tensão de Westergaard.

De acordo com o Método dos Mínimos Quadrados, o vetor \mathbf{c} precisa ser tal que:

$$\left(\mathbf{c}^T \mathbf{T}^T - \mathbf{t}_n^T\right) (\mathbf{T} \mathbf{c} - \mathbf{t}_n) = \min. \quad (44)$$

Ao se derivar a Eq. (44) em relação a \mathbf{c} e igualando o resultado à zero, tem-se que:

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{T}^T \mathbf{T}\right)^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{t}_n. \quad (45)$$

Como resultado se terá o campo de tensões a partir do uso de dois termos da série de Williams (σ_{xx}^{Wil} , σ_{yy}^{Wil} , σ_{xy}^{Wil}). Com os valores de $n = 1, 2, 3, \dots$ adotados na série de Williams mostrada na seção anterior, percebe-se que não se tem o termo constante de ordem zero, que corresponde a T -stress, conforme é mostrado na seção 3.6. Dessa maneira, sem perda de generalidade, pode-se adicionar a T -stress no campo de tensões determinado pela série de Williams. Como resultado, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{Wil+T} \\ \sigma_{yy}^{Wil+T} \\ \sigma_{xy}^{Wil+T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{Wil} \\ \sigma_{yy}^{Wil} \\ \sigma_{xy}^{Wil} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{stress} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (46)$$

Para ilustrar a expansão da série de Williams feita neste trabalho, mostra-se abaixo o aspecto dos vetores \mathbf{c} e \mathbf{t}_n e da matriz \mathbf{T} para o caso em que se expande a série de Williams com dois termos a partir da avaliação dos valores de σ_{yy} obtido pelo campo de tensões determinado pela função de tensão de Westergaard sob três pontos na direção $\theta = 0$: $P_1(r_1, \theta = 0)$, $P_2(r_2, \theta = 0)$, e $P_3(r_3, \theta = 0)$. O vetor \mathbf{t}_n apresenta três elementos em que cada elemento tem o valor de σ_{yy}^{Wtg} avaliado em cada ponto.

$$\mathbf{t}_n^T = [\sigma_{yy}^{Wtg}(P_1(r_1, \theta = 0)) \quad \sigma_{yy}^{Wtg}(P_2(r_2, \theta = 0)) \quad \sigma_{yy}^{Wtg}(P_3(r_3, \theta = 0))]. \quad (47)$$

A matriz \mathbf{T} tem três linhas correspondentes aos três pontos e tem duas colunas correspondentes aos dois termos da série de Williams:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} F_1(P_1(r_1, \theta = 0)) & F_2(P_1(r_1, \theta = 0)) \\ F_3(P_2(r_2, \theta = 0)) & F_4(P_2(r_2, \theta = 0)) \\ F_5(P_3(r_3, \theta = 0)) & F_6(P_3(r_3, \theta = 0)) \end{bmatrix}. \quad (48)$$

em que $F_i(r, \theta = 0)$ $i = 1, \dots, 6$ são função trigonométricas obtidas a partir da série de Williams, como mostrado pela Eq. (35). O vetor \mathbf{c} apresenta dois elementos correspondentes aos dois termos usados na série de Williams:

$$\{\mathbf{c}\}^T = [C_1 \quad C_2]. \quad (49)$$

em que C_1 e C_2 são os coeficientes do ajuste da série de Williams. Esses valores são avaliados conforme mostra a Eq. (45). Depois disso, é possível substituir os valores de $n = 1$ e $n = 2$ e a Eq. (49) na Eq. (35). Após se obter o campo de tensões pela série de Williams, adiciona-se a $T-stress$ e obtém-se o campo de tensões correspondente à Eq. (46).

A próxima subseção mostra dois exemplos em que se faz o ajuste da série de Williams a partir da função de tensão de Westergaard. O Método dos Mínimos Quadrados é utilizado para esse ajuste. O primeiro exemplo trata da placa de Griffith biaxialmente carregada. O segundo exemplo estuda a placa de Griffith uniaxialmente carregada. Nos dois exemplos, mostra-se que a partir do número adequado de termos, Num , utilizados na série de Williams $(pz(\theta)_M^{Wil-Num})$, obtêm-

se as mesmas estimativas de zonas plásticas quando se usa a função de tensão de Westergaard $(pz(\theta)_M^{Wtg})$.

3.5.1. O ajuste da série de Williams à função de tensão de Westergaard para o caso da placa de Griffith biaxialmente carregada

Este exemplo tem solução analítica, Eq. (16), Eq. (17), e Eq. (18). A seguir, estuda-se o efeito do número de termos da série de Williams na estimativa das zonas plásticas para o caso da placa de Griffith biaxialmente carregada. O campo de tensões gerado pela série de Williams é mostrado na Eq. (46). Nesse exemplo o valor da T -stress igual a 0.

A Figura 32 mostra as estimativas das zonas plásticas sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$. Pode-se observar que para esse nível de tensão, apenas um termo basta para ajustar a estimativa obtida pela série de Williams, $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$, à estimativa obtida pela função de tensão de Westergaard $pz(\theta)_M^{Wtg}$.

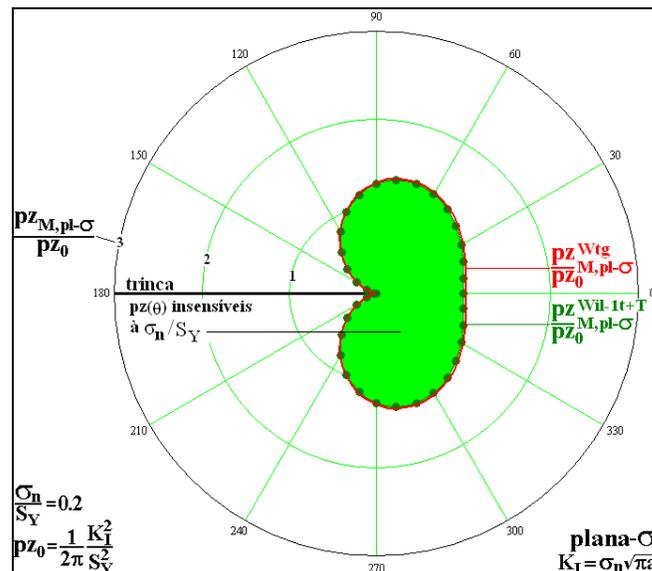


Figura 32 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

A Figura 33 mostra as estimativas $pz(\theta)_M$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

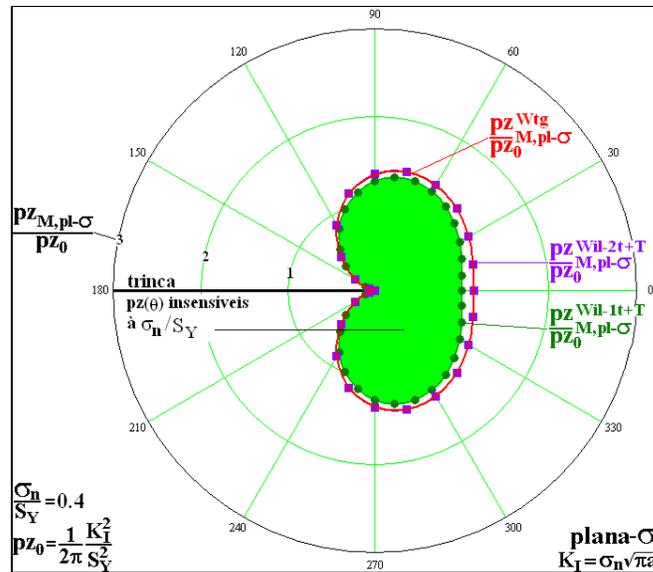


Figura 33 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

No caso da Figura 33 são necessários dois termos para ajustar as estimativas $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-2t}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$. A mesma quantidade de termos é necessária para o caso em que $\sigma_n/S_Y = 0,5$, conforme mostra a Figura 34.

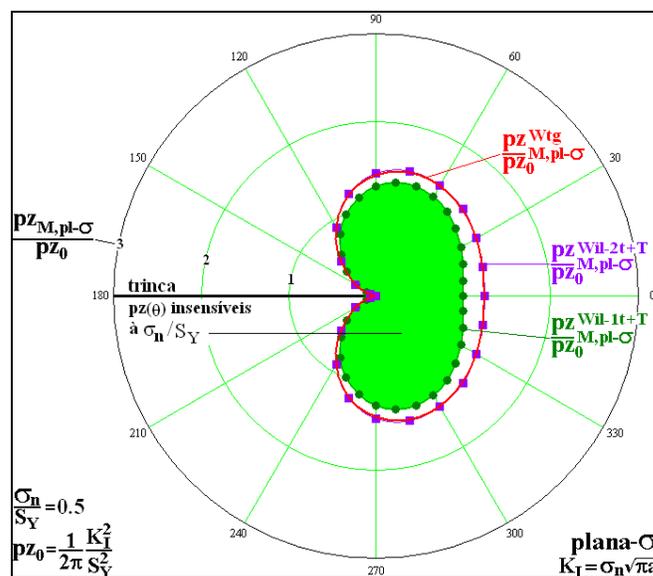


Figura 34 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

A Figura 35 mostra as estimativas $pz(\theta)_M$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

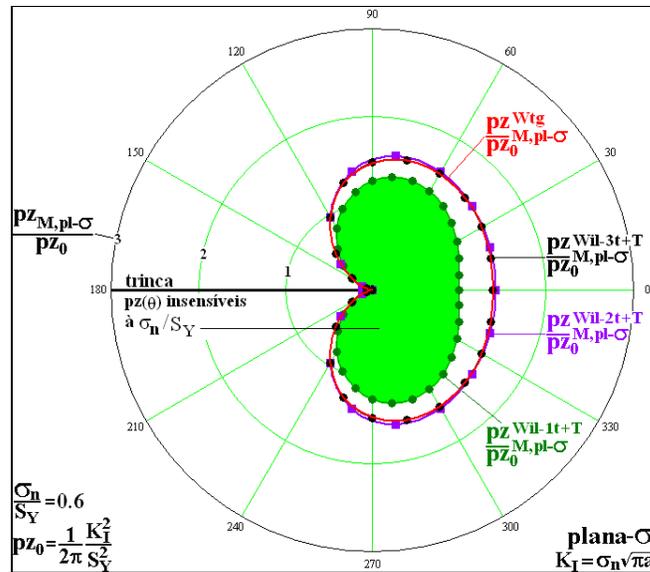


Figura 35 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

No caso da Figura 35, são necessários três termos na série de Williams para ajustar a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-3t}$ à estimativa $pz(\theta)_M^{Wtg}$. A mesma quantidade termos é necessária para o caso em que $\sigma_n/S_Y = 0,7$, conforme mostra a Figura 36.

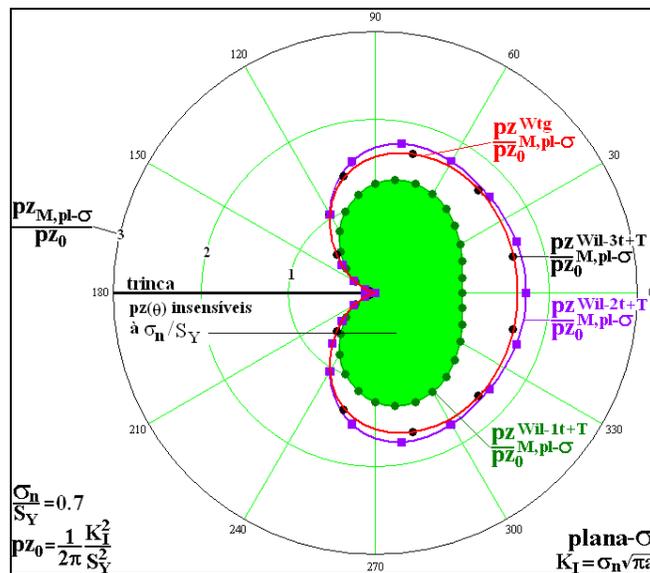


Figura 36 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

A Figura 37 mostra as estimativas $pz(\theta)_M$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

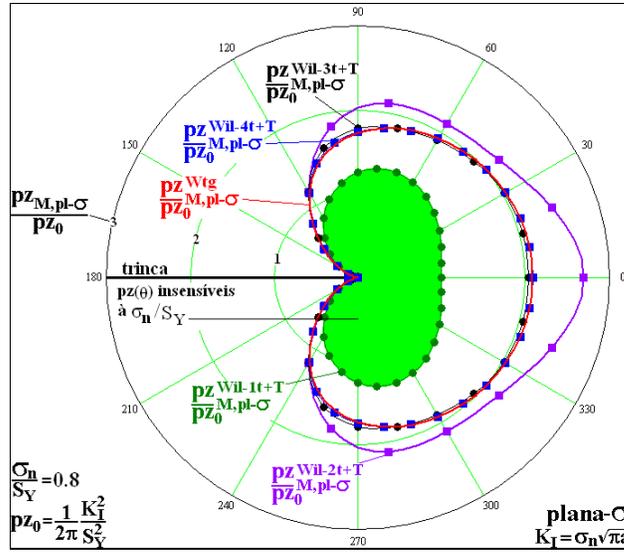


Figura 37 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

No caso ilustrado pela Figura 37, percebe-se que são necessários quatro termos na série de Williams para ajustar a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-4t}$ à estimativa $pz(\theta)_M^{Wtg}$. A Figura 38 mostra as estimativas $pz(\theta)_M$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$. Percebe-se que neste caso, apenas um termo na série de Williams é necessário para ajustar a estimativa $pz(\theta)_{M,\epsilon-pl}^{Wil-1t}$ à estimativa $pz(\theta)_M^{Wtg}$.

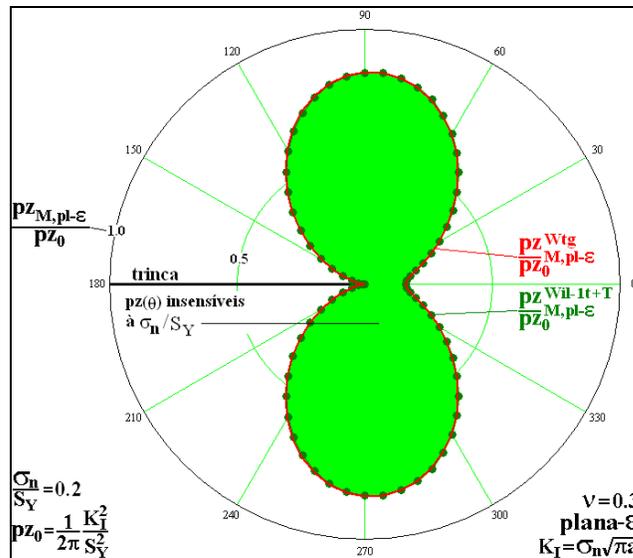


Figura 38 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

A Figura 39 mostra as estimativas $p_z(\theta)_M$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$. Percebe-se que no caso em que se tem $\sigma_n/S_Y = 0,4$ sob deformação plana, são necessários dois termos na série de Williams para ajustar a estimativa $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-2t}$ à estimativa $p_z(\theta)_M^{Wtg}$.

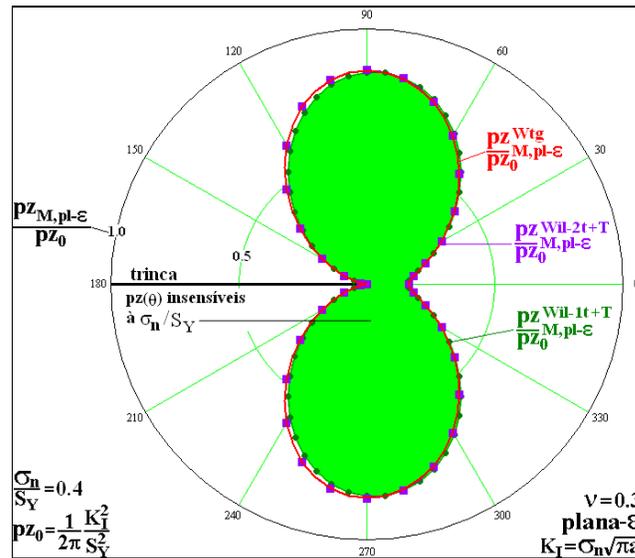


Figura 39 – Convergência das estimativas $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

A Figura 40 mostra as estimativas $p_z(\theta)_M$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

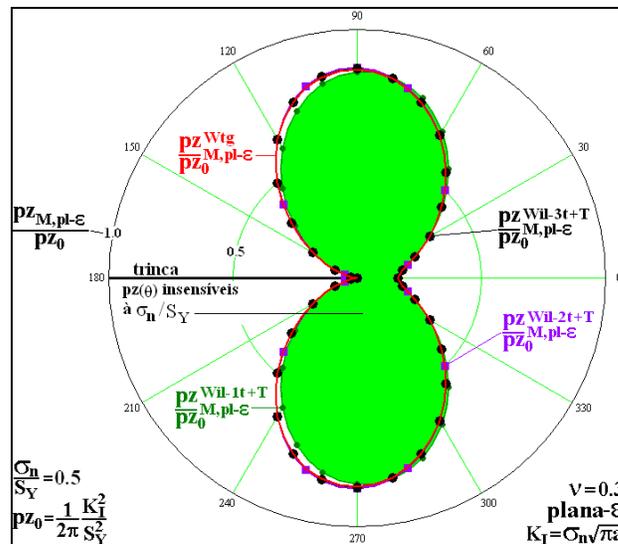


Figura 40 – Convergência das estimativas $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

A Figura 41 mostra as estimativas $p_z(\theta)_M$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

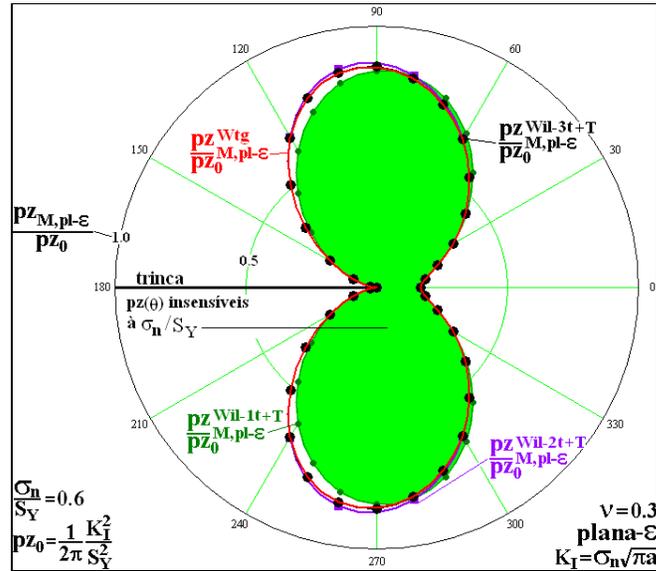


Figura 41 – Convergência das estimativas $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

A Figura 42 mostra as estimativas $p_z(\theta)_M$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

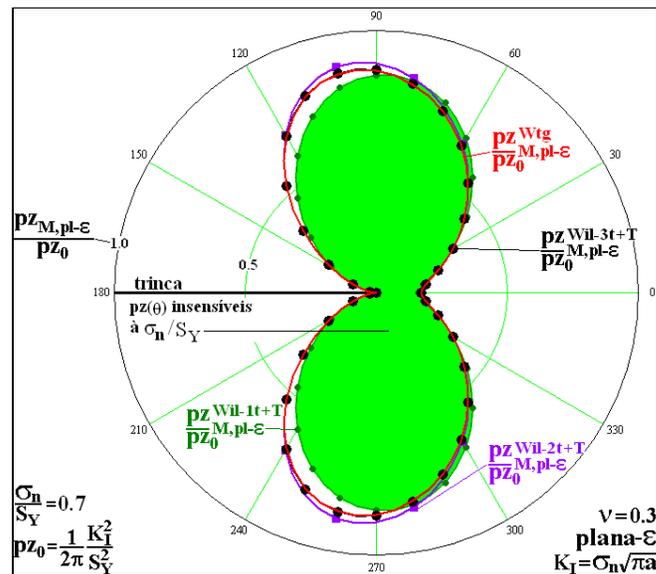


Figura 42 – Convergência das estimativas $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

Nos casos em que se tem $\sigma_n/S_Y = 0,5; 0,6$ e $0,7$ são necessários três termos na série de Williams para ajustar a estimativa $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-3t}$ à estimativa $p_z(\theta)_M^{Wtg}$. A Figura 43 mostra as estimativas $p_z(\theta)_M$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

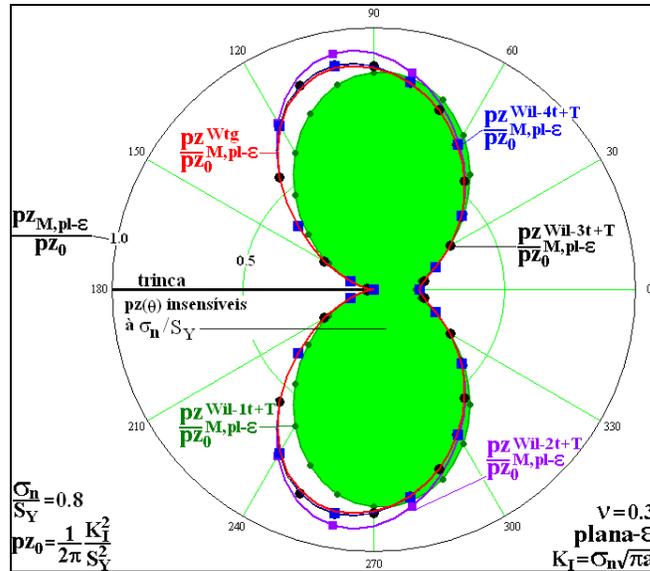


Figura 43 – Convergência das estimativas $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

No caso em que se tem $\sigma_n/S_Y = 0,8$ são necessários quatro termos na série de Williams para ajustar a estimativa $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-4t}$ à estimativa $p_z(\theta)_M^{Wtg}$.

Todos os parâmetros utilizados para o caso da placa de Griffith biaxialmente carregada são feitos no próximo exemplo. A diferença é que o exemplo seguinte trata do caso da placa de Griffith uniaxialmente carregada.

3.5.2. O ajuste da série de Williams a função de tensão de Westergaard para o caso da placa de Griffith uniaxialmente carregada

Os detalhes deste problema podem ser vistos na Figura 1. Abaixo se mostra o efeito do número de termos da série de Williams nas estimativas das zonas plásticas para ambos os estados planos. A Figura 44 mostra as estimativas $p_z(\theta)_M$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$. Percebe-se que neste caso, apenas um termo na série de Williams é necessário para ajustar a estimativa $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ à estimativa

$pz(\theta)_M^{Wtg}$. O campo de tensões gerado pela série de Williams é mostrado na Eq.

(46). Nesse exemplo o valor da T -stress igual a $-\sigma_n$.

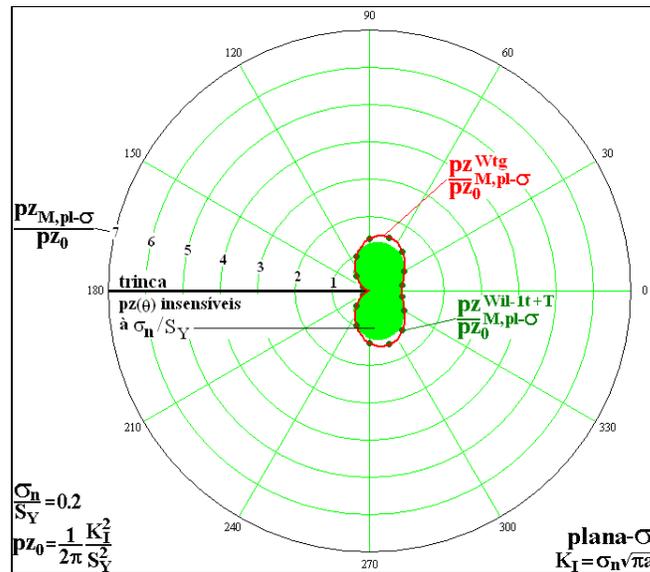


Figura 44 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

A Figura 45 mostra as estimativas $pz(\theta)_M$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$. É possível ver que neste caso, dois termos na série de Williams ajustam a estimativa $pz(\theta)_M^{Wil-2t}$ à estimativa $pz(\theta)_M^{Wtg}$. Já quando se tem $\sigma_n/S_Y = 0,5$ e $\sigma_n/S_Y = 0,6$ são necessários três termos na série de Williams para estimar as $pz(\theta)_M^{Wil-3t}$. Quando se tem $\sigma_n/S_Y = 0,7$ quatro termos na série de Williams são necessários para ajustar a estimativa $pz(\theta)_M^{Wil-4t}$ à estimativa $pz(\theta)_M^{Wtg}$. Para o caso em que $\sigma_n/S_Y = 0,8$ são necessários seis termos na série de Williams para se fazer o ajuste.

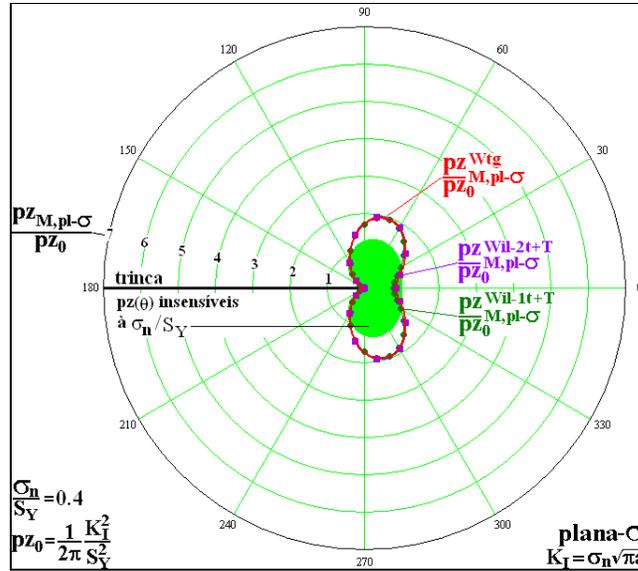


Figura 45 – Convergência das estimativas $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

A Figura 46 mostra as estimativas $p_z(\theta)_M$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

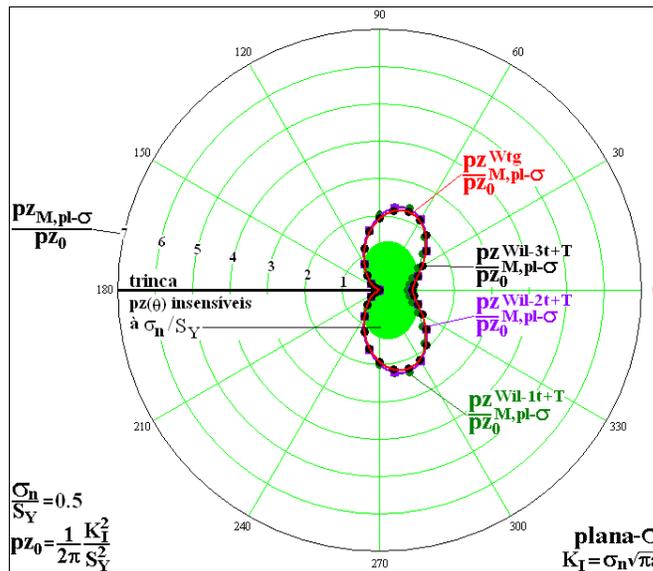


Figura 46 – Convergência das estimativas $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

A Figura 47 mostra as estimativas $p_z(\theta)_M$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

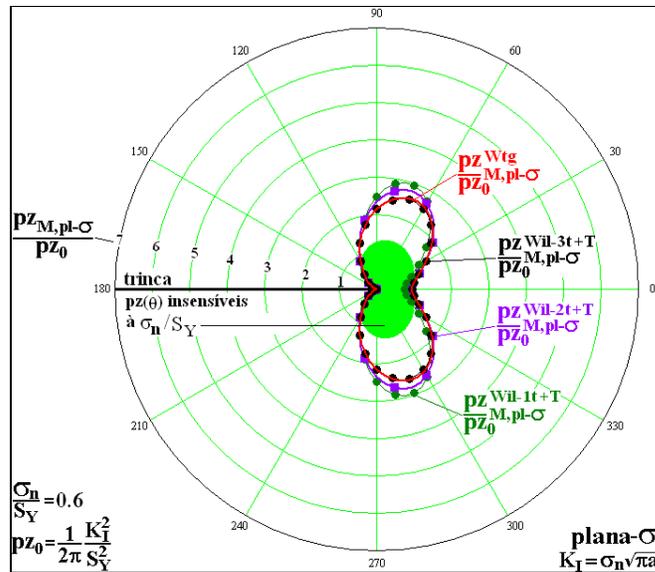


Figura 47 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

A Figura 48 mostra as estimativas $pz(\theta)_M$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

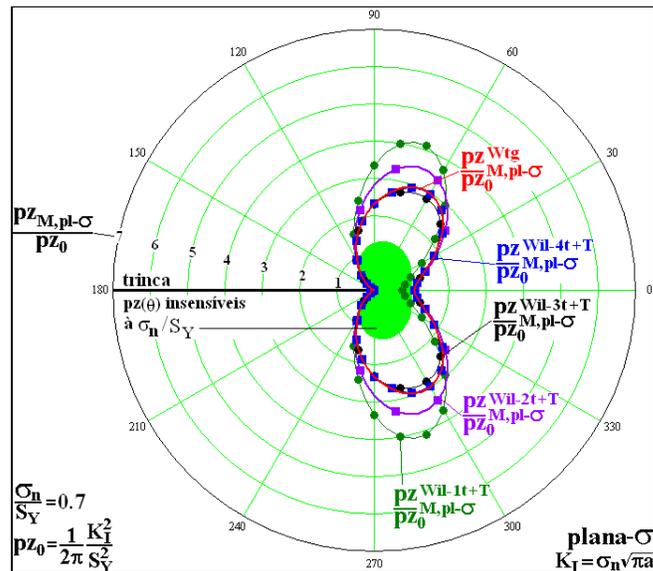


Figura 48 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

A Figura 49 mostra as estimativas $pz(\theta)_M$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

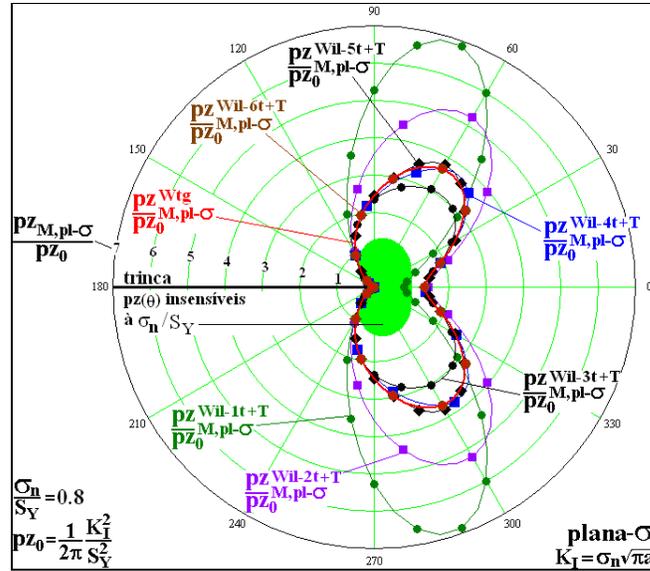


Figura 49 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

Para o caso sob deformação plana em que se tem $\sigma_n/S_Y = 0,2$, a Figura 50 mostra que apenas um termo na série de Williams ajusta a estimativa $pz(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-1t}$ à estimativa $pz(\theta)_M^{Wtg}$. De acordo com a Figura 51, percebe-se que são necessários dois termos na série de Williams para o ajuste quando $\sigma_n/S_Y = 0,4$. Para $\sigma_n/S_Y = 0,5$ e para $\sigma_n/S_Y = 0,6$ são necessários três termos para ajustar a estimativa $pz(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-3t}$ à estimativa $pz(\theta)_M^{Wtg}$, vide Figura 52 e Figura 53. De acordo com a Figura 54, vê-se que são necessários quatro termos para o ajuste quando $\sigma_n/S_Y = 0,7$. O último caso, em que se tem $\sigma_n/S_Y = 0,8$ percebe-se que são necessários cinco termos na série de Williams para ajustar a estimativa $pz(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-5t}$ à estimativa $pz(\theta)_M^{Wtg}$, conforme mostra a Figura 55.

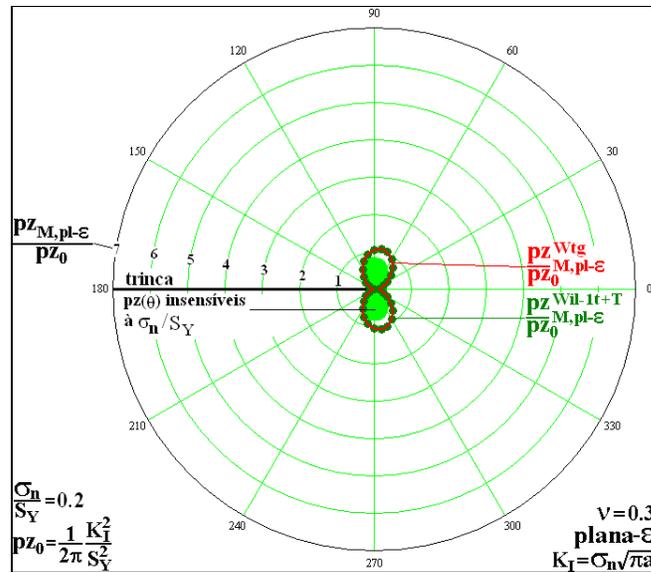


Figura 50 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

Abaixo, mostra-se a Figura 51 para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

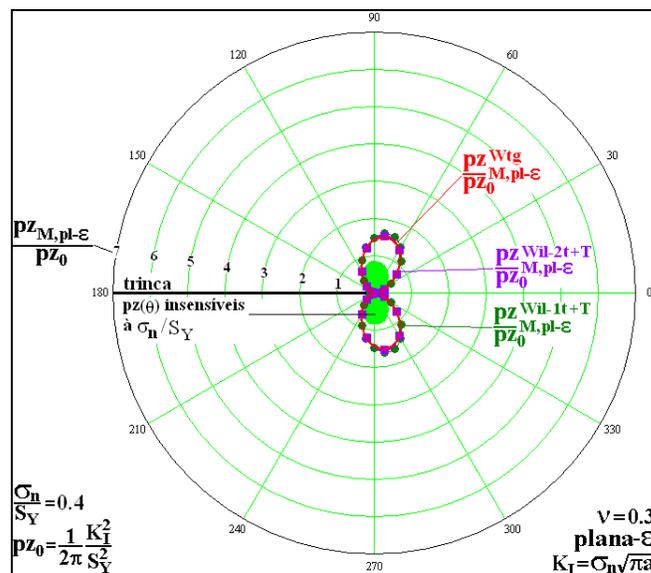


Figura 51 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

Abaixo, mostra-se a Figura 52 para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

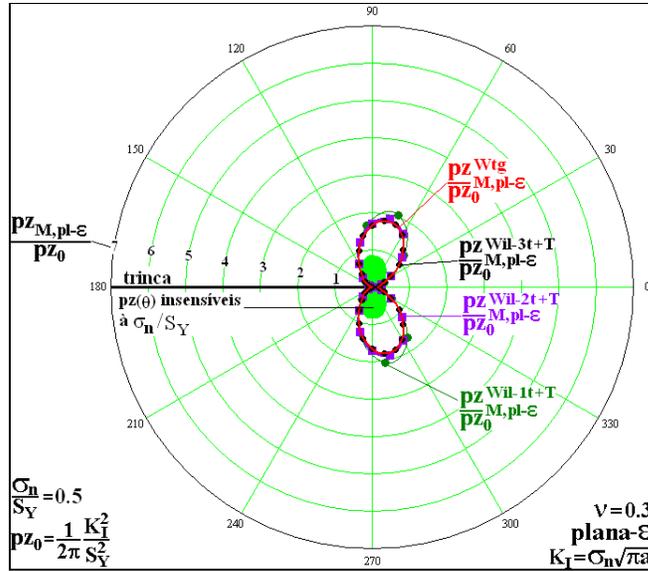


Figura 52 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

Abaixo, mostra-se a Figura 53 para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

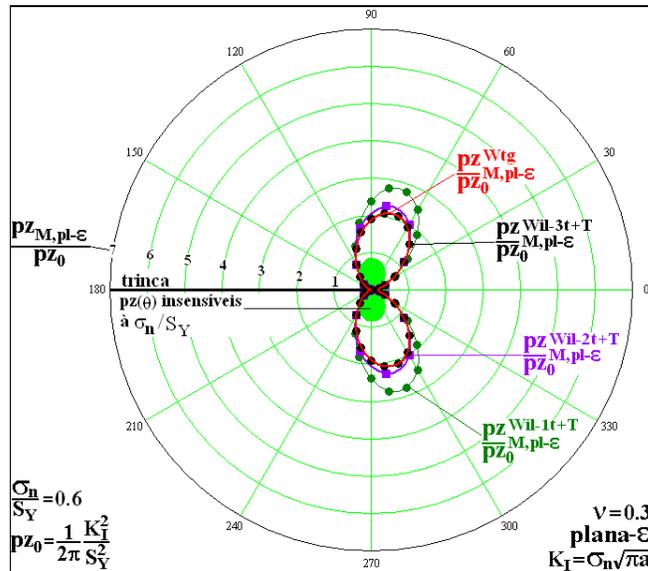


Figura 53 – Convergência das estimativas $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $pz(\theta)_M^{Wtg}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

Abaixo, mostra-se a Figura 54 para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

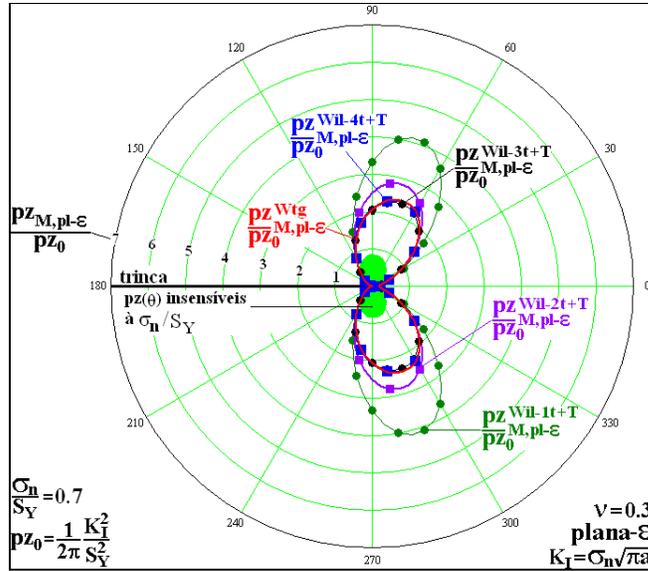


Figura 54 – Convergência das estimativas $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $p_z(\theta)_M^{WtG}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

Abaixo, mostra-se a Figura 55 para o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

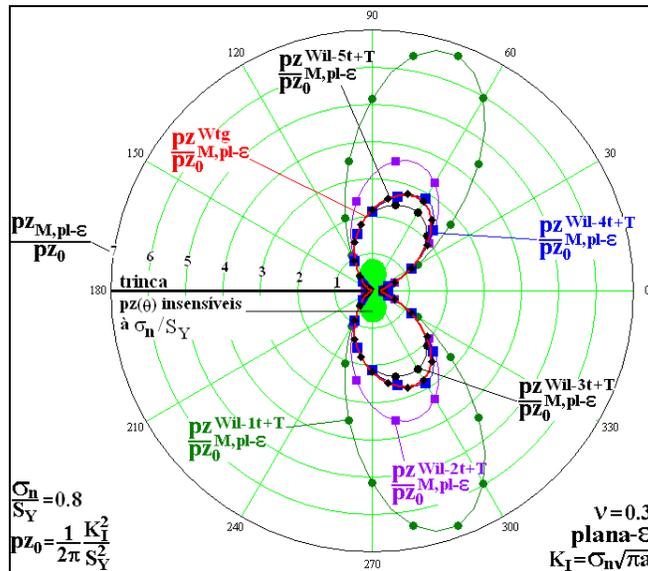


Figura 55 – Convergência das estimativas $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$ às estimativas $p_z(\theta)_M^{WtG}$ sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

Ao se analisar ambos os estados planos para o caso da placa Griffith uniaxialmente tracionada, percebe-se que para valores altos de σ_n/S_Y são necessários mais termos na série de Williams para ajustar as estimativas

$p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-Numt}$ em tensão plana e as estimativas $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-Numt}$ em deformação plana às estimativas $p_z(\theta)_M^{Wig}$.

A próxima subseção mostra, a partir da estimativa de zonas plásticas, que a T -stress é o termo constante de ordem zero da série de Williams.

3.6. A T -stress como a constante de ordem zero da série de Williams

Fett (1998) apresentou a série de Williams para uma placa retangular com uma trinca central como:

$$\Phi = \sigma_n W^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{W}\right)^{j+\frac{3}{2}} A_j \left[\cos\left(j + \frac{3}{2}\right)\theta - \frac{j + \frac{3}{2}}{j - \frac{1}{2}} \cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\theta \right] + \sigma_n W^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{W}\right)^{j+2} B_j [\cos(j+2)\theta - \cos(j\theta)] \quad (50)$$

em que σ_n é a tensão nominal, a é a metade do comprimento da trinca e W é a metade da largura da placa. Depois disso, Fett mostrou como fica a componente σ_{xx} para $\theta = 0$:

$$\sigma_{xx}(\theta=0) = -\sigma_n \sum_{j=0}^{\infty} A_j \left(\frac{a-x}{W}\right)^{j-\frac{1}{2}} \frac{(2j+3)(2j+1)}{(2j-1)} - \sigma_n \sum_{j=0}^{\infty} 4B_j \left(\frac{a-x}{W}\right)^j (j+1) \quad (51)$$

Ao se analisar o primeiro termo, que corresponde $j = 0$, pode-se relacionar A_0 com K_I :

$$\sigma_{xx}(\theta=0) = -\sigma_n \sum_{j=0}^{\infty} A_j \left(\frac{a-x}{W}\right)^{j-\frac{1}{2}} \frac{(2j+3)(2j+1)}{(2j-1)} - \sigma_n \sum_{j=0}^{\infty} 4B_j \left(\frac{a-x}{W}\right)^j (j+1) \quad (52)$$

O termo com coeficiente B_0 representa a tensão σ_{xx} total localizada na ponta da trinca ($x = a$).

$$\sigma_{xx}|_{x=a}(\theta=0) = -4 \sigma_n B_0 \quad (53)$$

Essa tensão σ_{xx} total inclui as contribuições que estão presentes para a localização $x = a$ em uma estrutura não trincada, $\sigma_{xx}^{(0)}|_{x=a}$, e o termo adicional que é gerado exclusivamente pela trinca. É essa contribuição que é a *T-stress*. Dessa maneira, a *T-stress* para o caso da placa de Griffith é dada por:

$$T_{stress} = -4 \sigma_n B_0 - \sigma_{xx}^{(0)}|_{x=a} . \tag{54}$$

A seguir, mostra-se em termos de estimativas de zonas plásticas, que a *T-stress* e o primeiro termo da série de Williams são equivalentes quando se usa a Eq. (50). Para isso, utiliza-se o exemplo da placa retangular com uma trinca central com uma relação de $a/W = 0,1$.

A Figura 56 mostra que a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

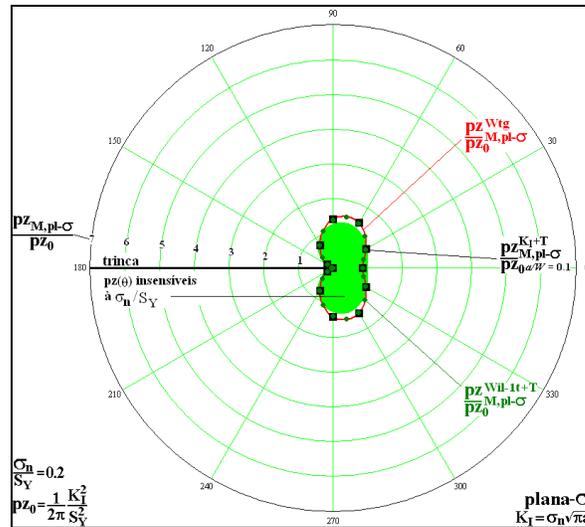


Figura 56 – Comparação das estimativas $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$, $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ sob tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

A Figura 57 mostra que a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

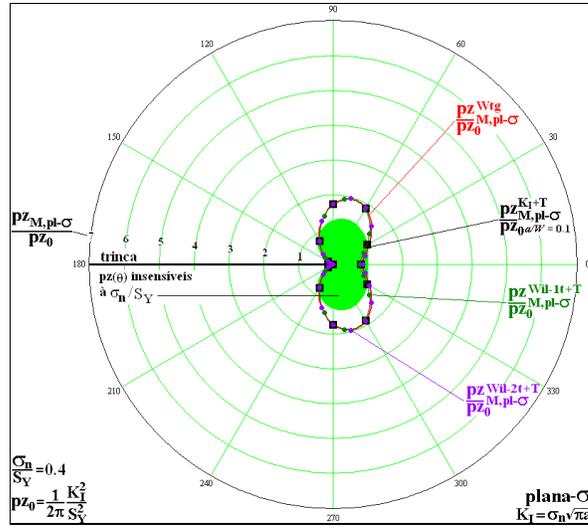


Figura 57 – Comparação das estimativas $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$, $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$ sob tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

A Figura 58 mostra que a estimativa $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

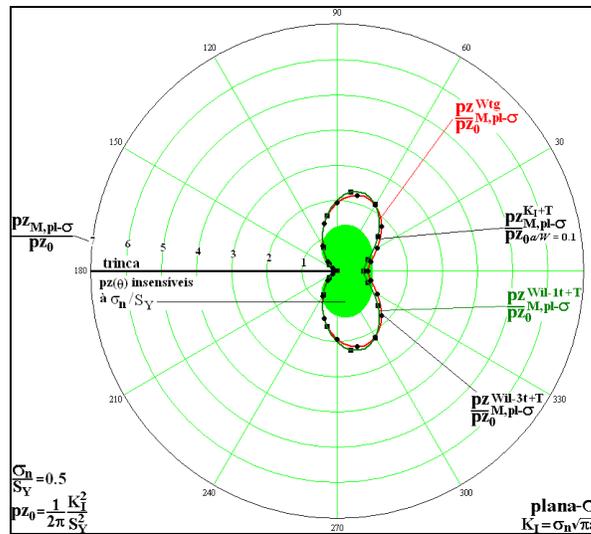


Figura 58 – Comparação das estimativas $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$, $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$ sob tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

A Figura 59 mostra que a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

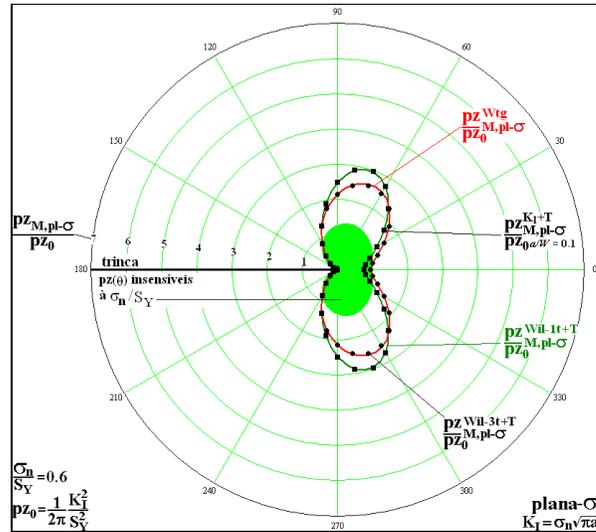


Figura 59 – Comparação das estimativas $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$, $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ sob tensão plana com $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

A Figura 60 mostra que a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

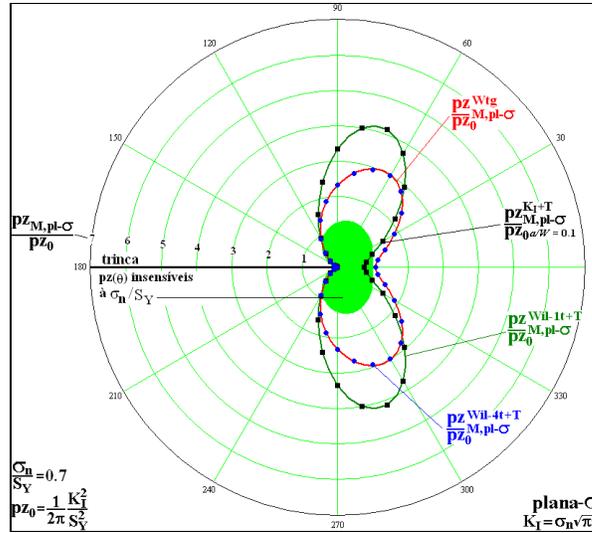


Figura 60 – Comparação das estimativas $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$, $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$ sob tensão plana com $\sigma_x/S_Y = 0,7$.

A Figura 61 mostra que a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com $\sigma_x/S_Y = 0,8$.

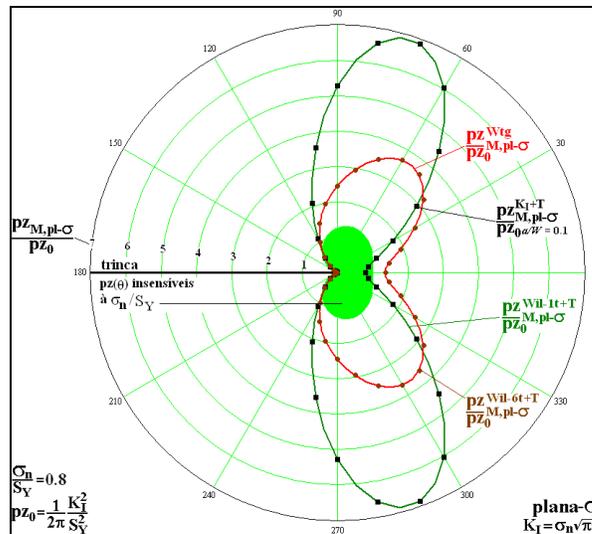


Figura 61 – Comparação das estimativas $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$, $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$ sob tensão plana com $\sigma_x/S_Y = 0,8$.

A Figura 62 mostra que a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

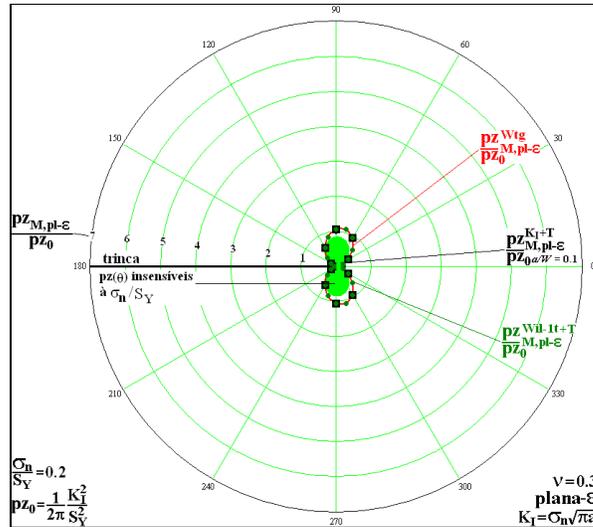


Figura 62 – Comparação das estimativas $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$, $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ sob deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,2$.

A Figura 63 mostra que a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

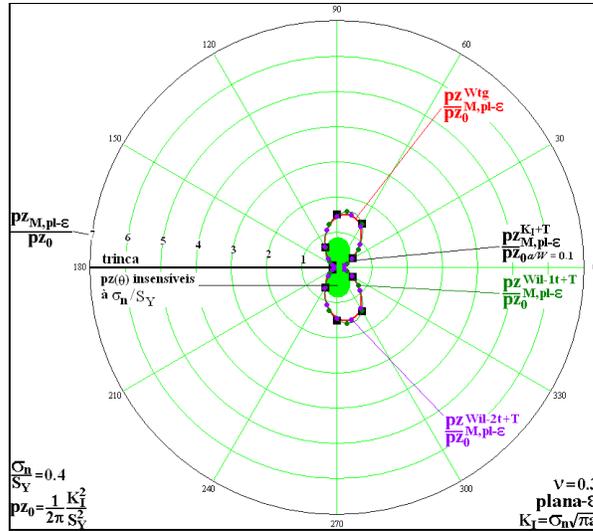


Figura 63 – Comparação das estimativas $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{Wil-1t}$, $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{West}$ e $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{K_I+T}$ sob deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,4$.

A Figura 64 mostra que a estimativa $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

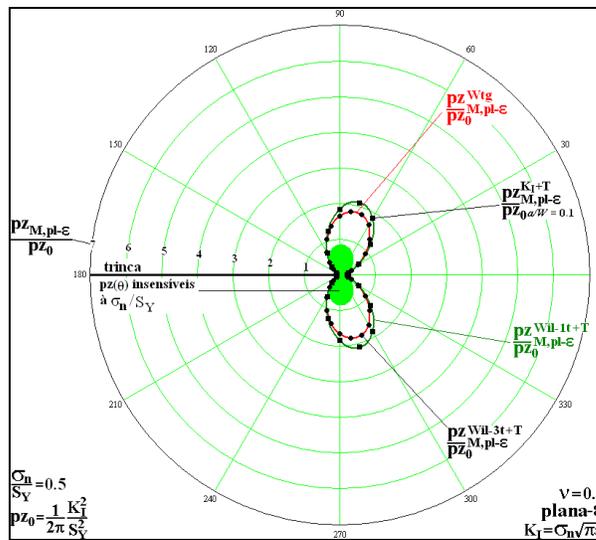


Figura 64 – Comparação das estimativas $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{Wil-1t}$, $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{West}$ e $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{K_I+T}$ sob deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,5$.

A Figura 65 mostra que a estimativa $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

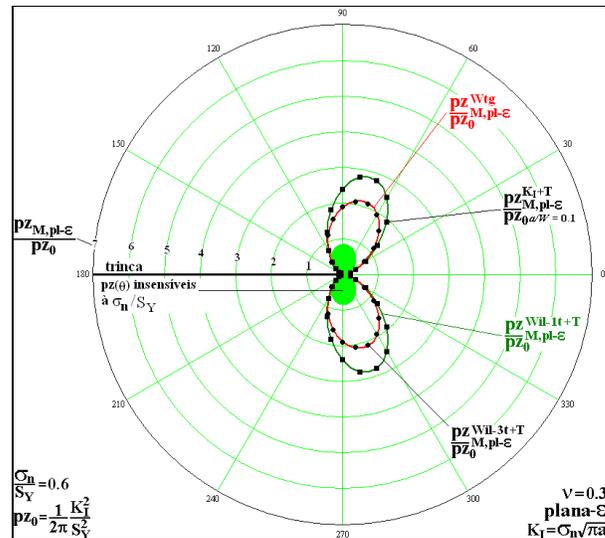


Figura 65 – Comparação das estimativas $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$, $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ sob deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,6$.

A Figura 66 mostra que a estimativa $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais. A análise é feita sob o estado plano de deformação com $\sigma_n/S_Y = 0,7$. Em seguida a Figura 67 mostra que a estimativa $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ e a estimativa $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ são iguais para $\sigma_n/S_Y = 0,8$ sob o estado plano de deformação.

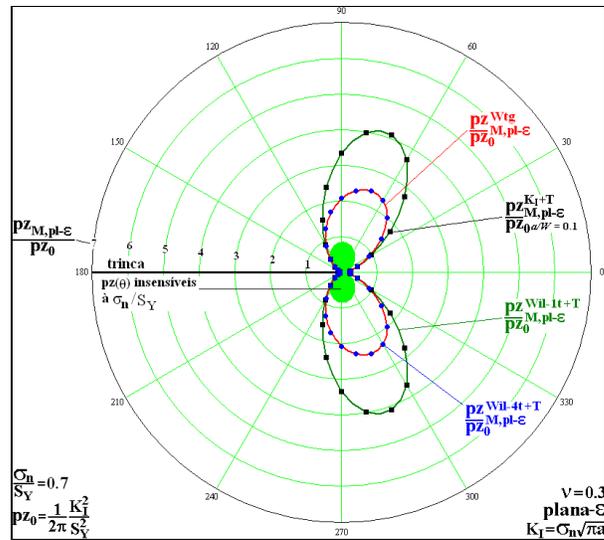


Figura 66 – Comparação das estimativas $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-t}$, $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ sob deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,7$.

A Figura 67 mostra o caso de deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

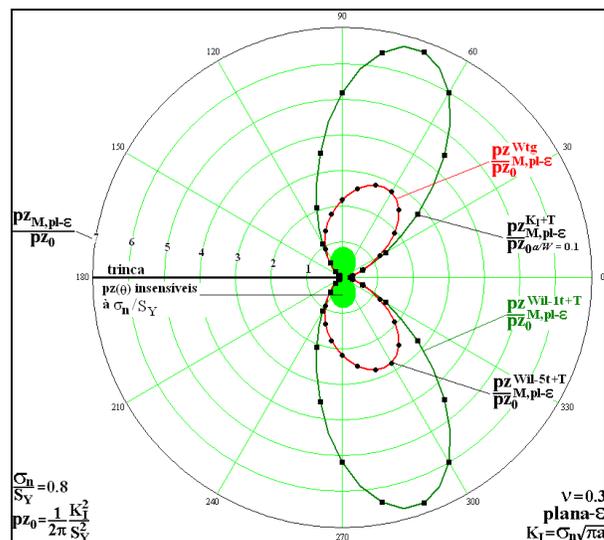


Figura 67 – Comparação das estimativas $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-t}$, $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$ e $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$ sob deformação plana com $\sigma_n/S_Y = 0,8$.

3.7. Conclusões do capítulo e comentários importantes sobre as estimativas analíticas das zonas plásticas a partir do uso da MFLE

Até agora, foram mostradas estimativas de zonas plásticas obtidas a partir do truncamento de quatro campos de tensões, que são: o campo de tensões gerado a partir do K_I , o campo de tensões obtido a partir do K_I mais T -stress, o campo de

tensões gerado pela função de tensão de Westergaard e pelo campo de tensões obtido pela série de Williams. Entende-se por truncamento do campo de tensões a definição do contorno da zona plástica quando o valor da tensão de Mises for igual a tensão de escoamento do material, conforme indica a Eq. (10).

O campo de tensões obtido a partir do K_I além de não satisfazer as respostas esperadas e as condições de contorno, geram estimativas $p_z(\theta)_M$ que são insensíveis à relação σ_n/S_Y . Essa insensibilidade não acontece no campo de tensões gerado a partir da adição da *T-stress* na componente σ_{xx} obtida a partir do K_I , conforme se viu em dois exemplos, o caso do disco circular com uma trinca interna e o caso da placa retangular com uma trinca centrada.

O exemplo do disco circular com uma trinca interna mostrou que a adição da *T-stress* faz com que as $p_z(\theta)_M$ sejam sensíveis à σ_n/S_Y e aos parâmetros geométricos. Entretanto, a adição da *T-stress* na componente σ_{xx} não resolve o problema da componente σ_{yy} que é gerada por K_I para o exemplo da placa de Griffith, pois conforme foi comentado, tem-se $\sigma_{yy}(x = \infty) = 0$ em vez de se ter $\sigma_{yy}(x = \infty) = \sigma_n$.

Outra observação importante é que as estimativas $p_z(\theta)_M$ obtidas a partir de K_I mais *T-stress* são normalmente maiores que as estimativas $p_z(\theta)_M$ obtidas a partir da função de tensão de Westergaard. Essa diferença aumenta conforme cresce a relação σ_n/S_Y . Entretanto, partindo do princípio que a função de tensão de Westergaard é uma função de tensão, e que por isso, satisfaz as condições de equilíbrio, pode-se concluir que ela é a solução linear elástica do problema idealizado para o caso da placa de Griffith por também satisfazer as condições de contorno e de superfície livre. Portanto, as estimativas lineares elásticas das zonas plásticas obtidas por uma função de tensão de Westergaard são geradas a partir da solução matemática do problema elástico plano de corpos trincados.

O campo de tensões gerado a partir da série de Williams, que nada mais é do que escrever a função de tensão de Westergaard em forma de uma série infinita, mostra os efeitos dos números de termos da série na estimativa das zonas plásticas. A equivalência entre a série de Williams e a função de tensão de Westergaard foi mostrada em termos de estimativa de zonas plásticas, pois, independentemente do valor σ_n/S_Y , as duas estimativas são idênticas conforme se aumente o número de termos da série. Ainda no exemplo da placa de Griffith

uniaxialmente tracionada, mostrou-se que a *T-stress* gera estimativas $p_z(\theta)_M$ idênticas as estimativas $p_z(\theta)_M$ obtidas a partir da série de Williams com apenas um termo. Como para altos valores σ_r/S_Y são necessários mais termos na série de Williams para ajustar as estimativas das zonas plásticas obtidas a partir da função de tensão de Westergaard, conclui-se que a adição da *T-stress* não é suficiente para estimar as zonas plásticas do problema linear elástico completo para altos valores de σ_r/S_Y .

O problema dos campos lineares de tensões obtidos pelo K_I , K_{II} mais *T-stress*, série de Williams e pela função de tensão de Westergaard é que eles geram tensões singulares na ponta das trincas. Essas tensões singulares são características do problema matemático, elas não reproduzem o real comportamento mecânico, pois nenhum material suporta tensão infinita, ou ele rompe ou ele plastifica. Para tentar contornar esse problema, o próximo capítulo apresenta algumas propostas de correção das zonas plásticas geradas a partir dos campos de tensões lineares elásticos e que apresentam singularidade na ponta da trinca. Primeiramente, são apresentadas propostas de correção para o caso em que se tem um material perfeitamente plástico. Em seguida, são apresentadas propostas que tentam considerar os efeitos do encruamento nas estimativas $p_z(\theta)_M$.