

ESTRATÉGIA DE OFERTA DE AGENTES HIDRELÉTRICOS PRICE-TAKERS NO NORD POOL

Este capítulo apresenta a formulação detalhada do modelo de otimização estocástica usado para determinar a estratégia de oferta e de operação de um agente hidrelétrico *price-taker* atuando no Nord Pool, incluindo suas ofertas no mercado Elbas (mercado de ajustes *intra-day*).

Para vender energia no mercado de curto-prazo, ou mercado *spot*, os agentes devem submeter seus lances de preço/quantidade para o Nord Pool, expressos por 24 curvas (uma para cada hora do dia seguinte) com as quantidades de energia que se dispõe a gerar em função dos possíveis preços *spot* resultantes de cada hora.

Atualmente a preparação das curvas de oferta por parte dos agentes é baseada somente em modelos de otimização da operação de curto prazo, e alguns softwares comerciais são usados para isso, entre eles o SHOP, desenvolvido pelo SINTEF [37][48][49][50], o NCP, desenvolvido pela PSR [36]. Todos eles adotam uma abordagem determinística do problema, ou seja, os preços *spot* e as vazões afluentes futuras são considerados conhecidos *a priori*, para todo o horizonte de tempo.

Apesar de essas ferramentas otimizarem a operação de curto prazo das usinas, nenhuma delas ainda trata a parte de determinar os lances ótimos para os leilões no mercado *spot*. Depois de obtidos os resultados destes modelos, nos quais são definidas as operações ótimas das usinas, as empresas têm que determinar seus lances para os leilões através de outros artifícios, que não um modelo de otimização.⁵

Apesar de ainda não utilizados em larga escala na indústria, há uma perspectiva de que modelos estocásticos de curto prazo passarão a ser usados em larga escala nos próximos anos, o que fará com que as ofertas de preço/quantidade

⁵ Vale ressaltar que, pela própria confidencialidade das empresas em relação às suas estratégias de oferta, não se pode dizer ao certo se as empresas não utilizam modelos estocásticos para determinação dos lances nos mercados *spot*. Porém, este fato é evidenciado pelos softwares comerciais existentes no mercado, que não possuem este tipo de abordagem do problema.

dos agentes nos leilões não dependam unicamente da experiência e habilidades pessoais das pessoas que trabalham nessa área. Por estes motivos, muitos autores vêm estudando e desenvolvendo estes tipos de modelo ([43] [39] e [67]).

Em [43] os autores desenvolveram um modelo para otimizar a operação de um agente hidrelétrico *price-taker* atuando no Nord Pool. O modelo, ao invés de determinístico, representa incertezas tanto nos preços *spot* quanto nas vazões afluentes. A operação das usinas é simulada para um horizonte de uma semana, e as distribuições de probabilidade das incertezas são aproximadas através de uma árvore de decisões, construída com o método desenvolvido em [63] a partir de cenários multivariados de vazões e preços *spot*. O primeiro estágio se refere à decisão sobre o planejamento da operação para o próximo dia, enquanto os seis estágios seguintes se referem à avaliação do impacto da decisão na operação futura e nas receitas do agente.

Em [39] o trabalho dos autores dá continuidade ao anterior, e inclui no modelo não somente as decisões operativas das usinas, como também as decisões de oferta no mercado *spot*. O trabalho tem por objetivo explorar os efeitos de se considerar explicitamente no modelo as incertezas através da comparação dos resultados da abordagem estocástica com a determinística. Um detalhe incluído no modelo é a possibilidade de o agente fazer ajustes em sua geração no decorrer do dia, ou seja, alterando a quantidade de energia que se comprometeu a gerar associada aos lances aceitos no leilão do dia anterior. Como introduzido na seção 1.2.3, apesar de esses ajustes serem transacionados no mercado de balanços através de leilões, a representação no modelo em questão é feita de forma simplificada, através da penalização dos desvios de geração. Portanto, o agente não é impedido de realizar ajustes em sua geração, mas o modelo faz com que ele naturalmente os evite, impedindo que se beneficie de ajustes propositalmente planejados.

Em [67], trabalho desenvolvido no decorrer desta tese, os autores deram seqüência aos trabalhos anteriores e desenvolveram um modelo para otimizar a oferta de um agente hidrelétrico *price-taker* no mercado *spot*, considerando também possíveis negociações no mercado Elbas. O modelo desenvolvido nas próximas seções segue o mesmo enfoque, a fim de estabelecer estratégias de oferta eficientes nos leilões do mercado *spot*.

De forma a facilitar o entendimento, a subseção seguinte começa mostrando, de forma sucinta, a formulação do problema para um caso determinístico, mais simples, até chegar ao modelo estocástico mais detalhado, que incluindo todas as características técnicas e operativas das usinas e uma representação individualizada de cada unidade geradora, além da representação das incertezas dos preços *spot* e dos preços do mercado Elbas.

3.1

Modelo determinístico de oferta de preço/quantidade

3.1.1

Horizonte de tempo

Os participantes no mercado *spot* devem submeter seus lances sob a forma de uma curva de oferta preço/quantidade para cada uma das 24 horas do dia seguinte. Por esta razão foi utilizado um horizonte de tempo de 24 horas, dividido em períodos de 1 hora de duração, denominados $T = 1, \dots, T$, onde $T = 24$.

3.1.2

A Curva de oferta de preço/quantidade no mercado *spot*

A curva de oferta de preço-quantidade de um participante vendedor contém as informações de quantos MWh ele está disposto a vender para cada preço em cada uma das horas. Como introduzido no capítulo 1, para um agente price-taker, que não tem capacidade de atuar para interferir no mercado, os preços *spot* são considerados variáveis exógenas do modelo.

A curva de oferta do participante deve conter no máximo 64 pontos preço-quantidade para cada hora, variando de zero até o preço teto corrente. Os participantes são cientes que qualquer preço *spot* resultante, que não coincida exatamente com um dos 64 pontos da curva, é interpolado linearmente pelo Nord Pool usando os dois pontos da curva mais próximos dele. A Figura 3.1 abaixo mostra um exemplo de curva para uma determinada hora contendo quatro pontos. O preço *spot* resultante determina o volume aceito y_t (em MWh) para o qual o agente se compromete a gerar durante aquela hora do dia seguinte.

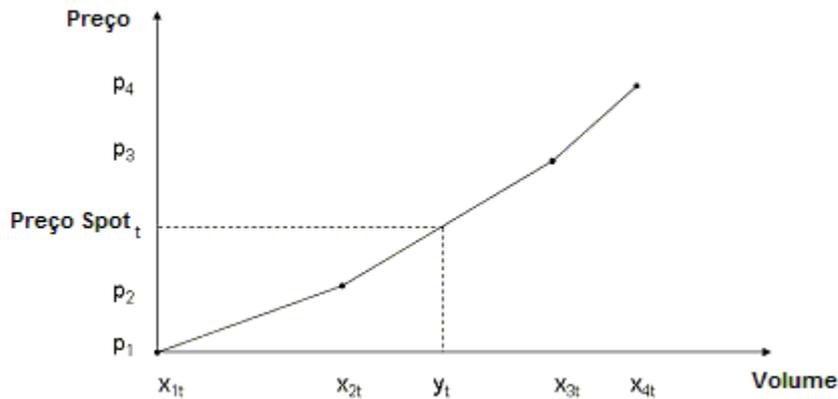


Figura 3.1 – Exemplo de curva de oferta de preço/quantidade para uma determinada hora t .

Selecionar tanto o preço quanto a quantidade para compor a curva de oferta tornaria o problema não-linear, já que haveria uma multiplicação de variáveis de decisão. A forma adotada para se evitar isso foi pré-fixar preços, de forma que somente as quantidades, correspondentes a cada preço, devem ser determinadas. Suponha que $p_i, i \in \mathcal{I}$ denota os possíveis preços, onde $\mathcal{I} = 1, \dots, I$ e $I = 64$. Os preços são fixados através da escolha de pontos equidistantes dentro do intervalo possível de preços⁶. A quantidade de cada ponto referente a cada preço p_i é representada por $x_{i,t}$, assumindo que $i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$.

O preço *spot* para cada etapa t é denominado ρ_t , e a princípio é definido como um dado determinístico. O volume despachado de cada lance horário é denominado y_t , e é determinado pela quantidade correspondente ao preço *spot* na curva preço/quantidade do lance, obtida pela interpolação linear entre os pontos preço/quantidade $(p_i, x_{i,t})$.

Em termos dos volumes a curva do lance pode ser expressa por:

$$y_t = \begin{cases} \frac{\rho_t - p_1}{p_2 - p_1} x_{2t} + \frac{p_2 - \rho_t}{p_2 - p_1} x_{1t} & , \text{if } p_1 \leq \rho_t < p_2 \\ \vdots & \\ \frac{\rho_t - p_{i-1}}{p_i - p_{i-1}} x_{it} + \frac{p_i - \rho_t}{p_i - p_{i-1}} x_{i-1,t} & , \text{if } p_{i-1} \leq \rho_t < p_i \\ \vdots & \\ \frac{\rho_t - p_{I-1}}{p_I - p_{I-1}} x_{It} + \frac{p_I - \rho_t}{p_I - p_{I-1}} x_{I-1,t} & , \text{if } p_{I-1} \leq \rho_t \leq p_I. \end{cases} \quad (3.1)$$

⁶ Alguns autores escolhem estes pontos de forma a concentrá-los mais no intervalo onde é maior a probabilidade de resultar o preço spot, porém sempre com a presença dos valores mínimos e máximos possíveis.

A quantidade do lance $(x_{i,t})$ do agente deve ser no máximo igual à sua potência máxima (Pot_{max}), e, portanto, a seguinte restrição deve ser adicionada:

$$x_{i,t} \leq Pot_{max}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \quad (3.2)$$

É natural que a curva de oferta preço/quantidade seja crescente, ou seja, quanto maior o preço *spot* maior é a disposição em gerar do agente. Para garantir esse comportamento a seguinte restrição é adicionada ao modelo:

$$x_{i,t} \leq x_{i+1,t}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \quad (3.3)$$

Vale ressaltar que em princípio esta restrição poderia ser omitida, já que o Nord Pool não requer que o lance seja feito dessa forma. A omissão desta restrição, no entanto, não afeta os valores ótimos da função objetivo do modelo.

Uma vez que os preços p_i são pré-fixados, as equações (3.1) podem ser simplificadas. Para uma etapa $t \in \mathcal{T}$, o preço *spot* ρ_t está localizado entre dois pontos adjacentes, e os restantes são irrelevantes para determinar a quantidade do lance aceita. Assumindo que $i(t) = \max\{i \in \mathcal{I} : p_i \leq \rho_t\}$, o lance aceito resultante (y_t, ρ_t) está localizado no segmento de reta entre $(x_{i(t)t}, p_{i(t)})$ e $(x_{i(t)+1t}, p_{i(t)+1})$. Portanto, (3.1) pode ser escrito como:

$$y_t = \frac{\rho_t - p_{i-1}}{p_i - p_{i-1}} x_{i,t} + \frac{p_i - \rho_t}{p_i - p_{i-1}} x_{i-1,t}, \quad \text{se } p_{i-1} \leq \rho_t < p_i \quad (3.4)$$

ou, equivalentemente:

$$y_t = \frac{\rho_t - p_{i(t)}}{p_{i(t)+1} - p_{i(t)}} x_{i(t)+1t} + \frac{p_{i(t)+1} - \rho_t}{p_{i(t)+1} - p_{i(t)}} x_{i(t)t}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (3.5)$$

Uma vez que todas as quantidades dos lances aceitos são remuneradas pelo preço *spot* resultante, a receita com as vendas de energia é expressa por:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \rho_t y_t \quad (3.6)$$

As curvas de oferta de preço/quantidade descritas nesta seção são também chamadas de lances horários, uma vez que são definidas uma para cada hora. Outros tipos de lances possíveis de serem usados no Nord Pool são apresentados no anexo A, além das explicações de porque não foram considerados no modelo.

3.1.3

Negociações no mercado Elbas

Para modelar o mercado Elbas são incluídas as variáveis $z_t \in \mathbb{R}$, que representa a quantidade de energia vendida em cada hora $t \in \mathcal{T}$, e φ_t , que representa o preço transacionado no mercado Elbas de cada hora t .

Dado que qualquer participante pode vender ou comprar energia no Elbas, a variável z_t pode assumir valores tanto positivos, representando vendas, quando negativas, representando compras.

A quantidade transacionada no Elbas (z_t) do agente é limitada à sua potência máxima (Pot_{max}), e, portanto, a seguinte restrição deve ser adicionada:

$$-Pot_{max} \leq z_t \leq Pot_{max}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \quad (3.7)$$

A receita (ou despesa) da empresa no mercado Elbas é expressa por:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \varphi_t z_t, \quad t \in \mathcal{T} \quad (3.8)$$

Vale ressaltar que as compras e vendas no mercado Elbas modeladas nesta tese são motivadas apenas pelos preços praticados neste mercado, ou seja, não são criadas situações hipotéticas de quebra de máquinas ou queda de linhas de transmissão, nem mesmo mudanças inesperadas nas vazões ou demanda. O objetivo da tese é de justamente analisar a atuação dos agentes no mercado Elbas sob condições normais e verificar até que ponto eles deixam de vender energia no mercado spot para vendê-la no Elbas. No modelo também se assume que o mercado Elbas tem liquidez suficiente para garantir que o agente consiga, caso queira, vender nele a totalidade de sua potência.

3.1.4

Receita Total: Mercado Spot + Elbas

Juntamente com os resultados das vendas de energia no mercado spot, definidos na equação (3.6), a receita total da empresa considerando também suas negociações no mercado Elbas é expressa por:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \rho_t y_t + \sum_{t \in \mathcal{T}} \varphi_t z_t \quad , \quad t \in \mathcal{T} \quad (3.9)$$

3.1.5

Operação das usinas hidrelétricas

A quantidade de energia a ser gerada, definida pelos lances aceitos nos leilão, é um compromisso do agente gerador, que deve então definir, dentre todas suas usinas, quais vão ser acionadas a gerar a energia comprometida.

O modelo desenvolvido neste trabalho envolve a operação de três usinas pertencentes à empresa Agder Energi, da Noruega, localizadas na parte superior da cascata do rio Otra, totalizando 719 MW (Pot_{max}). As usinas estão localizadas em cascata, conforme mostra a figura abaixo, com Holen12 e Holen3 localizadas a montante, e Brokke a jusante de cada uma delas. Cada usina contém um reservatório e um número diferente de turbinas, Hole12 com duas, Holen3 com uma e Brokke com quatro.

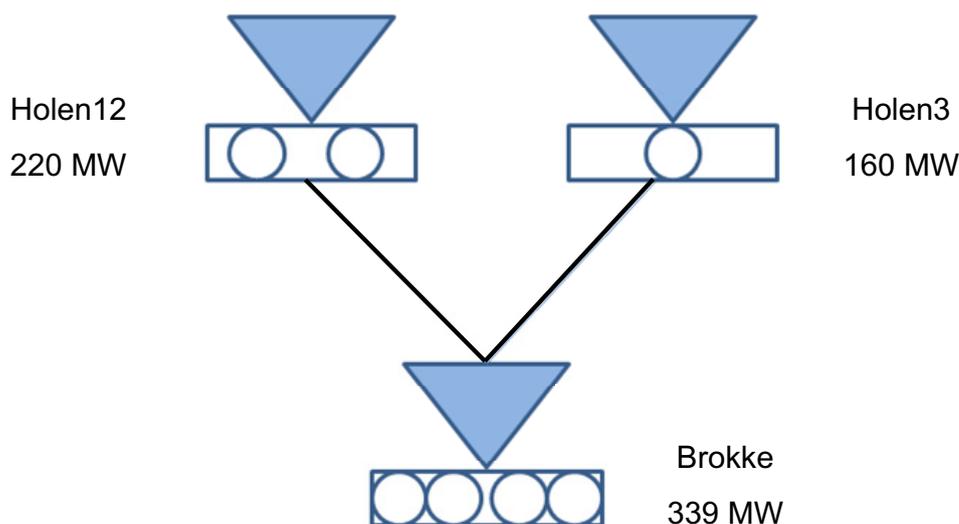


Figura 3.2 – usinas da Agder Energi da parte superior da cascata do rio Otra

Os reservatórios, assim como as usinas, são indexados por J . As turbinas, ou unidades geradoras, são indexadas por $\mathcal{I}_j, j \in \mathcal{J}$. Para o caso de estudo desta tese temos $J = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{I}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{I}_2 = \{3\}$ e $\mathcal{I}_3 = \{4, 5, 6, 7\}$.

3.1.5.1

Balanço hídrico

As variáveis $g_{i,t} \in \mathbb{R}^+$ e $u_{i,t} \in \mathbb{R}^+$ representam, respectivamente, o nível de geração e a quantidade de água turbinada de cada turbina, para $i \in \mathcal{I}_j, j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$. As variáveis $v_{j,t} \in \mathbb{R}^+$, $r_{j,t} \in \mathbb{R}_+$ e $a_{j,t} \in \mathbb{R}^+$ representam, respectivamente, o volume armazenado, a quantidade de água vertida, e a vazão afluente natural de cada usina, para $j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$. As equações de balanço hídrico (ou de conservação de massa) para o caso de estudo são, portanto, para os dois reservatórios a montante:

$$v_{jt} - v_{j,t-1} + u_{jt} + r_{jt} = a_{jt}, \quad t \in \mathcal{T}, \quad j \in \mathcal{J} \setminus \{3\} \quad (3.10)$$

e para o reservatório a jusante:

$$v_{3t} - v_{3,t-1} + u_{3t} + r_{3t} = a_{3t} + \sum_{j=1}^2 (u_{j,t-\tau_j} + r_{j,t-\tau_j}), \quad t \in \mathcal{T} \quad (3.11)$$

onde τ_j é o tempo do percurso da água entre cada reservatório $j \in \mathcal{J} \setminus \{3\}$ a montante e o reservatório a jusante ($j=3$). Os volumes iniciais dos reservatórios são dados por:

$$v_{j0} = v_{j,\text{init}}, \quad j \in \mathcal{J} \quad (3.12)$$

e para impor limites nos níveis dos reservatórios as seguintes restrições são incluídas:

$$v_j^{\min} \leq v_{jt} \leq v_j^{\max}, \quad j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (3.13)$$

3.1.5.2

Eficiência das turbinas

A quantidade de energia gerada por cada turbina em cada etapa é representada pela variável $g_{it} \in \mathbb{R}^+$, $i \in \mathcal{I}_j, j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$, e o correspondente volume turbinado por $u_{it} \in \mathbb{R}^+$, $i \in \mathcal{I}_j, j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$.

A potência gerada por uma hidrelétrica é função do volume de água turbinada e da altura líquida de queda. A altura líquida de queda, por sua vez, é a diferença entre a cota do reservatório (altura do nível da água) e a elevação do canal de fuga (altura do nível da água para onde a água é turbinada), descontada das perdas hidráulicas nos condutos forçados (expressas em metros). A cota do reservatório é uma função do volume armazenado, enquanto a elevação do canal de fuga é função do volume de água turbinada.

A Figura 3.3 mostra o esquema de funcionamento de uma hidrelétrica.

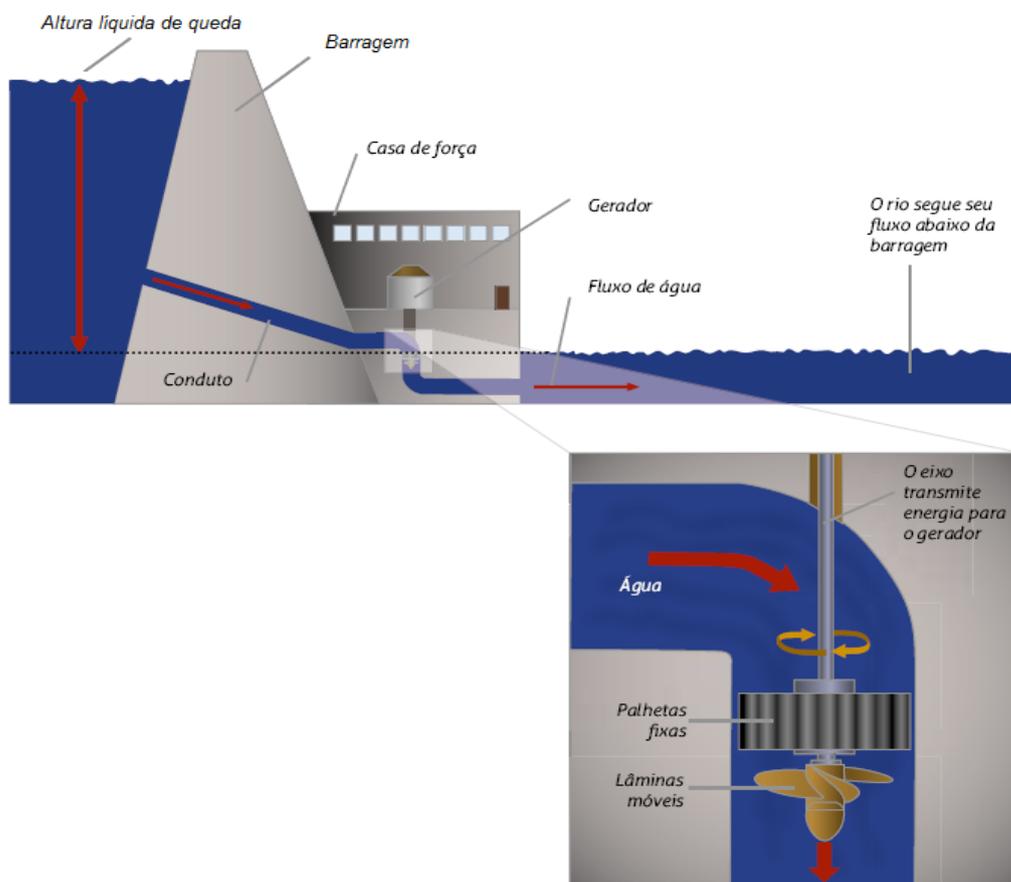


Figura 3.3 – Esquema de funcionamento de uma hidrelétrica

A produção de energia elétrica g (MW) é proporcional ao produto da vazão turbinada u (m^3/s) pela altura de queda líquida h_{liq} (m):

$$g = k \times \eta(u) \times h_{liq} \times u \quad (3.14)$$

onde:

k é uma constante que engloba a aceleração da gravidade e o peso específico da água

$\eta(u)$ é a eficiência do conjunto turbina-gerador (em p.u.)

h_{liq} depende da diferença entre a cota do reservatório e a cota do canal de fuga (que depende do volume turbinado) e das perdas hidráulicas.

Em se tratando de um horizonte de curto-prazo é razoável considerar que a cota do reservatório não se altera significativamente no decorrer do horizonte de estudo (um dia), e pode-se assumir, portanto, que a altura líquida de queda é função apenas do volume turbinado.

A relação entre potência gerada e volume turbinado (ou eficiência da turbina) corresponde a uma função côncava, representada no modelo através de uma função linear por partes, para que sejam incluídas como um conjunto de restrições lineares no modelo. Portanto:

$$g_{it} = G_i(u_{it}), \quad i \in \mathcal{I}_j, \quad j \in \mathcal{J}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (3.15)$$

onde

$$G_i(u_{it}) = \min_{k \in \mathcal{K}} \{f_{ki}^1 u_{it} + f_{ki}^2\}, \quad i \in \mathcal{I}_j, \quad j \in \mathcal{J}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (3.16)$$

e os coeficientes da função linear por partes são f_{ki}^1 , f_{ki}^2 , $k \in \mathcal{K}$, $i \in \mathcal{I}_j$, $j \in \mathcal{J}$ (Figura 3.4), e $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$, onde K é o número de funções utilizadas.

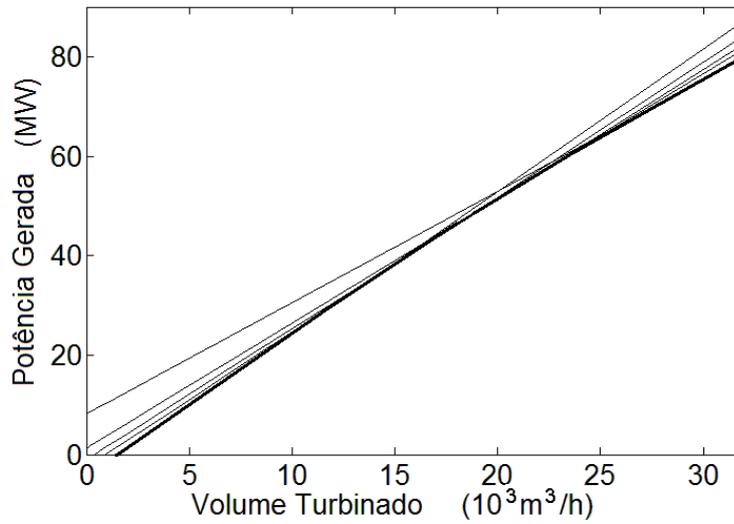


Figura 3.4 – Representação da eficiência da turbina 3 da usina Brokke

O conjunto de restrições incluídas no modelo toma a forma:

$$g_{it} \leq f_{ki}^1 u_{it} + f_{ki}^2, \quad k \in K, \quad i \in I_j, \quad j \in J, \quad t \in T \quad (3.17)$$

Para impor limites na potência gerada as seguintes restrições são incluídas:

$$g_i^{\min} \leq g_{it} \leq g_i^{\max}, \quad i \in I_j, \quad j \in J, \quad t \in T \quad (3.18)$$

Onde g_i^{\min} e g_i^{\max} são as potências mínima e máxima de cada turbina i .

Limites semelhantes são aplicados às variáveis que representam os volumes turbinados, i.e.,

$$u_i^{\min} \leq u_{it} \leq u_i^{\max}, \quad i \in I_j, \quad j \in J, \quad t \in T \quad (3.19)$$

onde u_i^{\min} e u_i^{\max} são o volumes turbinados mínimo e máximo de cada turbina i .

As restrições a seguir são adicionadas para impor limites ao volume total turbinado por cada usina, ou seja, a soma dos volumes turbinados por todas as unidades não pode ultrapassar o limite do conduto-forçado que as abastece, e que é comum a todas elas:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_j} u_{it} \leq U_j^{\max}, \quad j \in \mathcal{J}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (3.20)$$

onde $U_j^{\max}, j \in \mathcal{J}$ é a capacidade máxima do conduto forçado de cada usina (ou de cada conjunto de turbinas).

A modelagem de custos de partida e parada para representar desgastes das unidades geradoras é apresentada no anexo A, além das explicações de porque não foi incluída no modelo desta tese.

3.1.6

Atendimento aos Lances Aceitos

A quantidade de energia a ser gerada em cada hora pelo conjunto de unidades geradoras deve ser igual à energia para atender aos lances aceitos no mercado spot, somada aos ajustes feitos pelas transações no mercado Elbas. Para garantir isso as seguintes restrições são adicionadas ao modelo:

$$y_t + z_t = \sum_{i \in \mathcal{I}_j} g_{it}, \quad j \in \mathcal{J}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (3.21)$$

Onde y_t é o volume despachado de cada lance horário, z_t é o volume vendido ou comprado no mercado Elbas a cada hora, e g_{it} é a geração de cada turbina em cada hora.

3.1.7

Valor da água

Conforme mostrado na seção 2.4, o modelo deve representar o custo de oportunidade de se usar a água para gerar energia hoje ou armazená-la no reservatório para uso futuro. A inclusão destes custos evita os efeitos de final do horizonte dos modelos de otimização da operação, que têm por tendência natural usar toda a água do reservatório no caso de esta não ter valor algum. Estes custos

são representados no modelo através da diferença entre o valor futuro da água armazenada no final e no início do horizonte.

O valor futuro da água armazenada no reservatório corresponde ao valor da função de benefício futuro obtida da cadeia de modelos de longo e médio prazos (conforme descreve a seção 2.5), que corresponde à renda esperada futura para cada do nível de reservatório.

Este valor é representado pela função $V_j(\cdot)$, uma para cada reservatório $j \in \mathcal{J}$. Estas funções são côncavas em relação ao volume armazenado, e aproximadas, como no caso das eficiências das turbinas (seção 3.1.5.2), por uma função linear por partes através de um conjunto de restrições lineares. Os custos de oportunidade são calculados como:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} (V_j(v_{j0}) - V_j(v_{jT})) \quad (3.22)$$

onde

$$V_j(v_{jt}) = \min_{h \in \mathcal{H}} \{d_{hj}^1 v_{jt} + d_{hj}^2\}, \quad j \in \mathcal{J}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (3.23)$$

e onde $d_{hj}^1, d_{hj}^2, h \in \mathcal{H}, j \in \mathcal{J}$ são os coeficientes da função côncava do valor da água (Figura 3.5), e $\mathcal{H} = \{1, \dots, H\}$, onde H é o número de funções lineares por parte utilizadas.

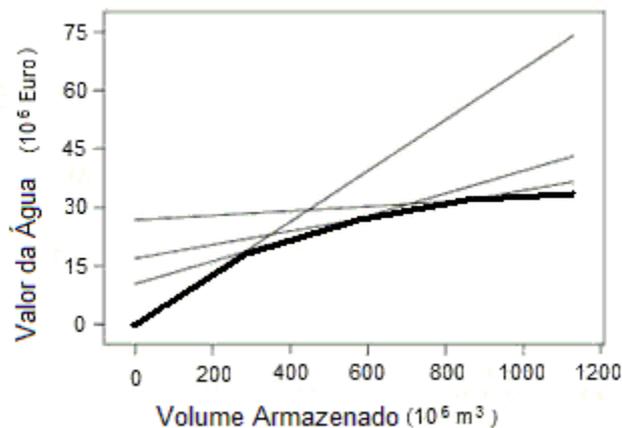


Figura 3.5 – Representação do Valor da Água do reservatório da usina Holen12

O conjunto de restrições incluídas no modelo toma a forma:

$$\mathcal{V}_{jT} \leq d_{hj}^1 v_{j,T} + d_{hj}^2, \quad h \in \mathcal{H}, \quad j \in \mathcal{J} \quad (3.24)$$

onde \mathcal{V}_{jt} é a variável que representa o valor da água no reservatório j na etapa t .

3.1.8

O modelo determinístico de maximização da renda

O objetivo do modelo de programação desenvolvido é maximizar a renda líquida do agente gerador, que corresponde às receitas das vendas no mercado *Spot* e Elbas, menos os custos de oportunidade do uso da água. O modelo determinístico completo é definido como:

$$\max \left(\sum_{t \in T} (\rho_t y_t) + \sum_{t \in T} \varphi_t z_t - \sum_{j \in \mathcal{J}} (\mathcal{V}_{j0} - \mathcal{V}_{jT}) \right) \quad (3.25)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & y_t = \frac{\rho_t - p_{i-1}}{p_i - p_{i-1}} x_{i,t} + \frac{p_i - \rho_t}{p_i - p_{i-1}} x_{i-1,t}, \quad \text{se } p_{i-1} \leq \rho_t < p_i \\ & \quad x_{i,t} \leq x_{i+1,t} \\ & \quad x_{i,t} \leq Pot_{max} \\ & \quad y_t + z_t = \sum_{i \in \mathcal{I}_j} g_{it}, \quad j \in \mathcal{J} \\ & \quad -Pot_{max} \leq z_t \leq Pot_{max} \\ & \quad g_{it} \leq f_{ki}^1 u_{it} + f_{ki}^2, \quad k \in K \\ & \quad g_i^{\min} \leq g_{it} \leq g_i^{\max} \\ & \quad u_i^{\min} \leq u_{it} \leq u_i^{\max} \\ & \quad \sum_{i \in \mathcal{I}_j} U_{it} \leq U_j^{\max} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Curva de oferta} \\ \text{preço/quantidade} \\ \\ \text{Atendimento aos lances} \\ \text{aceitos no leilão} \\ \\ \text{Limites nas transações} \\ \text{no Elbas} \\ \\ \text{Eficiência das turbinas} \\ \text{e restrições de geração} \\ \text{máxima} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
v_{jt} - v_{j,t-1} + u_{jt} + r_{jt} &= a_{jt}, \quad j \in \mathcal{J} \setminus \{3\} \\
v_{3t} - v_{3,t-1} + u_{3t} + r_{3t} &= a_{3t} + \sum_{j=1}^2 (u_{j,t-\tau_j} + r_{j,t-\tau_j}) \\
v_j^{\min} &\leq v_{jt} \leq v_j^{\max}
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} v_{jt} - v_{j,t-1} + u_{jt} + r_{jt} &= a_{jt}, \quad j \in \mathcal{J} \setminus \{3\} \\ v_{3t} - v_{3,t-1} + u_{3t} + r_{3t} &= a_{3t} + \sum_{j=1}^2 (u_{j,t-\tau_j} + r_{j,t-\tau_j}) \\ v_j^{\min} &\leq v_{jt} \leq v_j^{\max} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Restrições de balanço} \\ \text{hídrico e} \\ \text{armazenamento} \\ \text{máximo} \end{array}$$

$$\mathcal{V}_{jT} \leq d_{hj}^1 v_{j,T} + d_{hj}^2, \quad h \in H
\left. \vphantom{\mathcal{V}_{jT} \leq d_{hj}^1 v_{j,T} + d_{hj}^2, \quad h \in H} \right\} \begin{array}{l} \text{Valores da água dos} \\ \text{reservatórios} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
x_{it} &\in \mathbb{R}^+, \quad i \in \mathcal{I} \\
y_t, u_{it}, g_{it}, r_{jt}, v_{jt} &\in \mathbb{R}^+, \quad z_t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathcal{I}_j, \quad j \in \mathcal{J}, \quad t \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

3.2

Modelo estocástico de oferta de preço/quantidade

Para um agente hidrelétrico atuando num mercado *spot*, as tarefas de participar dos leilões diários e produzir energia envolvem incertezas, relacionadas principalmente às vazões afluentes e preços futuros. Porém, como mencionado na seção 2.5, as previsões de vazões no horizonte de curto prazo apresentam grande precisão hoje em dia, o que faz com que a maioria dos autores as considere determinísticas. Uma vez que o horizonte de tempo considerado no modelo desta tese é de 24 horas, este mesmo critério foi adotado, ou seja, as vazões são consideradas determinísticas e as incertezas correspondem apenas aos preços *spot* e Elbas⁷.

Um modelo de programação estocástica é caracterizado por decisões tomadas à medida que mais informações são obtidas, e é dividido em estágios.

As ações que envolvem decisões no planejamento de curto prazo de um agente gerador são:

- Definição da curva de oferta preço/quantidade para o leilão diário de energia;
- Criação de um detalhado programa de operação de suas unidades, a fim de atender a suas obrigações de geração resultantes do leilão do mercado *spot* (lances aceitos);

⁷ A premissa de considerar vazões determinísticas, apesar de adequada em modelos de curto-prazo, é mais realista para casos em que as hidrelétricas possuem reservatório (caso desta tese), uma vez que as gerações de usinas fio d'água são determinadas pura e simplesmente pelas vazões afluentes.

- Ajustes nas obrigações de geração no decorrer do dia através do mercado Elbas, a fim de adequar suas estratégias às novas informações obtidas até a hora em que a energia é fisicamente gerada;
- Operação física das usinas

A definição dos lances no leilão de energia é feita até as 12:00 e sem informação acerca dos preços *spot* do dia seguinte, e essa é a primeira decisão a ser tomada pelo agente. As 14:00 o Nord Pool informa o preço *spot* resultante, definindo assim os lances aceitos e as obrigações de geração para cada uma das horas do dia seguinte.

O programa de operação das usinas é enviado ao operador do sistema até as 19:00, e no dia seguinte, quando o agente deve realizar a operação física das usinas, são feitos os ajustes das obrigações de geração através do mercado Elbas.

Conforme explicado na seção 1.2.4, o preço observado no mercado Elbas para uma dada hora varia no decorrer do dia, portanto, depois de definidos os preços *spot* pelo Nord Pool, ainda há incertezas com relação à evolução dos preços no mercado Elbas. Uma vez que essa informação é revelada gradativamente, uma formulação multi-estágio seria a mais adequada para representar estas flutuações.

Porém, no modelo desenvolvido neste trabalho toda a dinâmica dos preços no Elbas e as múltiplas possibilidades de se transacionar energia nele foram agregadas em uma única decisão para cada hora do dia seguinte. Portanto, haverá um preço do Elbas e uma oportunidade correspondente de se negociar no Elbas para cada hora.

Deste modo, o problema de um agente hidrelétrico atuando em leilões de energia se encaixa no padrão de problemas de programação estocástica de dois estágios. O primeiro estágio envolve as decisões antes de se observar as incertezas e corresponde à definição dos lances nos leilões. O segundo estágio inclui as transações no mercado Elbas e as decisões operativas das usinas, que são feitos com a vantagem de já se ter informações sobre os preços *spot*, e, portanto, os lances aceitos, e sobre os preços praticados no mercado Elbas.

3.2.1

Modelagem das incertezas nos preços *spot* e preços Elbas

Uma vez que os lances no leilão são enviados antes de se saber os preços *spot*, esta decisão é feita sob incerteza, e a estocasticidade é representada através de cenários de preços *spot*⁸.

Para modelar essa incerteza assumimos que os preços *spot* $\{\rho_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ são regidos por um processo estocástico cuja distribuição é conhecida e dada por um número finito de realizações $\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$, denominados cenários. $\pi^s, s \in \mathcal{S}$ denotam as probabilidades dos cenários e $\{\rho_t^s\}_{t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S}}$ são os preços *spot* correspondentes.

Para incorporar incerteza dos preços do Elbas levou-se em consideração que, primeiro, eles são definidos no decorrer do dia seguinte, quando já se sabe o preço *spot* resultante, e segundo, que há uma alta correlação entre os preços *spot* e os preços praticados no Elbas em cada hora (igual a 0.80 usando dados de 1º de janeiro a 30 de novembro de 2007). Neste caso, e assim como no restante do documento, quando forem mencionados os preços do Elbas subentende-se as médias dos preços das negociações no Elbas em cada hora.

A Figura 3.6 abaixo mostra o gráfico das séries históricas dos preços *spot* na Suécia (linha preta) e os preços do mercado Elbas (linha cinza), e a Figura 3.7 mostra a regressão entre estas elas.

⁸ Observe que para um agente price-taker os preços *spot* resultantes são considerados variáveis exógenas do modelo.

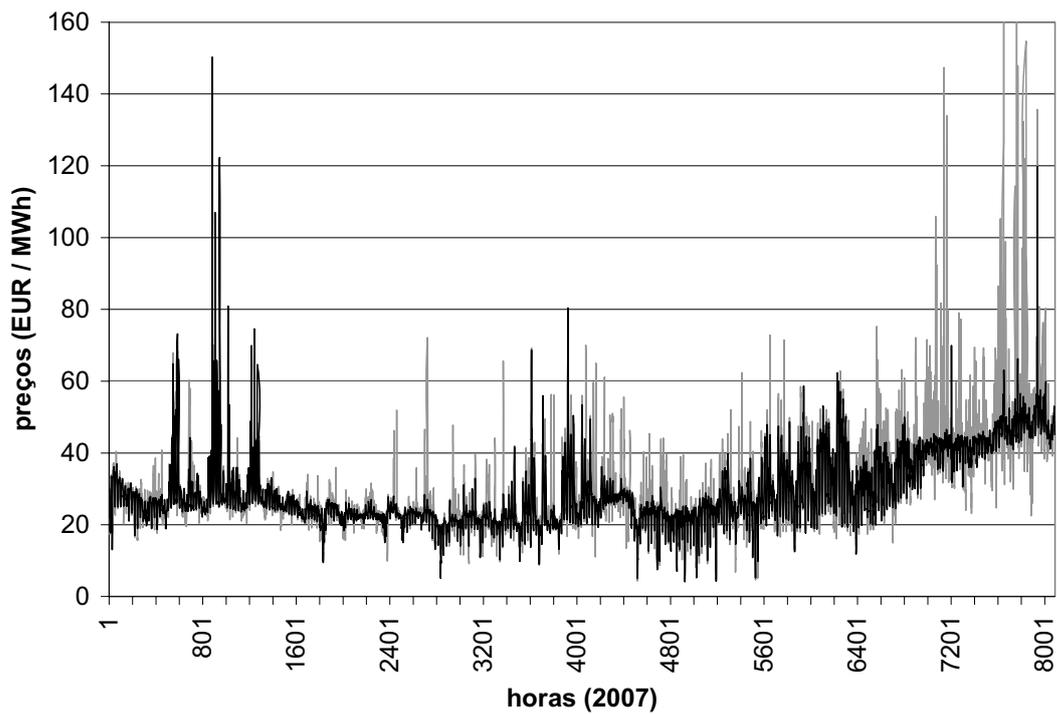


Figura 3.6 – Histórico de preços spot da Suécia (linha preta) e preços do Elbas (linha cinza) (1º de janeiro a 30 de novembro de 2007)

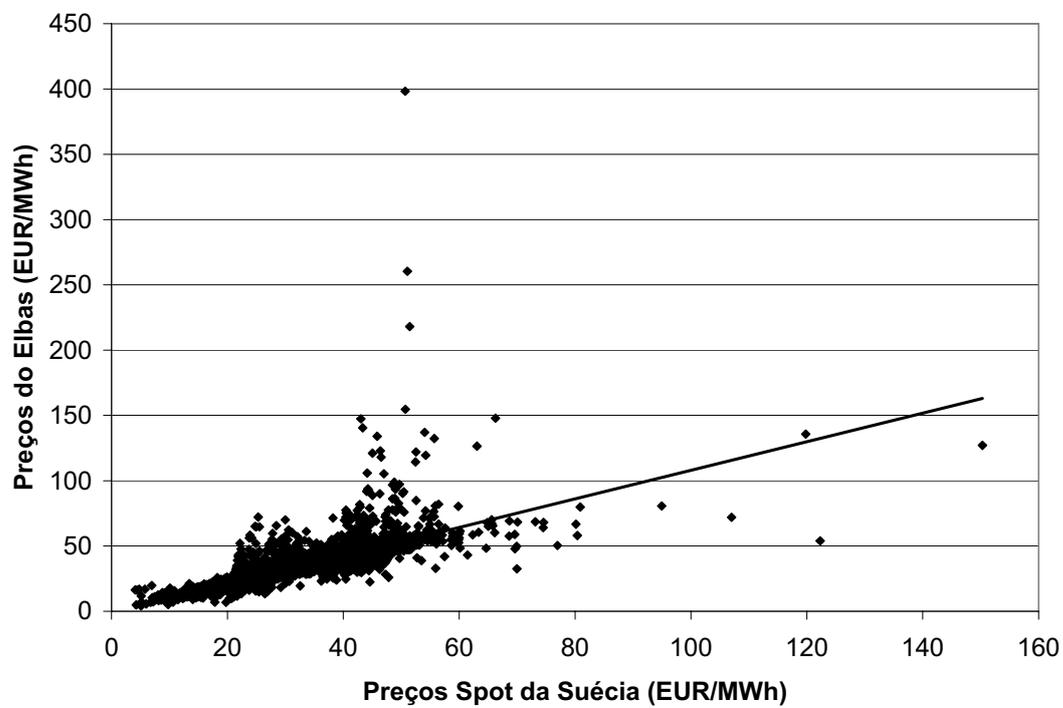


Figura 3.7 – Regressão entre os preços *spot* e Elbas (2007) – EUR/MWh

Uma vez que a Noruega somente ingressou no mercado Elbas há pouco tempo (março de 2009), na época em que foi desenvolvido o estudo não havia dados históricos suficientes para realizar análises, de forma que nos gráficos acima foram usados preços *spot* da Suécia, que é o maior país em volume de energia transacionada no Elbas até então, assim como no cálculo da correlação mencionada.

Vale ressaltar que sistema computacional onde são realizadas transações do Elbas automaticamente controla possíveis restrições de capacidade das linhas de transmissão. Se duas áreas não possuem capacidade de transmissão entre elas, dois agentes, um em cada uma delas, não poderão transacionar energia. Portanto, os preços do Elbas observados por cada agente são correlacionados com os preços *spot* de sua própria área, e isso foi usado para supor que a Noruega e Suécia possuem a mesma relação entre seus preços *spot* e os preços do Elbas.

Devido à alta correlação, assume-se que os preços Elbas são regidos por um processo estocástico cuja distribuição é condicionada aos preços *spot* de cada área. Logo, para cada cenário de preço *spot* $s \in \mathcal{S}$ é gerado um número finito de realizações condicionadas de preços Elbas $e \in \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E} = \{1, \dots, E\}$ ⁹. $\pi^e, e \in \mathcal{E}$ denotam as probabilidades dos cenários de preços Elbas e $\{\varphi_t^{s,e}\}_{t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S}, e \in \mathcal{E}}$ os correspondentes preços Elbas. O capítulo 4 explica com detalhes a geração de cenários de preços *spot* e Elbas utilizadas neste trabalho.

Enquanto as decisões do primeiro estágio $x_{it}, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$, i.e., quantidades dos lances preço/quantidade, são independentes dos preços futuros, as decisões do segundo estágio $z_t^{s,e} \in \mathbb{R}, u_{jt}^{s,e}, g_{jt}^{s,e}, r_{jt}^{s,e}, v_{jt}^{s,e} \in \mathbb{R}_+$, i.e., transações no Elbas e decisões operativas, dependem das realizações futuras dos preços e são indexadas com subscritos para cada cenário de preço *spot* e Elbas $s \in \mathcal{S}, e \in \mathcal{E}$.

As quantidades aceitas dos lances y_t^s não dependem dos cenários de preços Elbas, mas somente das realizações futuras dos preços *spot*, e são indexadas somente pelos subscritos $s \in \mathcal{S}$.

A Figura 3.8 mostra o esquema de todo o processo de decisões para um caso simples com 3 cenários de preços *spot* e, para cada um deles, 3 cenários de preços Elbas. Os quadrados representam decisões a serem tomadas pelo agente,

⁹ Assume-se que há sempre o mesmo número de cenários de preços Elbas (E) para cada cenário de preço *spot* s .

enquanto os círculos correspondem apenas ao cálculo das variáveis depois da decisão do primeiro estágio.

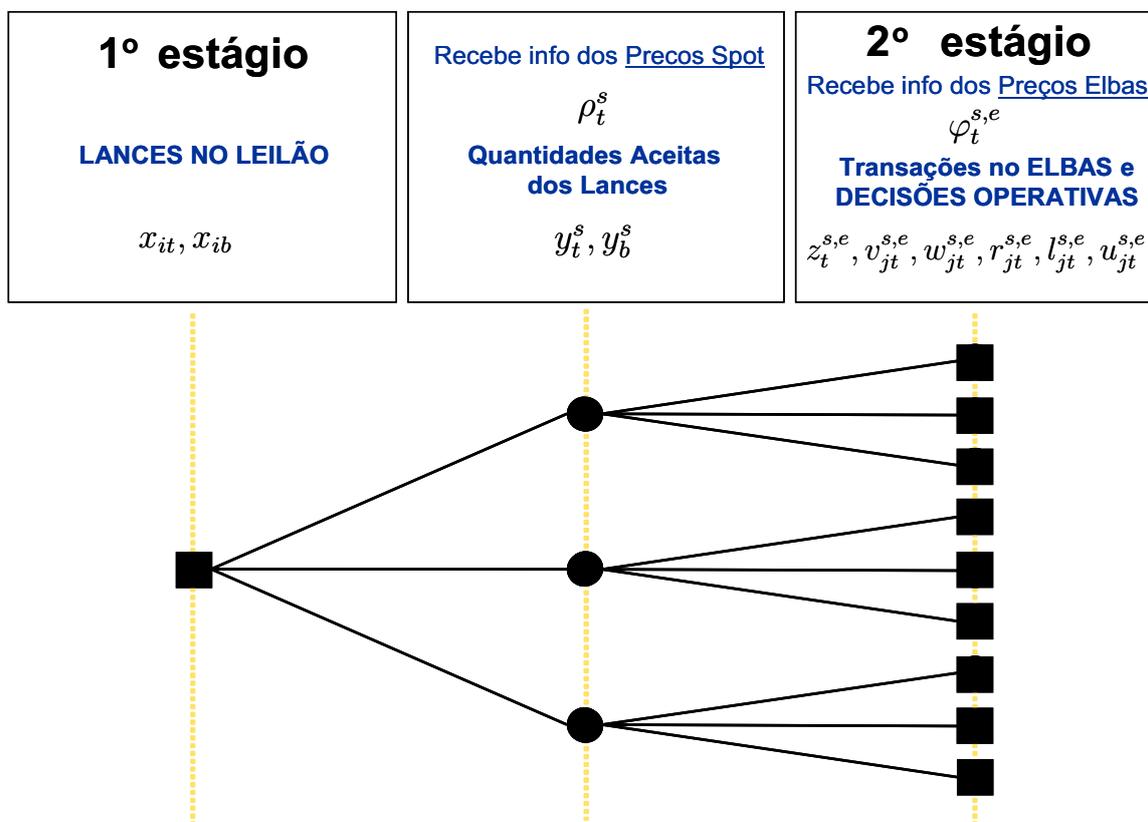


Figura 3.8 – Esquema do processo de decisões

3.2.2

O modelo estocástico de maximização do valor esperado da renda

Analogamente ao modelo determinístico (3.25), apresentado na seção 3.1.8, o objetivo de um agente neutro a risco é maximizar o valor esperado de sua renda líquida, que corresponde às receitas das vendas no mercado *spot* e Elbas, menos a variação do valor da água dos reservatórios. O principal resultado do modelo é a decisão do primeiro estágio, ou seja, a definição da curva de oferta preço/quantidade.

As restrições (3.4) conectam as decisões do primeiro e segundo estágios através da relação entre as quantidades dos lances e as quantidades aceitas no leilão, enquanto as restrições (3.10)-(3.24) se aplicam somente ao segundo

estágio, ou seja, à modelagem das vendas e compras no Elbas e à operação das usinas. As diferenças do modelo estocástico para o modelo determinístico (3.25) dizem respeito às variáveis dos lances aceitos y_t , que agora são indexadas para cada cenário de preço *spot*, e às relacionadas à operação e transações no Elbas, que agora são indexadas para cada cenário de preço *spot* e Elbas. O modelo de programação estocástica de dois estágios, formulado através de seu equivalente determinístico é, portanto:

$$\max \sum_{s \in \mathcal{S}} \pi^s \left(\sum_{t \in \mathcal{T}} \rho_t^s y_t^s + \sum_{e \in \mathcal{E}} \pi^e \left(- \sum_{j \in \mathcal{J}} (v_{j0} - v_{jT}^{s,e}) + \sum_{t \in \mathcal{T}} \varphi_t^{s,e} z_t^{s,e} \right) \right) \quad (3.26)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & y_t^s = \frac{\rho_t^s - p_{i-1}}{p_i - p_{i-1}} x_{i,t} + \frac{p_i - \rho_t^s}{p_i - p_{i-1}} x_{i-1,t}, \quad \text{se } p_{i-1} \leq \rho_t^s < p_i \\ & \quad x_{i,t} \leq x_{i+1,t}, \\ & \quad x_{i,t} \leq Pot_{max} \\ & \quad y_t^s + z_t^{s,e} = \sum_{i \in \mathcal{I}_j} g_{it}^{s,e}, \quad j \in \mathcal{J} \\ & \quad -Pot_{max} \leq z_t^{s,e} \leq Pot_{max} \\ & \quad g_{it}^{s,e} \leq f_{ki}^1 u_{it}^{s,e} + f_{ki}^2 \quad k \in \mathcal{K} \\ & \quad g_i^{\min} \leq g_{it}^{s,e} \leq g_i^{\max} \\ & \quad u_i^{\min} \leq u_{it}^{s,e} \leq u_i^{\max} \\ & \quad \sum_{i \in \mathcal{I}_j} u_{it}^{s,e} \leq U_j^{\max} \\ & \quad v_{jt}^{s,e} - v_{j,t-1}^{s,e} + u_{jt}^{s,e} + r_{jt}^{s,e} = a_{jt}, \quad j \in \mathcal{J} \setminus \{3\} \\ & \quad v_{3t}^{s,e} - v_{3,t-1}^{s,e} + u_{3t}^{s,e} + r_{3t}^{s,e} = a_{3t} + \sum_{j=1}^2 (u_{j,t-\tau_j}^{s,e} + r_{j,t-\tau_j}^{s,e}) \\ & \quad v_j^{\min} \leq v_{jt}^{s,e} \leq v_j^{\max} \end{aligned}$$

Curva de oferta
preço/quantidade

Atendimento aos lances
aceitos

Limites nas transações
no Elbas

Eficiência das turbinas
e restrições de geração
máxima

Restrições de balanço
hídrico e
armazenamento máximo

$$V_{jT}^{s,e} \leq d_{hj}^1 v_{j,T}^{s,e} + d_{hj}^2 \quad h \in \mathcal{H}$$

} Valores da água dos reservatórios

$$\begin{aligned} x_{it} &\in \mathbb{R}_+, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \\ y_t^s, u_{it}^{s,e}, g_{it}^{s,e}, r_{jt}^{s,e}, v_{jt}^{s,e} &\in \mathbb{R}_+, z_t^{s,e} \in \mathbb{R} \\ i \in \mathcal{I}_j, j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S}, e \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

3.2.3

Caracterização da Aversão a Risco

Tomar decisões sob incerteza envolve estabelecer preferências sobre fluxos estocásticos incertos, e essa escolha depende do perfil de risco do agente decisor. Um agente que é neutro a risco prefere um fluxo incerto que lhe forneça o maior retorno médio possível. Já um agente avesso a risco prefere ter um retorno esperado menor, mas com a compensação de ter resultados melhores (ou não tão ruins) nos piores cenários.

Um dos conceitos utilizados para capturar o comportamento dos agentes em problemas de decisão sob incerteza é o de utilidade esperada. Porém, devido à dificuldade de se expressar a aversão a risco através dela de forma prática e objetiva, outras medidas de risco têm sido objetos de estudos recentes, cujos objetivos são atacar o problema de forma mais direta e eficiente.

Diversas formas de relacionar o *trade-off* entre o risco de cenários ruins e o benefício de cenários favoráveis foram criados para auxiliar a tomada de decisão. Dentre elas, a teoria clássica do risco-retorno de Markowitz foi uma das primeiras a ser utilizada [76][77]. O modelo se baseia na teoria de que portfólios de ativos mais arriscados devem apresentar retornos maiores. Seu modelo usa como medida de risco a variância, e reside aí a maior crítica ao seu trabalho, já que a variância por si só atribui iguais pesos aos retornos negativos e positivos. Contudo, na maioria dos casos há preocupação somente com os cenários negativos, e quando se trata de riscos, não se deseja controlar resultados positivos, mas sim precaver-se contra as perdas dos cenários negativos.

Neste contexto, o VaR (*Value at risk*) [75], se consolidou como a medida de risco bastante popular. VaR é a perda financeira máxima de uma carteira para um dado nível de confiança, e isso faz com que o agente possa tomar suas

decisões baseado na maximização do valor esperado dos resultados, mas garantindo que a probabilidade de se ter uma determinada perda financeira possa ser tão pequena quanto se queira. Por exemplo, se para um nível de confiança de 95% o VaR de uma carteira é -10 milhões de dólares, então há apenas 5% de chances do resultado desta carteira ser inferior a esse valor.

Apesar de se tornar popular, a implementação do VaR em problemas de otimização estocástica proporciona um grande aumento de sua complexidade, em função da não convexidade da função que o calcula. Desta forma, muitos estudos foram realizados nesta área para desenvolver formas eficientes de se implementar e acoplar tais restrições em problemas de otimização [78]. Além disso, muitos estudos foram realizados no sentido de se estabelecer as propriedades adequadas e desejáveis das medidas de risco com relação à coerência das soluções e resultados obtidos [79][80]. Segundo Artzner et al. [80], uma medida de risco μ deve atender aos seguinte axiomas, com c sendo uma constante e X uma variável aleatória:

- 1) μ deve ser Monótona: Para toda dupla de variáveis aleatórias, $Y \leq X$, $\mu(Y) \leq \mu(X)$.
- 2) μ deve ser Superaditiva: $\mu(X+Y) \geq \mu(X) + \mu(Y)$.
- 3) μ deve ser Homogenia Positiva: $\mu(c \cdot X) = c \cdot \mu(X)$, para todo $c \geq 0$
- 4) μ deve ser Transladável: $\mu(X + c) = \mu(X) + c$, $c \geq 0$.

Dentre estas características, a superaditividade não é atendida pelo VaR, o que faz com que ele não capture de maneira desejável a redução de risco ao se diversificar uma carteira, tornando-a uma medida de risco errada do ponto de vista de coerência entre risco e retorno.

O CVaR (*Conditional Value at Risk*), discutido na próxima seção, é uma medida de risco que se tornou popular por atender a todas as propriedades citadas, mostrando ser coerente e adequada, independentemente da forma da distribuição dos resultados.

3.2.3.1

Conditional Value at Risk (CVaR)

O CVaR (*Conditional Value at Risk*) tem sido uma métrica de risco bastante utilizada em função da sua capacidade de capturar a presença de cenários catastróficos na distribuição dos retornos, além de atender às propriedades indicadas na seção anterior.

O CVaR é a média condicional dos quantis inferiores ao quantil dos $\alpha\%$ piores cenários, ou seja, diferentemente do VaR, ele não se limita em definir o valor que separa a distribuição entre os $\alpha\%$ melhores cenários dos $(1-\alpha)\%$ piores, mas sim corresponde à média dos $(1-\alpha)\%$ piores cenários.

A Figura 3.9 abaixo mostra a diferença entre o VaR e do CVaR. Ambas as distribuições de retornos possuem o mesmo VaR, mas a distribuição B tem um CVaR menor, ou seja, caso um agente usasse o VaR como métrica de risco, ele estaria indiferente entre as duas distribuições, mas se usasse o CVaR, a distribuição A seria a escolhida, por apresentar um CVaR maior.

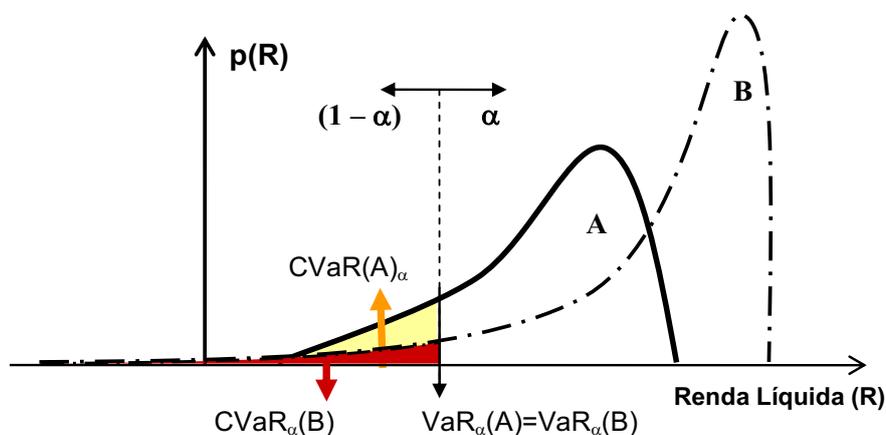


Figura 3.9 – CVaR (Conditional Value at Risk)

Portanto, o CVaR incorpora na decisão do agente o efeito dos cenários de perdas muito grandes, que apesar de terem uma baixa probabilidade, são os cenários a serem evitados a qualquer custo. Além disso, conforme mencionado, o CVaR é uma medida de risco que atende a todos os axiomas apresentados na seção anterior, inclusive ao da superaditividade, ou seja, apresenta uma redução de risco quando há uma diversificação da carteira.

Após o trabalho publicado Rockafellar [78], o CVaR foi impulsionado frente às demais medidas de risco devido às características de sua formulação matemática. Essencialmente, o CVaR pode ser formulado como um problema de otimização linear, o que possibilita a sua implementação e utilização em problemas de programação apenas adicionando um conjunto restrições lineares.

A definição clássica do CVaR_α de uma variável aleatória (v.a.) R , com função de distribuição acumulada $F_R(r) = P(R \leq r)$, e quantil inferior α , é dada por:

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = E[R | \Psi] = \int_{\Psi} R \cdot dF_{R|\Psi} \quad (3.27)$$

onde, $\Psi = \{r: r \leq \text{VaR}_\alpha(R)\}$ é o conjunto de valores de R inferiores a $\text{VaR}_\alpha(R)$, $F_{R|\Psi}$ é função de probabilidade condicionada ao evento $R \in \Psi$ e

$$\text{VaR}_\alpha(R) = \inf_{(r)} \{r: F_R(r) \geq 1-\alpha\} \quad (3.28)$$

Neste caso, $\text{CVaR}_\alpha(R)$ é obtido através do valor esperado condicionado a valores de retornos inferiores ao VaR_α , que pode ser visto como um quantil da v.a. R .

Segundo Rockafellar, o CVaR de uma variável aleatória R também pode ser escrito através do seguinte problema de otimização, o que torna possível sua implementação em problemas de programação de forma eficiente:

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = \text{Maximizar}_{(w)} \{z + E[(R - w)^-]/(1-\alpha)\} \quad (3.29)$$

onde $(.)^-$ é a função truncamento, tal que,

$$(x)^- = x, \text{ se } x \leq 0 \text{ e } (x)^- = 0, \text{ se } x \geq 0 \quad (3.30)$$

Além disso, no ponto ótimo,

$$W^* = \text{argmax}_{(w)} \{w + E[(R-w)^-]/(1-\alpha)\} = \text{VaR}_\alpha(R) \quad (3.31)$$

Assim, considerando os cenários e probabilidades $\{R_s, p_s\}_{s=1,\dots,S}$ que caracterizam a distribuição de R , a formulação (3.27) pode ser reescrita pelo seguinte problema de programação linear:

$$\text{Maximizar}_{(\beta,w)} w + \sum_s p_s \cdot \beta_s \quad (3.32)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \beta_s &\leq 0 & \forall s = 1, \dots, S \\ \beta_s &\leq (1-\alpha_i)^{-1} \cdot [R_s - w] & \forall s = 1, \dots, S \end{aligned}$$

Onde a função truncamento negativo $(\cdot)^{-}$ é representada pelas restrições do modelo (3.32) e inserida na função objetivo através do valor esperado $\sum_s p_s \cdot \beta_s$.

O que possibilita que esta formulação seja implementada por um problema de programação linear, conforme apresentado acima, é o fato de que ela é definida para todo valor de R , diferentemente do que ocorre na formulação (3.27), onde o valor esperado deve ser restrito a valores pertencentes ao conjunto Ψ .

3.2.4

O Modelo com Aversão a Risco: maximização do CVaR

Pelas vantagens apresentadas do CVaR, ele será a medida de risco utilizada neste trabalho. Portanto, o objetivo do modelo de programação de um agente avesso a risco adotado nesta tese é maximizar o CVaR da distribuição das receitas líquidas resultantes.

Para facilitar o entendimento da formulação do modelo de maximização do CVaR, podemos reescrever a função objetivo do modelo (3.26), sem mudança de sentido, como:

$$\begin{aligned} \max \sum_{s \in S} \pi^s \sum_{e \in E} \pi^e \left(\sum_{t \in T} \rho_t^s y_t^s - \sum_{j \in J} (\mathcal{V}_{j0} - \mathcal{V}_{jT}^{s,e}) + \sum_{t \in T} \varphi_t^{s,e} z_t^{s,e} \right) \text{ ou} \quad (3.33) \\ \max \sum_{s \in S} \sum_{e \in E} \pi^s \pi^e \left(\sum_{t \in T} \rho_t^s y_t^s - \sum_{j \in J} (\mathcal{V}_{j0} - \mathcal{V}_{jT}^{s,e}) + \sum_{t \in T} \varphi_t^{s,e} z_t^{s,e} \right) \end{aligned}$$

O modelo de maximização do CVaR é dado por:

$$\max (w + \sum_{s \in S} \sum_{e \in E} \pi^s \pi^e \beta^{s,e})$$

sujeito a

$$\beta^{s,e} \leq \frac{1}{(1-\alpha)} \left(\sum_{t \in T} \rho_t^s y_t^s - \sum_{j \in J} (\mathcal{V}_{j0} - \mathcal{V}_{jT}^{s,e}) + \sum_{t \in T} \varphi_t^{s,e} z_t^{s,e} - w \right) \quad \forall s \in S, \forall e \in E$$

$$\beta^{s,e} \leq 0$$

[mesmas restrições do modelo (3.26)]

onde

$$\beta^{s,e} \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

A constante α define o quantil superior da distribuição para o qual será calculado o CVaR. Por exemplo, para $\alpha = 95\%$ o CVaR será calculada para os 5% piores resultados da distribuição, e os 5% piores cenários serão otimizados em termos médios. Como mostrado na seção anterior, o valor ótimo da variável z será o valor do VaR de 5% da distribuição da renda resultante.

3.2.5

O Modelo com Aversão a Risco: ponderação entre maximização do valor esperado e CVaR da renda

Nesta seção um modelo intermediário é desenvolvido para representar um agente que não é nem totalmente neutro a risco, nem totalmente avesso a risco. Para isso criou-se um parâmetro λ , que irá atribuir pesos para os critérios adotados nos modelos (3.26) e (3.33), em que o agente é neutro a risco e totalmente avesso a risco, respectivamente. A função objetivo passará a ser uma combinação convexa entre os critérios de maximizar o valor esperado e maximizar o CVaR.

Com este modelo consegue-se representar ambos os modelos atribuindo o valor de $\lambda = 0$ para o caso do agente neutro a risco, e $\lambda = 1$ para o caso totalmente avesso a risco. Qualquer valor entre 0 e 1 corresponderá a um perfil de risco intermediário, mais avesso a risco quanto mais próximo de 1, e menos quanto mais próximo de 0.

Este modelo de maximização é dado por:

$$\max (1 - \lambda) \left(\sum_{s \in S} \sum_{e \in E} \pi^s \pi^e \left(\sum_{t \in T} \rho_t^s y_t^s - \sum_{j \in J} (\mathcal{V}_{j0} - \mathcal{V}_{jT}^{s,e}) + \sum_{t \in T} \varphi_t^{s,e} z_t^{s,e} \right) \right) + \quad (3.34)$$

$$+ \lambda \left(w + \sum_{s \in S} \sum_{e \in E} \pi^s \pi^e \beta^{s,e} \right)$$

sujeito a

$$\beta^{s,e} \leq \frac{1}{(1 - \alpha)} \left(\sum_{t \in T} \rho_t^s y_t^s - \sum_{j \in J} (\mathcal{V}_{j0} - \mathcal{V}_{jT}^{s,e}) + \sum_{t \in T} \varphi_t^{s,e} z_t^{s,e} - w \right) \quad \forall s \in S, \forall e \in E$$

$$\beta^{s,e} \leq 0$$

[mesmas restrições do modelo (3.26)]

onde

$$\beta^{s,e} \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

$$\lambda \in [0, 1]$$

O equivalente certo é, por definição, o menor montante determinístico pelo qual o agente aceitaria trocar (que o torna indiferente) sua renda aleatória. Como discutido em [81], um agente que toma suas decisões maximizando o CVaR ou uma combinação convexa entre o CVaR e o valor esperado, tem como equivalente certo exatamente esta métrica. Desta maneira, pode-se afirmar que, se agente adota o CVaR como métrica de decisão, a renda líquida para o qual ele se torna indiferente a um determinado fluxo incerto X é o $\text{CVaR}_\alpha(X)$. Isso pode ser comprovado, uma vez que a equação de indiferença que visa determinar EC_X (equivalente certo de X) assume a seguinte forma: $\text{CVaR}_\alpha(\text{EC}_X) = \text{CVaR}_\alpha(X)$, que é equivalente a $\text{EC}_X = \text{CVaR}_\alpha(X)$, uma vez que CVaR de um valor determinístico (EC_X) é ele mesmo. Assim, adotando uma combinação convexa entre o valor esperado e o CVaR como métrica de preferência, o agente maximiza o valor que ele atribui ao fluxo de renda avaliado, ou seja, seu equivalente certo.