

## 6 Processos Estocásticos

Os processos estocásticos permitem modelar a incerteza na evolução dos preços no tempo e, provendo um mapeamento probabilístico desta solução, permitem fazer previsões dos valores dos preços futuros em função dos preços correntes de curto-prazo e a termo e de um conjunto de parâmetros que descrevem a possível variabilidade desses preços no tempo.

Os principais processos estocásticos para apreçar derivativos são: Movimento Geométrico Browniano (Dixit & Pindyck, 1994; Hull, 1999), Movimento de Reversão a Média e Movimento de Reversão a Média com saltos (Dixit & Pindyck, 1994).

A seguir será mostrado um resumo dos processos citados, mas os detalhes poderão ser verificados nos Apêndice A.

### 6.1. Movimento Geométrico Browniano

Em geral os mercados financeiros utilizam o MGB na precificação de derivativos, como no popular modelo de *Black and Scholes* (Mayo, 2009). Usado para modelagem de evolução dos preços, o MGB é um processo estocástico contínuo. Sua aplicação na modelagem matemática de alguns fenômenos no mercado financeiro foi destacada por ser próprio para descrever movimentos aleatórios e possuir uma vantagem adicional de obter valores estritamente maiores que zero, pois os preços são estritamente positivos.

Apesar da sua aceitação, o modelo apresenta pressupostos tais como: o crescimento constante do preço, a dificuldade de captura da estrutura complexa de volatilidade dos ativos energéticos (volatilidade estrutural e advinda de características de sazonalidade, flutuações e tendências) e a incapacidade do MGB de gerar picos de preços com a magnitude dos encontrados no setor elétrico que quando analisados desaconselham a sua utilização neste mercado.

### 6.2. Movimento de Reversão à Média

A modelagem discreta por árvore binomial recombinante desenvolvida por Cox et al. (1979) para avaliar opções reais encontra ampla aceitação por

generalizar o modelo de Black & Scholes (1973) e Merton (1973) devido a sua simplicidade de uso, flexibilidade e de convergir de forma fraca para um Movimento Geométrico Browniano, quando o intervalo de tempo diminui. Muitas vezes, no entanto, a incerteza a ser modelada não segue um processo estocástico similar a um MGB, como é frequentemente o caso quando os fluxos de caixa de um projeto são dependentes de preços que dependem de uma média de longo prazo, como é o caso de *commodities* não financeiras.

Infelizmente o Movimento de Reversão à Média (MRM) não é tão fácil de aproximar por uma árvore binomial recombinante como o é o MGB. É a razão pela qual a simulação de Monte Carlo ou árvores discretas trinomiais (Hull, 1999) são geralmente usadas para modelar um MRM, que é um processo de *Markov* no qual o sentido e a intensidade do desvio são dependentes no preço corrente, e devem reverter a uma média de equilíbrio de mercado a qual é assumida como sendo o preço médio de longo prazo.

A forma mais simples de MRM é o processo de fator único de Ornstein-Uhlenbeck (Hull, 1999), também chamado de MRM Aritmético (vide Apêndice A). Entretanto o processo utilizado neste trabalho foi o modelo de Schwartz (Schwartz, 1997) conforme equação abaixo que propõe um MRM geométrico devido à vantagem de utilizar o logaritmo natural dos preços e porque geralmente é assumido que o preço das *commodities* tem distribuição log-normal, o que é conveniente porque então  $P$  (preço) não pode ser negativo.

$$d(\ln P) = \eta(\ln P_{\text{barra}} - \ln P)dt + \delta dz \quad (5)$$

A lógica por trás de um MRM vem da micro-economia: quando os preços estão deprimidos (ou abaixo de sua média de longo prazo), a demanda desse produto tende a aumentar ao passo que sua produção tende a diminuir. Isso é devido ao fato de que o consumo de uma *commodity* com preço baixo aumenta enquanto os baixos retornos para as empresas produtoras as levarão a postergar investimentos e fechar unidades menos eficientes, reduzindo assim a disponibilidade do produto. O oposto ocorrerá se os preços estiverem altos (ou acima da média de longo prazo). Estudos empíricos (Pindick & Rubinfeld, 1991) demonstraram que com preços de petróleo, por exemplo, a lógica da micro-economia indica que o processo estocástico inclui um componente MRM. No

entanto testes econométricos somente rejeitam o MGB para séries extremamente longas.

Apesar de o MGB ser amplamente utilizado para modelagem de uma ampla gama de incertezas por ser de fácil utilização, o MRM é considerado mais adequado para modelagem de preços de *commodities* e taxas de juros.

A reversão à média é uma modificação do MGB, em que as variações de precisão são completamente independentes umas das outras, porém inter-relacionadas. O modelo incorpora melhor a tendência dos preços de eletricidade de gravitar em torno de um nível de preço “normal” de equilíbrio ditado pelo custo de geração e nível de demanda (Mayo, 1999).

### 6.3. Movimento de Reversão à Média com Saltos

Os modelos de difusão que incorporam a reversão à média captam com sucesso a natureza dos preços de energia, particularmente sua tendência de oscilar de modo aleatório, afastando-se do nível de preço determinado pelo custo de geração para depois retornar a este nível. Estes modelos, no entanto, não descrevem o que talvez seja o gerenciamento de risco, o fenômeno mais importante do preço de curto prazo da energia elétrica: o pico descontínuo do preço.

Os preços da energia se caracterizam pela ocorrência abruptas e imprevisíveis variações, ou seja, grandes variações conhecidas como picos ou saltos. Estes picos momentâneos resultam em choques provocados por restrições na geração e na transmissão e se refletem no preço de curto-prazo.

A modelagem explícita dos picos aleatórios do preço é um comportamento que não pode ser desprezado nos modelos de reversão à média que descrevem a dinâmica dos preços no mercado de energia elétrica.

Na prática os preços de energia não saltam a um novo nível e nele permanecem, ao contrario eles revertem rapidamente ao nível anterior. O uso da reversão à média aliado à representação destes picos permite simular este efeito.

No modelo de reversão com picos (Dixit & Pinkyck, 1994), as variações dinâmicas podem ser divididas em duas formas distintas:

- Um processo contínuo de difusão com preços modelados pelo movimento de reversão à média.

- Um processo descontínuo de picos, modelado por uma distribuição de Poisson

Entretanto no mercado brasileiro de energia em que o histórico de preços é muito curto, a componente descontínua deste processo que define a ocorrência, as amplitudes dos picos e seu desvio padrão dentro de um curto período de tempo tornam-se de difícil mensuração e, por isso, este processo não é utilizado neste trabalho.