

Projeto de Graduação



20/12/2011

OTIMIZAÇÃO ADAPTATIVA DE PORTFÓLIO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES COM CRITÉRIOS DE ROBUSTEZ

Carlos Augusto de Lima Resende



www.ele.puc-rio.br

Projeto de Graduação



OTIMIZAÇÃO ADAPTATIVA DE PORTFÓLIO DE INVESTIMENTO EM AÇÕES COM CRITÉRIOS DE ROBUSTEZ

Aluno: Carlos Augusto de Lima Resende

Orientador: Alexandre Street de Águiar

Co-orientador: Davi Michel Valladão

Trabalho apresentado com requisito parcial à conclusão do curso de Engenharia Elétrica na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Carlos e Cláudia, e minha namorada Julianna por todo o apoio fundamental para o desenvolvimento desse trabalho

Agradeço ainda aos amigos e orientadores Alexandre Street e Davi Valladão pela ajuda e atenção a mim dispensada durante o processo de estudo desse modelo.

Resumo

Este projeto tem como objetivo o desenvolvimento de um modelo de otimização adaptativo para a gestão de um portfólio de ações. São incluídas neste modelo restrições de robustez que visam limitar as perdas deste portfólio. Para demonstrar a eficiência do mesmo, foi implementado um exemplo ilustrativo do seu emprego, utilizando-se algumas ações que fazem parte do IBOVSPA e sendo comparados os resultados de ambos, sem o emprego do modelo e com o uso deste.

Palavras-chave: Otimização; Finanças; Mercado de Ações; Apoio à decisão

Robust optimization of a stock portfolio in Brazilian Markets

Abstract

This project's objective is to develop an adaptative mathematical optimization model with restrictions that provide robustness in order to manage a stock portfolio. The objective of said restrictions is to limit the losses of the chosen portfolio. In order to evaluate its effectiveness, an illustrative example was implemented, using a selection of stocks that are part of the IBOVESPA.

Keywords: Optimization; Finance; Stock Market; Decision Support

Índice

1. Introdução.....	7
2. Modelagem	8
3. Metodologia	11
4. Apresentação de resultados.....	13
5. Conclusão	21
6. Bibliografia	22

1. Introdução

A otimização de portfólio é um conceito amplamente estudado e documentado. Inicialmente, Markowitz [1][2] criou o modelo de otimização de portfólio baseado em média e variância, onde ele minimiza a variância restringindo um retorno esperado mínimo. A partir da criação da teoria de portfólio moderna por Markowitz, vários outros trabalhos foram desenvolvidos, buscando formas diferentes de otimizar um portfólio. Alguns exemplos disso são os que se utilizam de uma função utilidade unida a medidas de risco, como feitos por Tobin [3], Pratt [4], Mossin [5] e Hanoch e Levy [6].

Apesar de revolucionário, existem algumas contestações sobre o modelo de média e variância proposto por Markowitz, principalmente no uso da variância como critério de decisão. O grande ponto a se levantar é que as distribuições de probabilidade do mercado financeiro são desconhecidas, portanto somente uma medida de oscilação em torno da média traz pouca informação com relação à proteção do risco deste portfólio. Conseqüentemente, vale explorar um portfólio com critérios de robustez que seja adaptativo, o que permite que a dinâmica do risco ao longo do tempo seja capturada.

O trabalho de otimização robusta foi bem desenvolvido por Bertsimas e Sim [7], Soyster [8] e Bental e Nemirovski [9]. Unindo estes conceitos de programação linear à decisão de portfólio, surgiram trabalhos de otimização robusta de portfólio, como visto por Fabozzi [10] e Goldfarb e Iyengar [11]. A questão que se levanta ao aplicar critérios de robustez à otimização de portfólio é quanto do retorno esperado se sacrifica para proteger o capital dos cenários de perdas possíveis. Enquanto os trabalhos mais recentes na área de otimização robusta criam modelos menos conservadores, expondo-se a um risco maior, o trabalho de Soyster tem característica distinta, mostrando-se bem conservador e, na sua aplicação na área das finanças, apresenta a vantagem de não necessitar do conhecimento das probabilidades dos cenários, ou seja, permite que se utilize o histórico como metodologia de risco. Como as distribuições de probabilidade do mercado financeiro são desconhecidas e sua estimação a partir do histórico é de elevada complexidade, o resultado destas estimações pode não ter boa previsibilidade fora da amostra. Assim sendo, fica clara a vantagem de se utilizar tal critério de robustez aliado à sua medida de risco.

Neste trabalho, procurou-se, como objetivo, unir os conceitos de adaptatividade aos conceitos de robustez, criando um modelo de programação linear que maximize o retorno esperado de um portfólio de ações, enquanto que, através das restrições de robustez, esteja protegido contra as quedas de mercado, podendo até zerar sua exposição ao risco do mesmo. A adaptatividade das mesmas faz com que o modelo só considere parte do histórico tanto para calcular o retorno esperado como para buscar o pior caso do portfólio. O modelo não leva em consideração os custos de operação ou o pagamento de dividendos pelas ações.

Para avaliar a performance do modelo, são escolhidas algumas ações que fazem parte do IBOVESPA e possuem boa liquidez no mercado em um período que apresente características distintas de mercado, como alta volatilidade, *"bear market"* (mercado em queda contínua) e *"bull market"* (mercado em alta contínua). O modelo é, então, utilizado diariamente como fator único da decisão do portfólio durante este período, avaliando-se posteriormente o retorno verdadeiro deste portfólio a cada dia, utilizando janelas para os critérios adaptativos e um perfil de risco do investidor arbitrários.

2. Modelagem

O modelo visa a montagem de um portfólio de ações que será utilizado no dia seguinte com base nos dados do fechamento de mercado da data de aquisição (t) até uma data passada, a ser estabelecida. O primeiro conceito a aplicado é o de adaptatividade, ou seja, o modelo ajusta os seus parâmetros de acordo com o presente. No caso deste modelo, a sua adaptatividade ocorre em dois pontos: na função objetivo e nas restrições de robustez.

A função objetivo consiste em uma média móvel dos preços entre a data inicial (t) e uma quantidade K de dias para trás. Isto significa que as estimativas de retorno esperado levam sempre em consideração uma mesma quantidade de dados, mas estes variam a cada dia. O tamanho desta janela foi decidido de forma arbitrária, respeitando uma quantidade mínima de dados que a torne estatisticamente relevante. Interpretamos que maximizando a média móvel, maximizamos, conseqüentemente, o valor esperado da carteira neste período K .

Em seguida, definimos as restrições de robustez do modelo para que o portfólio escolhido não tenha obtido a cada dia, desde a data inicial do seu estabelecimento (t) até uma quantidade de J dias para trás, uma perda maior que um percentual da sua riqueza total, sendo J menor ou igual à janela K da função objetivo. Como os retornos que são levados em consideração mudam diariamente, visto que a janela é fixa, temos um conceito de robustez adaptativa aplicado ao histórico do portfólio.

Esta janela também pode ser interpretada como um critério de aversão a risco, ou seja, quanto tempo o modelo leva para desconsiderar os retornos passados do portfólio como requisitos a atender. Uma diminuição neste J fará com que ele se exponha a um portfólio que teve uma queda no passado, podendo voltar ao mercado no início da recuperação, mas também voltar no período que ainda estava em queda.

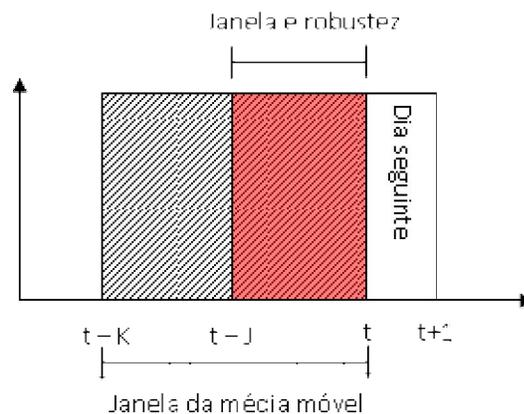


Figura 1 - Diagrama de janelas do modelo

Considerando, então, uma renda fixa cuja taxa é constante ao longo do tempo e livre de risco e o retorno de um ativo, em t , como:

$$R_{rf,t} = 0,04\% \text{ a. d.} \quad \forall t \quad (1)$$

$$R_{i,t} = \frac{\text{Preço}_{i,t} - \text{Preço}_{i,t-1}}{\text{Preço}_{i,t-1}} \quad (2)$$

Podemos então definir as variáveis:

- x_i – valor financeiro aplicado no ativo i
- $R_{i,t}$ – Retorno do ativo i na data t
- K – tamanho da janela observada para trás na média móvel
- J – tamanho da janela observada para trás nas restrições de robustez
- n – número total de ações disponíveis para o portfolio
- W_t – Riqueza no tempo t
- γ – percentual de perda aceitável

Como o modelo é adaptativo, é preciso que ele seja calculado diariamente e que, sabendo o resultado real do seu portfólio, atualize-se a riqueza do dia seguinte ($t+1$), através da seguinte equação:

$$W_{t+1} = \sum_{i=1}^n R_{i,t+1} \cdot x_i \quad (3)$$

Ainda, como o modelo tem opção de alocar o dinheiro em um fundo de renda fixa, ou seja, investir no ativo de risco zero, é preciso garantir que todo o dinheiro seja investido, o que é feito através de uma equação de balanço:

$$\sum_{i=1}^n x_i = W_t \quad (4)$$

Consideramos também, como restrição de robustez, que todos os retornos passados do portfolio completo devem ser superiores a um valor arbitrário mínimo:

$$\sum_{i=1}^n R_{i,d} \cdot x_i \geq (1 + \gamma) \cdot W_t \quad \forall d = t - J, \dots, t \quad (5)$$

Finalmente, modelando o problema por completo:

$$\max_x \left(\frac{1}{K} \sum_{d=t-K}^t \sum_{i=1}^n R_{i,d} \cdot x_i \right) \quad (6)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n x_i = W_t \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n R_{i,d} \cdot x_i \geq (1 + \gamma) \cdot W_t \quad \forall d = t - J, \dots, t \quad (5)$$

$$W_{t+1} = \sum_{i=1}^n R_{i,t+1} \cdot x_i \quad (3)$$

3. Metodologia

Para testarmos o modelo, foram utilizados dados de preços de fechamento diários obtidos no site da BM&F BOVESPA [12] dos anos de 2004 a 20/07/2011 das ações mais negociadas das seguintes empresas: AMBEV (AMBV4), Bradesco (BBDC4), Embraer (EMBR3), Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE5). Essas ações foram escolhidas de maneira arbitrária, porém são ativos que representam bem o IBOVESPA e possuem uma boa liquidez no mercado, permitindo uma comparação mais direta da performance do portfólio selecionado pelo modelo com o índice. Observando seus retornos individuais de 2005 a 2011, uma vez que 2004 será disponibilizado apenas como dado histórico para o modelo, na base do preço de 30/12/2004:

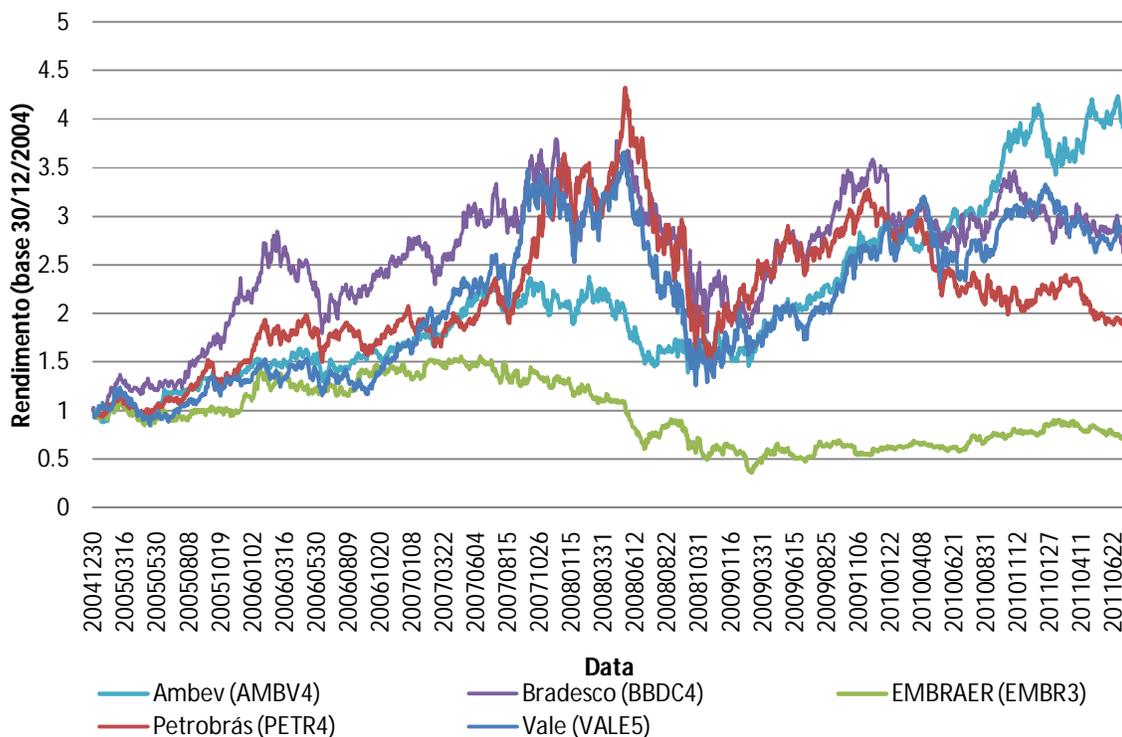


Figura 2 – Evolução diária das ações individuais 2005 a 2011 (base de preço, 30/12/2004) (Fonte: BMF Bovespa [12])

Esse período de 2005 a 2011 fornece uma vasta quantidade de cenários, desde um bull market, mercado em alta contínua, anterior à crise de 2008, que é evidenciado por uma alta de mais de 100% entre o fim de 2005 e 2011. Incluso nessa janela também está a crise de 2008 que levou a uma queda de 50% no índice e a recuperação do mesmo para níveis pré-crise em 2009, além do período de volatilidade mais elevada de 2011 devido às evidências de uma possível nova recessão (figura 2).

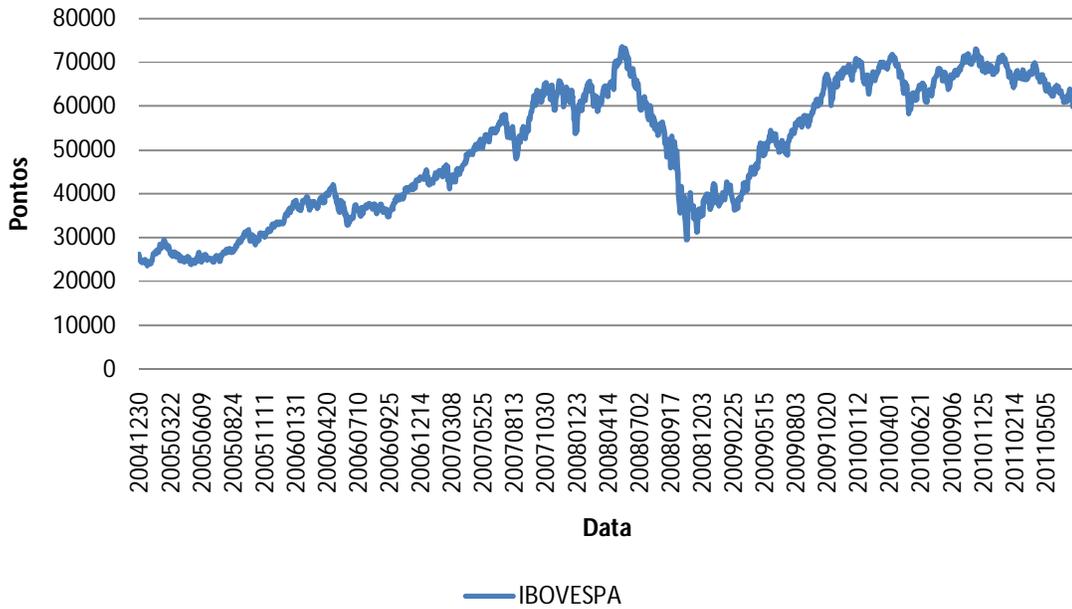


Figura 3 - IBOVESPA diário no período de 2005 a 2011 (Fonte: Yahoo! Finance [13])

Para avaliar o modelo em si, foram rodados para esse período diversos cenários de janelas de robustez (J) com uma perda máxima no dia de 3% do capital total e então se avaliou as informações estatísticas do log-retorno dos mesmos, podendo então avaliar a proteção do modelo contra o risco e seu retorno.

4. Apresentação de resultados

Antes de avaliarmos o modelo, vale apresentar as estatísticas descritivas dos retornos para o período de 2005 a 20/07/2011 tanto dos ativos como do *benchmark* do modelo, que será o IBOVESPA:

Tabela 1 - Estatísticas descritivas dos ativos e IBOVESPA (2005 a 2011) – Valores Absolutos

<i>Ambev</i>	<i>(AMBV4)</i>	<i>Bradesco</i>	<i>(BBDC4)</i>	<i>EMBRAER</i>	<i>(EMBR3)</i>
Média	0.00103	Média	0.00090	Média	0.00009
Erro Padrão	0.00048	Erro Padrão	0.00060	Erro Padrão	0.00061
Mediana	0.00018	Mediana	0.00000	Mediana	0.00000
Desvio Padrão	0.01923	Desvio Padrão	0.02417	Desvio Padrão	0.02441
Variância Amostral	0.00037	Variância Amostral	0.00058	Variância Amostral	0.00060
Curtose	3.50221	Curtose	6.90436	Curtose	4.18697
Assimetria	0.32652	Assimetria	0.71024	Assimetria	0.40147
Range	0.22798	Range	0.33623	Range	0.26747
Mínimo	-0.11275	Mínimo	-0.11496	Mínimo	-0.11083
Máximo	0.11523	Máximo	0.22127	Máximo	0.15664
Soma	1.66297	Soma	1.45209	Soma	0.13995
Núm. de Observações	1619	Núm. de Observações	1619	Núm. de Observações	1619
<i>Petrobrás</i>	<i>(PETR4)</i>	<i>Vale</i>	<i>(VALE5)</i>	<i>IBOVESPA</i>	
Média	0.00070	Média	0.00098	Média	0.00069
Erro Padrão	0.00060	Erro Padrão	0.00062	Erro Padrão	0.00048
Mediana	0.00112	Mediana	0.00128	Mediana	0.00134
Desvio Padrão	0.02404	Desvio Padrão	0.02508	Desvio Padrão	0.01951
Variância Amostral	0.00058	Variância Amostral	0.00063	Variância Amostral	0.00038
Curtose	4.59578	Curtose	3.97756	Curtose	6.42878
Assimetria	0.12482	Assimetria	0.06993	Assimetria	0.22512
Range	0.27924	Range	0.28552	Range	0.26049
Mínimo	-0.13760	Mínimo	-0.15162	Mínimo	-0.11393
Máximo	0.14164	Máximo	0.13389	Máximo	0.14656
Soma	1.13679	Soma	1.58750	Soma	1.12093
Núm. de Observações	1619	Núm. de Observações	1619	Núm. de Observações	1619

Observa-se que a média dos retornos nesse período, apesar da crise, são positivos, com desvios padrões elevados. A pior perda diária é da Vale, com um retorno negativo em 0.15, 33% maior que o menor retorno do IBOVESPA. O maior ganho diário é do Bradesco, 51% maior que o do IBOVESPA. Mostrando o gráfico de média x desvio padrão, cuja interpolação entre o ponto e a origem tem como coeficiente o índice de Sharpe:

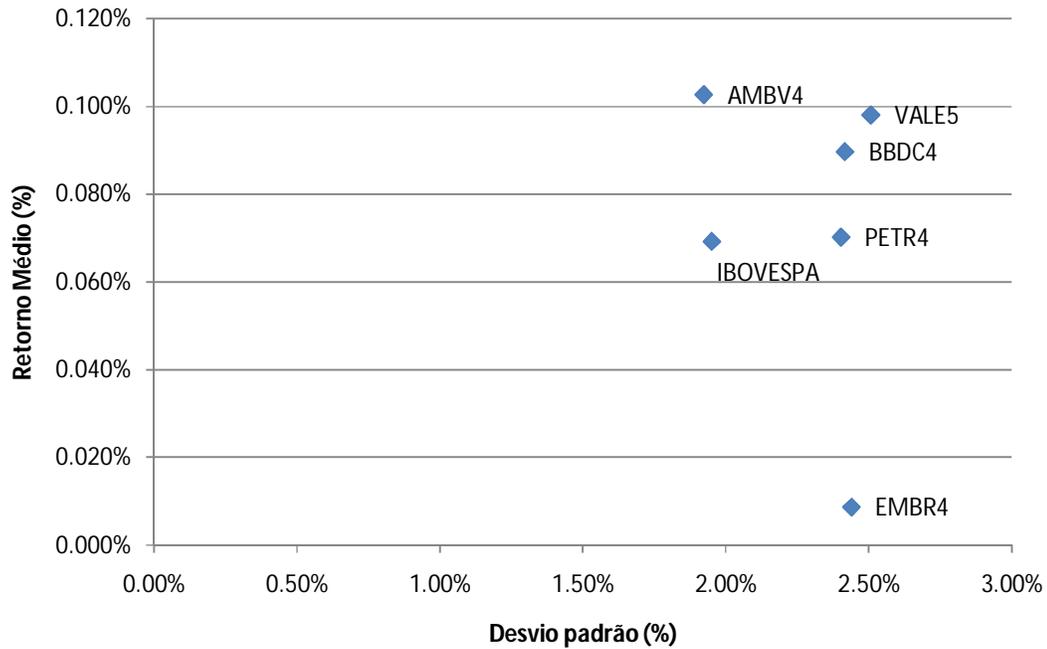


Figura 4 – Retorno médio x Desvio Padrão (2005 a 2011)

Podemos observar que, de acordo com os conceitos de Markowitz (1952), dentre estes ativos, as ações da Ambev, Vale e Bradesco criariam um portfólio mais eficiente que o formado pelo IBOVESPA, ou seja, o modelo tem uma boa oportunidade de bater o *benchmark*, principalmente em termos de retorno.

Agora, partindo para a análise do efeito das janelas no modelo de forma a buscar-se a melhor robustez. Escolheu-se alguns exemplos de janelas para as restrições (em dias úteis) para avaliar com o modelo, de maneira arbitrária: 10 dias úteis (aprox. 15 dias), 20 dias úteis (aprox. 30 dias), 40 dias úteis (aprox. 60 dias), 60 dias úteis (aprox. 90 dias), 120 dias úteis (aprox. 6 meses), 240 dias úteis (aprox. 1 ano). Assim, analisaremos o efeito das janelas da mesma maneira que foram analisados os ativos disponíveis, começando pelas estatísticas descritivas:

Tabela 2 - Estatísticas descritivas do modelo para diferentes janelas (2005 a 2011) – Valores absolutos

<i>J = 10</i>		<i>J = 20</i>		<i>J = 40</i>	
Média	0.00092	Média	0.00094	Média	0.00078
Erro Padrão	0.00043	Erro Padrão	0.00041	Erro Padrão	0.00038
Mediana	0.00040	Mediana	0.00040	Mediana	0.00040
Desvio Padrão	0.01741	Desvio Padrão	0.01658	Desvio Padrão	0.01529
Variância Amostral	0.00030	Variância Amostral	0.00027	Variância Amostral	0.00023
Curtose	1.48273	Curtose	1.57131	Curtose	1.33189
Assimetria	-0.05306	Assimetria	-0.06974	Assimetria	-0.06695
Range	0.15277	Range	0.15277	Range	0.14295
Mínimo	-0.08279	Mínimo	-0.08279	Mínimo	-0.07946
Máximo	0.06999	Máximo	0.06999	Máximo	0.06349
Soma	1.48885	Soma	1.51716	Soma	1.26442
Núm. de Observações	1619	Núm. de Observações	1619	Núm. de Observações	1619
<i>J = 60</i>		<i>J = 120</i>		<i>J = 240</i>	
Média	0.00085	Média	0.00083	Média	0.00064
Erro Padrão	0.00036	Erro Padrão	0.00032	Erro Padrão	0.00028
Mediana	0.00040	Mediana	0.00040	Mediana	0.00040
Desvio Padrão	0.01439	Desvio Padrão	0.01293	Desvio Padrão	0.01118
Variância Amostral	0.00021	Variância Amostral	0.00017	Variância Amostral	0.00013
Curtose	1.33126	Curtose	1.59797	Curtose	1.49354
Assimetria	-0.01595	Assimetria	0.03834	Assimetria	-0.04526
Range	0.12194	Range	0.11665	Range	0.09261
Mínimo	-0.06382	Mínimo	-0.05899	Mínimo	-0.05260
Máximo	0.05812	Máximo	0.05766	Máximo	0.04001
Soma	1.37520	Soma	1.34706	Soma	1.03506
Núm. de Observações	1619	Núm. de Observações	1619	Núm. de Observações	1619

Observa-se que o melhor retorno médio do modelo é inferior ao melhor retorno dos ativos, porém o maior desvio padrão do modelo é inferior ao menor desvio padrão dos ativos. Isso, associado à curtose menor de todas as janelas e retornos mínimos superiores ao dos ativos, permite inferirmos que o portfólio está sendo bem formado.

Avaliando a evolução do capital dos modelos entre si:

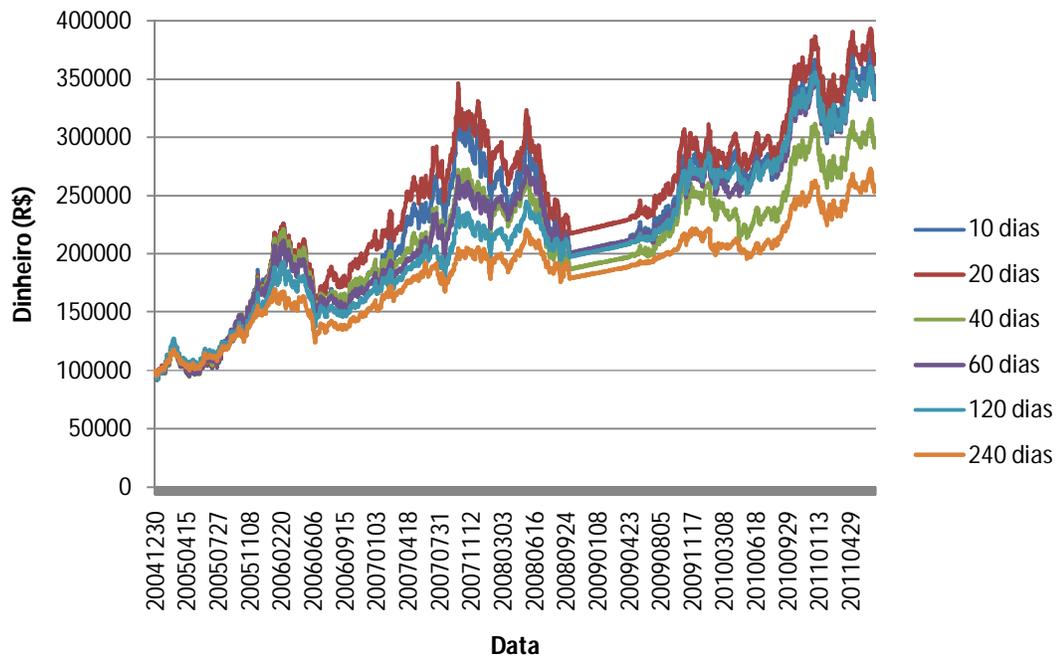


Figura 5 - Evolução do capital para as diferentes janelas

Vemos que a diferença no rendimento final é de quase 60% entre o maior (20 dias) e o menor (240 dias). Também, vemos que os modelos com janelas mais curtas voltam ao mercado mais cedo e mais expostos, estando sujeitos a uma subida maior do que os com janelas maiores. Isso é o efeito esperado do tamanho da janela, visto que ela representa o tempo de demora do modelo a esquecer a pior perda de um determinado portfólio. Avaliando o gráfico de retorno médio x desvio padrão:

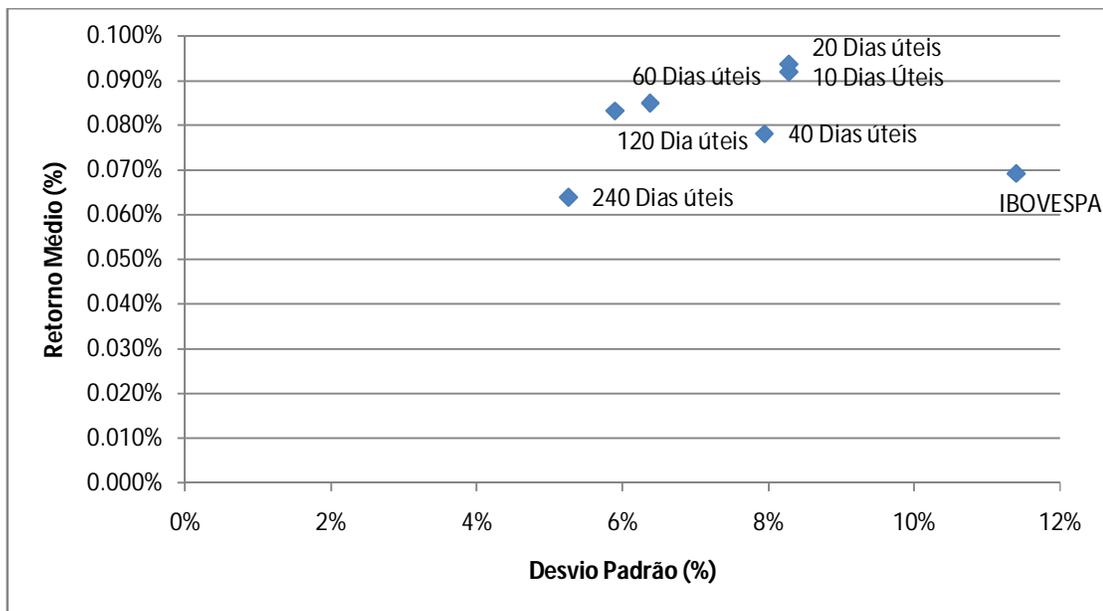


Figura 6 – Retorno médio x Desvio Padrão

Podemos analisar que, para quase todas as janelas, o modelo “domina” o Ibovespa, uma vez que a maioria delas apresenta retorno superior com estatísticas descritivas mais favoráveis, ou seja, é preferível investir no modelo a aplicar o dinheiro com base no índice. No caso da janela de 240 dias, vemos que o retorno médio é quase igual, porém as demais estatísticas se mantêm favoráveis a ela com relação ao índice. Analisando somente o modelo, vemos que nenhuma janela é totalmente “dominada” pelas outras, tornando-se uma questão de preferência do investidor qual seria a usada: uma mais agressiva (menos dias úteis) ou mais conservadora (mais dias úteis). Como o propósito deste trabalho é analisar um portfólio mais robusto, a janela escolhida para as análises futuras será a de 240 dias úteis.

Avaliando em seguida a comparação das janelas com o critério de risco utilizado, que é a maior perda, obtemos a seguinte distribuição:

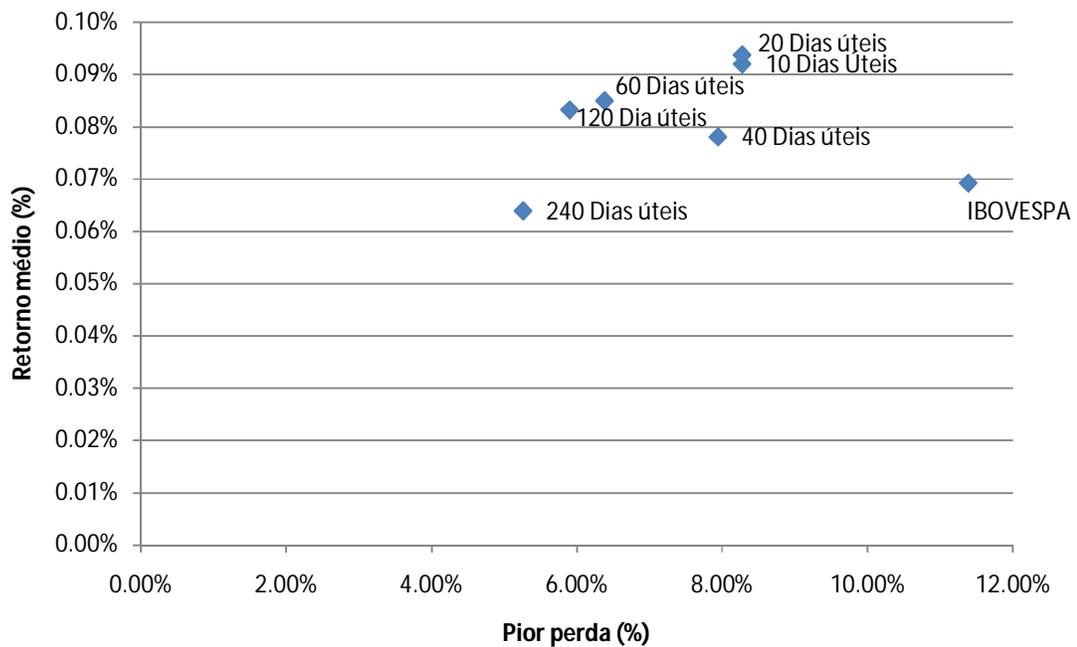


Figura 7 - Retorno Médio x Pior perda

Conforme a medida de risco que foi escolhida, vemos que todos os modelos têm uma medida de risco superior ao IBOVESPA e com retornos médios superiores para todos exceto a janela de 240 dias. Logo, podemos dizer que todos estes “dominam” o índice. A janela de 240 dias apresenta um retorno esperado inferior, porém próximo e com uma pior perda muito menor. Entre os modelos em si, vemos que, em geral, a escolha da janela está mais atrelada ao perfil de risco do gestor e qual é a velocidade da memória do modelo que ele deseja ter, ou seja, o quanto rapidamente um modelo poderá voltar a expor-se a um portfólio que apresentou uma queda maior que a restrição de risco.

Assim sendo, vamos analisar o comportamento do capital do modelo com a janela de 240 dias contra o Ibovespa, buscando ver a reação do modelo com as oscilações do índice:

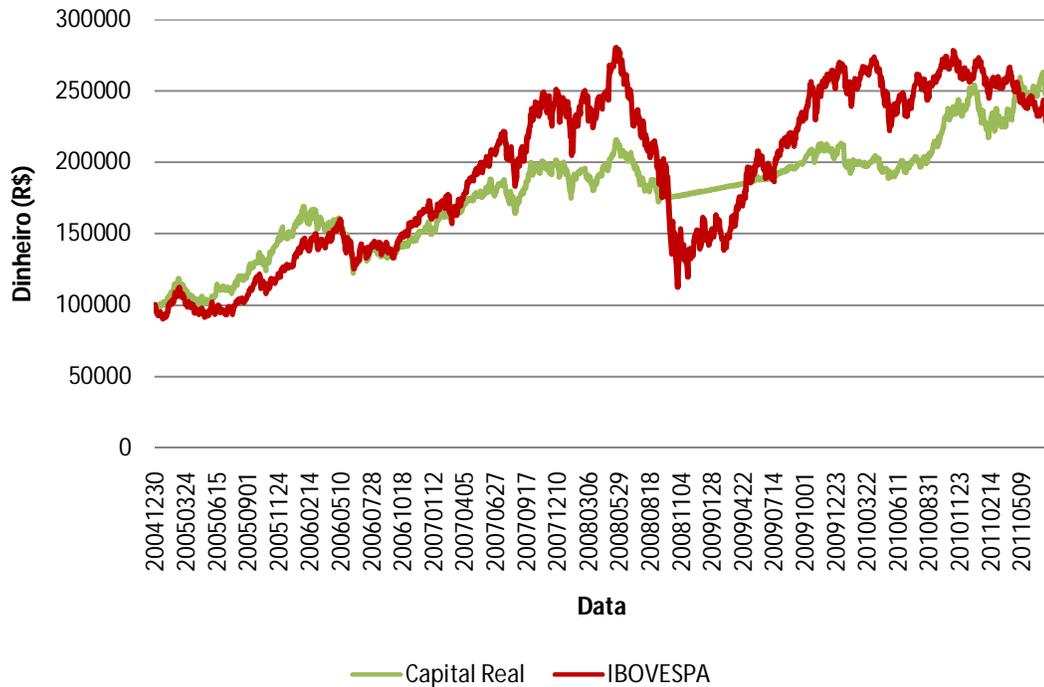


Figura 8 – Evolução do capital Modelo x IBOVESPA

Vemos que o modelo acompanha bem a evolução do IBOVESPA, tendo um resultado no final comparável, porém ele não apresenta quase que perda de capital no período da crise, alocando, eventualmente, todo seu capital em renda fixa. Como o modelo tenta ser mais conservador, ele também acaba perdendo os repiques mais fortes, ainda apresentando uma proteção com relação à queda anterior.

Finalmente, vale analisar a participação da renda fixa na carteira do modelo:

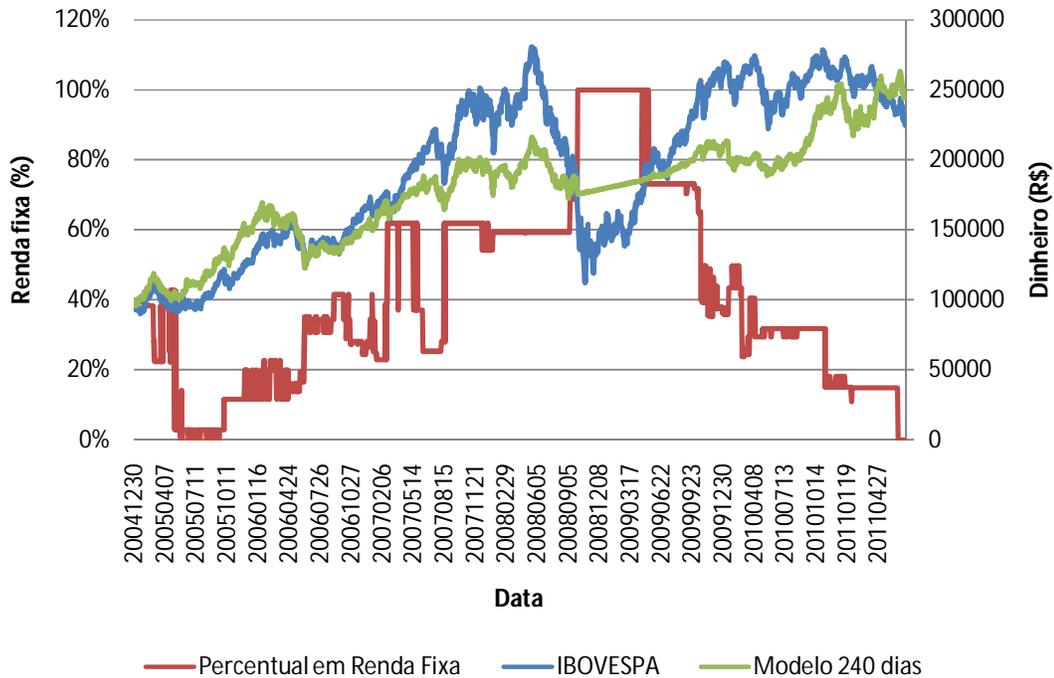


Figura 9 – Percentual da carteira em Renda Fixa

Observa-se que o modelo busca aplicar o mínimo em renda fixa no período inicial, quando o mercado está mais favorável. Quando o mercado começa a ficar um pouco mais desfavorável, tendo oscilações maiores, o percentual vai aumentando até o início da crise, no fim de 2008. Nesse período, ele sai completamente do mercado, indo para o ativo sem risco, que é o desejado e, passado este período, ele retorna ao mercado gradativamente.

Como exemplo da interpretação do tamanho da janela como critério de aversão a risco, comparamos a carteira ao IBOVESPA com a janela de 20 dias úteis:

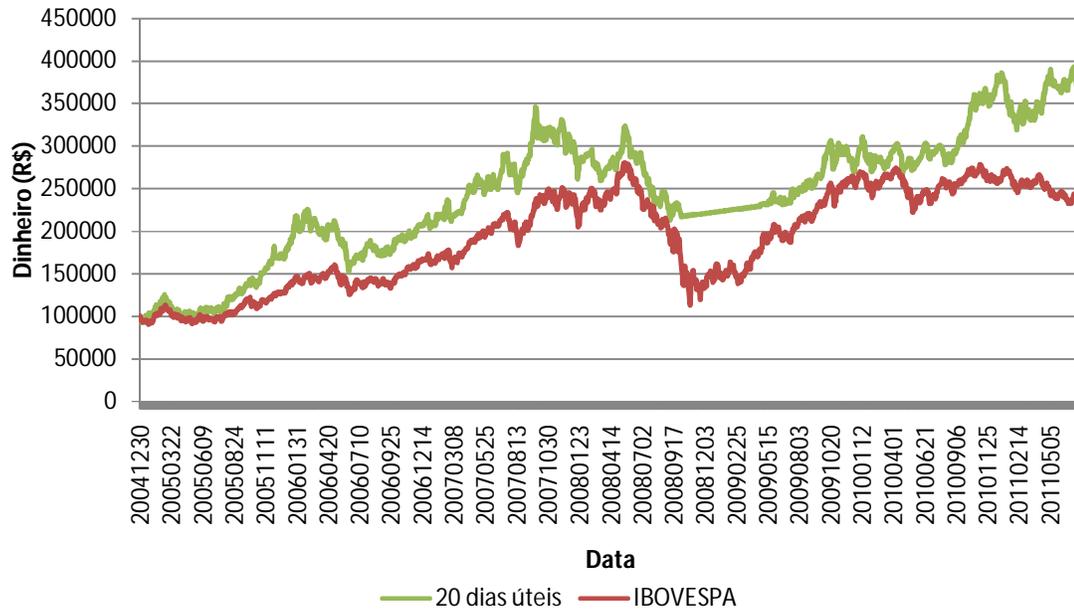


Figura 10 - Evolução do capital IBOVESPA x Modelo (20 dias úteis)

Vamos que o comportamento do modelo com esta janela é bem diferente, tendo uma tendência a buscar um portfólio mais agressivo, rendendo mais que o IBOVESPA no início. Quando começa a queda de 2008 com a crise, ele tem uma perda maior que o modelo da janela de 240 dias úteis, mas sai do mercado bem antes do fim do crash, voltando bem na recuperação do índice e superando-o no final.

5. Conclusão

Após a análise dos modelos de otimização de portfólio existentes, chega-se à conclusão de que existe espaço para a criação de um modelo adaptativo com critérios de robustez. A adaptatividade permite que o modelo capture a dinâmica dos ativos ao longo do tempo, evitando a necessidade de estimar as distribuições de probabilidades dos mesmos. A robustez busca garantir que o modelo tenha uma exposição ao risco que seja definida de acordo com o perfil do gestor. Para isso, foi criado um modelo que maximiza o valor esperado do retorno dos ativos, enquanto respeitando um valor de pior perda mínima para o portfólio em um período J .

A avaliação deste modelo se baseou na sua implementação de forma iterativa, ao longo de um período de 5 anos e meio (Janeiro de 2005 a Julho de 2011) para uma seleção de ações que são representativas do IBOVESPA. Estudou-se os resultados, avaliando suas estatísticas descritivas e relações de retorno médio contra desvio padrão e retorno médio contra pior perda com relação aos valores do IBOVESPA para realizar uma comparação objetiva baseada não somente na evolução do capital.

Através destes estudos, podemos avaliar que tal método de otimização robusta tem aplicações na formação de portfólios. Podemos ver que, além de alcançar o objetivo desejado, ou seja, reduzir sua exposição ao risco de queda com relação ao IBOVESPA, ele ainda conseguiu um retorno próximo ou superior ao índice, aproveitando-se de todos os ativos disponíveis. Também, vemos que o parâmetro que define o perfil de risco do modelo tem um efeito bem definido, podendo torná-lo mais agressivo, porém mais exposto. Assim sendo, o resultado deste estudo foi satisfatório, pois pudemos comprovar a aplicação da otimização adaptativa com restrições de robustez a um portfólio de ações como maneira de diminuir a exposição ao risco do índice de acordo com o perfil de risco escolhido.

6. Bibliografia

- [1] H. M. Markowitz, *Portfolio Selection - Efficient Diversification of Investments*, Nova Iorque: John Wiley, 1959.
- [2] H. M. Markowitz, "Portfolio Selection," *The Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, p. 77-91, 1952.
- [3] J. Tobin, "Liquidity preference as behavior towards risk," *Review of Economic Studies*, 1958. [Online]. Disponível em: <http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p01a/p0118.pdf>. [Acesso em Novembro 2011].
- [4] J. W. Pratt, "Risk aversion in the small and in the large," *Econometrica*, n. 32, p. 122-136, 1964.
- [5] J. Mossin, "Optimal multiperiod portfolio policies," *J. Business*, n. 32, p. 215-229, 1968.
- [6] G. Hanoch e H. Levy, "The efficiency analysis of choices involving risk," *Review of Economic Studies*, n. 36, p. 345-346, 1969.
- [7] D. Bertsimas e M. Sim, "The Price of Robustness," *Operations Research*, vol. 52, n. 1, p. 35-53, 2004.
- [8] A. L. Soyster, "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming," *Operations Research*, vol. 21, 1973.
- [9] A. Ben-Tal e A. Nemirovski, "Robust solutions to uncertain programs," *Operations Research Letters*, vol. 25, p. 1-13, 1999.
- [10] F. J. Fabozzi, *Robust Portfolio optimization and management*, Nova Iorque: John Wiley, 2007.
- [11] D. Goldfarb e G. Iyengar, "Robust Portfolio Selection Problems," *Mathematics of Operations Research*, vol. 28, n. 1, p. 1-38, Fevereiro 2003.
- [12] B. BOVESPA, "BM&F Bovespa - Cotações históricas," BM&F Bovespa, [Online]. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/shared/iframe.aspx?idioma=pt-br&url=http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/cotacoes-historicas/FormSeriesHistoricas.asp>. [Acesso em Novembro 2011].
- [13] "BVSP Preços Históricos," Yahoo!, [Online]. Disponível em: <http://br.finance.yahoo.com/q/hp?s=^BVSP>. [Acesso em Novembro 2011].