

INTRODUÇÃO DO CRITÉRIO DE SEGURANÇA n-K NO PLANEJAMENTO DE SISTEMAS ELÉTRICOS

Alexandre Moreira da Silva

Projeto de Graduação



INTRODUÇÃO DO CRITÉRIO DE SEGURANÇA n -K NO PLANEJAMENTO DE SISTEMAS ELÉTRICOS

Aluno: Alexandre Moreira da Silva

Orientador: Alexandre Street de Aguiar

Trabalho apresentado com requisito parcial à conclusão do curso de Engenharia Elétrica na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Agradecimentos

Toda honra e toda glória a Deus, Engenheiro Supremo, Responsável pela lógica de toda organização do Universo, Sublime Inteligência que coordena as energias para a manutenção do equilíbrio. Que Sua Presença esteja sempre ao meu lado, principalmente na realização de grandes tarefas como a conclusão de um curso de graduação.

À minha mãe Maria José Moreira da Silva, que jamais desanimou diante das dificuldades, sendo meu maior exemplo de vida.

Ao meu pai Francisco Moreira da Silva, que infelizmente não terei a alegria de abraçar durante a formatura, mas com certeza estará feliz no céu acompanhando a cerimônia.

À minha tia Maria José da Silva Araújo, que ajudou na minha criação durante a infância, se tornando minha segunda mãe.

À minha irmã Alessandra Moreira da Silva por sua inestimável ajuda em todos os sentidos, sempre me apoiando do começo ao fim da faculdade.

À minha irmã Andressa Moreira da Silva por sempre me passar confiança e por me dar o exemplo de como é possível alcançar os objetivos de maneira honesta.

À minha irmã Ana Carla Moreira da Silva por acreditar mais em mim do que eu mesmo acreditei e por me ajudar desde as primeiras dificuldades com a escola ainda na infância, sendo responsável por me ensinar a tabuada.

A todos os demais membros da minha família, que com certeza tiveram papel preponderante na minha vida.

Ao meu amigo de todas as horas Bruno Fânzeres Dos Santos, por sua enorme ajuda em diversos momentos difíceis, durante todos os anos de faculdade.

Ao meu amigo Douglas Machado Côrtes, que esteve comigo nos primeiros períodos de faculdade, me ajudando a superar minhas indecisões quanto a continuar ou não na engenharia.

Ao meu orientador Alexandre Street de Aguiar, pela oportunidade de entrar no meio científico, me proporcionando um tema de pesquisa bastante interessante, além de sempre me ajudar com enorme paciência.

À Ana Luiza Lopes pela grande boa vontade na revisão gramatical desse trabalho.

À PUC-Rio e ao Departamento de Engenharia Elétrica, pelo excelente ambiente de aprendizado.

No intuito de obter um planejamento da operação de sistemas elétricos robusto à possibilidade de falhas (contingências), diferentes abordagens e modelos foram propostos de maneira a determinar um despacho das usinas capaz de garantir que o sistema "sobreviva" (i. e., a demanda seja atendida) mesmo que um ou dois componentes falhem. Para tanto, os critérios de segurança conhecidos como $n-1$ e $n-2$ são adotados em diversos sistemas elétricos do mundo como uma maneira eficiente e prática de mitigar o corte de carga na ocorrência de contingências. Todavia, esses critérios passaram a ser questionados devido a recentes apagões (cortes de carga) acarretados por falhas simultâneas de diferentes componentes do sistema.

Diferentemente do que se costuma veicular, contingências múltiplas são mais comuns e perigosas do as falhas naturais independentes. Isso porque a estabilidade da dinâmica de sistemas de potência é algo bastante complexo. Além disso, o sistema de proteção opera de maneira paralela ao sistema de abastecimento e também não está livre de falhas. Assim sendo, falhas naturais podem causar contingências subsequentes (dependentes de contingências anteriores) devido ao mau funcionamento da proteção ou da instabilidade provocada no sistema. Tais fatos impulsionam a pesquisa de critérios de segurança mais rigorosos como, por exemplo, o $n-K$, onde K pode ser superior a dois.

A complexidade computacional e o tamanho (número de restrições e variáveis) dos modelos de otimização tradicionalmente utilizados para considerar o critério $n-K$ em problemas de planejamento da operação é bastante elevada e extremamente dependente do parâmetro K . Para $K = 2$, ainda é possível resolver tais modelos ao considerarmos sistemas realistas, com poucas centenas de centrais geradoras. Contudo, para $K > 2$, esses modelos tornam-se computacionalmente intratáveis devido a um crescimento exponencial do número de restrições e variáveis do modelo de otimização. Isso ocorre em função da necessidade de se enumerar todas as possíveis contingências, combinação de n elementos K a K , no modelo matemático de despacho.

Estudamos, neste trabalho, uma nova abordagem para o problema de planejamento da operação de sistemas elétricos capaz de incorporar o critério de segurança $n-K$, onde K pode ser superior a 2. Primeiramente, modelamos o problema empregando uma técnica de modelagem matemática denominada Otimização Robusta. Isso nos permite não enumerar todas as possíveis contingências, mas sim selecionar a pior dentre todas de maneira endógena ao modelo. Tal técnica já foi aplicada com sucesso, desconsiderando a rede de transmissão. Levar em conta a rede, bem como a possibilidade de contingências em suas linhas de transmissão, inviabiliza a abordagem já empregada. Sendo assim nossa pesquisa busca resolver um problema ainda em aberto.

Palavras-chave: Critério de Segurança $n-K$; Planejamento de Sistemas de Potência; Otimização Robusta

A Robust Optimization Approach for the Network-Constrained Unit Commitment Problem with n -K Security Criterion

Abstract

In order to make an electrical system operation planning robust to the possibility of failures (contingencies), different models and approaches have been proposed to determine a dispatch of generators capable of ensuring the system "survival" (i.e., capable of meeting the demand) even if one or two components fail. To this end, the safety criteria known as $n-1$ and $n-2$ are adopted worldwide in various electrical systems as an efficient and practical way of mitigating load shed in the event of contingencies. However, these criteria started to be questioned due to recent blackouts brought about by simultaneous failures of different system components.

Unlike what is usually said, multiple contingencies are more common and dangerous than natural independent faults. The main reason for this lies in the complexity of the dynamic stability of power systems. In addition, the protection system, that operates in parallel to the supply system, is not free of failures. Thus, natural faults can cause subsequent contingencies (dependent on earlier contingencies) due to the malfunction of the protection mechanisms or the instability of the overall system. These facts drive the search for more stringent safety criteria, for example, n -K, where K can be greater than two.

The computational complexity and the size (number of constraints and variables) of the optimization models traditionally used to consider the criterion n -K in operation planning problems is very high and extremely dependent on the parameter K. For $K = 2$, it is still possible to solve such models when considering real systems, with a few hundred power plants. However, for $K > 2$, these models become computationally intractable because of the exponential growth in the number of constraints and variables of the optimization model. This is due to the need of enumerating all the possible contingencies in the mathematical dispatch model.

In the present work, we study a new approach to the electrical system operation planning problem capable of incorporating the safety criterion n -K, where K can be greater than 2. First, we formulated the problem using a mathematical modeling technique called Robust Optimization. This allows us to select the worst case of contingency, which let us to avoid enumerating all the possible contingencies. Such technique has been successfully applied disregarding the transmission network. This approach becomes unfeasible when we take into account the network, as well as the possibility of contingencies in its transmission lines. Thus our research seeks to solve an open problem.

Keywords: Security Criteria n -K; Power System Planning; Robust Optimization

1.	Introdução	7
2.	Modelo <i>Contingency Dependent</i>	9
3.	Modelo Tri-Nível	12
4.	Metodologia de Solução	15
	a. Segundo Nível Equivalente	15
	b. Primeiro Nível Aproximado	17
	c. Algoritmo de Benders	18
5.	Casos de Estudo	21
	a. Exemplo 3 Barras	21
	b. Exemplo RTS 24 Barras Modificado	23
6.	Conclusão	28
7.	Referências	29
	Anexo	31

1. Introdução

No intuito de obter um planejamento da operação de sistemas elétricos robusto à possibilidade de falhas (contingências), diferentes abordagens e modelos foram propostos de maneira a determinar um despacho das usinas capaz de garantir que o sistema "sobreviva" (i. e., a demanda seja atendida) mesmo que um ou dois componentes falhem. Para tanto, os critérios de segurança conhecidos como $n-1$ e $n-2$ são adotados em diversos sistemas elétricos do mundo como uma maneira eficiente e prática de mitigar o corte de carga na ocorrência de contingências. Todavia, esses critérios passaram a ser questionados devido a recentes apagões (cortes de carga) acarretados por falhas simultâneas de diferentes componentes do sistema.

Diferentemente do que se costuma veicular, contingências múltiplas são mais comuns e perigosas do que as falhas naturais independentes. Isso porque a estabilidade da dinâmica de sistemas de potência é algo bastante complexo. Além disso, o sistema de proteção opera de maneira paralela ao sistema de abastecimento e também não está livre de falhas. Assim sendo, falhas naturais podem causar contingências subsequentes (dependentes de contingências anteriores) devido ao mau funcionamento da proteção ou da instabilidade provocada no sistema. Tais fatos impulsionam a pesquisa de critérios de segurança mais rigorosos como, por exemplo, o $n-K$, onde K pode ser superior a dois.

Infelizmente, o Brasil vem registrando alguns casos de apagões, dentre os quais citamos alguns [3][4] a seguir. Em novembro de 2009, um apagão causou inúmeros transtornos. Em uma noite de terça-feira, pelo menos 18 estados brasileiros sofreram com a falta de energia elétrica. Segundo autoridades do governo, o problema ocorreu devido a falhas em três linhas abastecidas por Furnas na hidrelétrica de Itaipu, usina binacional responsável pelo fornecimento de 19,13% da energia consumida no Brasil e 87,13% do consumo paraguaio. As autoridades informaram que as linhas falharam por condições meteorológicas adversas, provocando uma perda de 17 mil megawatts de potência, o que equivale a toda a demanda do Estado de São Paulo. Dentre os principais transtornos causados pela falta de luz, podemos citar o caos instaurado nas ruas do Rio de Janeiro, onde os serviços de trem e metrô foram interrompidos, ônibus ficaram superlotados, a violência tomou conta das ruas e celulares e telefones fixos ficaram mudos. Já em fevereiro de 2011, uma falha no fornecimento de energia fez com que boa parte da região Nordeste ficasse sem luz durante mais de 4 horas. A pane atingiu Bahia, Alagoas, Pernambuco, Paraíba, Ceará, Sergipe, Piauí e Rio Grande do Norte. Segundo especialistas, diversas condições atípicas influenciaram esse evento. Uma falha em um mecanismo de proteção de uma linha provocou o desligamento de outras peças do sistema elétrico da região. Como o planejamento de operação incorporava apenas o critério de segurança $n-2$, ao perder mais de dois de seus componentes, o sistema elétrico do Nordeste veio a sucumbir, vítima de contingências acarretadas por outras contingências, ficando fora de serviço por algumas horas. Esse apagão implicou, entre vários outros transtornos, falta de energia por 40 minutos no maior hospital público de Pernambuco, cujo gerador apresentou falha. Como podemos perceber nos dois exemplos citados, falhas em mais de dois elementos ocorrem com uma frequência maior do que o esperado, devido, principalmente, a contingências dependentes de outras contingências, fruto de eventuais falhas na proteção, na estabilidade, entre outros motivos.

Acontecimentos como os descritos acima impulsionaram pesquisas em todo o mundo no intuito de tornar os sistemas elétricos mais confiáveis e seguros analisando o impacto de contingências múltiplas no planejamento da operação desses sistemas [5]-[9]. Nesse cenário, encaixa-se a pesquisa da programação de sistemas robustos a falhas em K elementos, sejam essas falhas independentes (naturais) ou dependentes umas das outras, como foi o caso dos eventos citados acima. Seguindo essa linha, torna-se importante investigar métodos eficientes de se incorporar a segurança ao problema de despacho de sistemas elétricos [1] (muito conhecido como "unit commitment problem" pela comunidade científica internacional). Trabalhos como [10][11] apresentaram modelos matemáticos de otimização linear para considerar o conceito de segurança no problema de despacho conjunto da potência e de reservas.

Aprofundando os estudos sobre o tema segurança em sistemas elétricos, trabalhos abordaram o problema com o modelo dependente de contingência (mais conhecido na literatura como "contingency-constrained unit commitment - CCUC"). Esse modelo visa determinar uma programação de geração e reservas capaz de sobreviver a todas as contingências possíveis, que são explicitamente enumeradas em sua formulação. Em [10], foi proposta a diminuição do conjunto de contingências consideradas no modelo dependente de contingência através da eliminação de falhas poucos prováveis, criando, assim, um conjunto de eventos adversos mais factíveis de acontecer. No mesmo estudo, foi proposto um

esquema de precificação de reservas baseado em multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de potência. O estudo [11] apresentou, à luz dos pontos de vista estocástico e determinístico, o conceito de preço de segurança em sistemas elétricos, considerando a rede de transmissão. O trabalho [12] abordou o impacto das ofertas dos consumidores sob os critérios de segurança $n-1$ e $n-2$. Na referência [13], o gerenciamento de incertezas no problema de despacho das usinas foi revisto e o "tradeoff" entre segurança e custo total do sistema foi estudado para um conjunto de modelos dependentes de contingência, considerando o critério $n-1$ de segurança. Por fim, o impacto da comutação de transmissão na programação dependente de contingência foi analisado em [14] para um caso de um período e, em [15], para o caso multiperíodo.

O principal efeito colateral de se considerar todos os casos de possíveis contingências nos modelos dependentes de contingência (CCUC models) está ligado ao fato de que só podemos aplicar os critérios $n-1$ e $n-2$. Para critérios de segurança mais rigorosos, o problema se torna intratável, do ponto de vista computacional, dado o enorme número de restrições que são adicionadas ao modelo. Desse modo, muitas vezes os modelos CCUC analisam apenas um conjunto limitado de contingências, consideradas mais prováveis a partir de observações técnicas. Em [16], foi apresentada uma abordagem alternativa para incorporar o critério $n-K$ aos modelos CCUC. Neste trabalho, os autores propuseram um modelo de despacho de energia e reservas baseado em um problema de otimização de dois níveis, que após algumas manipulações pode ser enquadrado como um problema de otimização robusta. Dessa maneira, o modelo proposto permite considerar todas as combinações de K falhas em geradores de maneira computacionalmente eficiente, sem que o tamanho do modelo (número de variáveis e restrições) cresça com o parâmetro K .

A otimização robusta é utilizada em problemas onde há incerteza na variação dos parâmetros, cujas distribuições estatísticas são desconhecidas. Neste quadro, essa técnica proporciona soluções ótimas que permanecem viáveis ainda que haja variações, dentro de um conjunto de incertezas definido a priori, nos parâmetros do modelo. Essa técnica foi primeiramente apresentada por Soyster [17], nos anos 70, através de um conjunto de incertezas retangular. No entanto, tratava-se ainda de uma abordagem muito conservadora. No final dos anos 90 e depois em 2002, Ben-Tal e Nemirovski empenharam-se no desenvolvimento dessa técnica e apresentaram uma metodologia (ver [18][19]) mais realista e menos conservadora na hora de definir o conjunto de incertezas, aparando as arestas do conjunto retangular de Soyster e propondo um conjunto com forma elipsoidal. Entretanto, esse avanço implicava em uma formulação não linear do problema. Nesse sentido, Bertsimas e Sim apresentaram em [20] uma versão da otimização robusta em que é possível controlar o grau de conservadorismo através de um conjunto de incerteza poliédrico. Neste caso, nenhuma não linearidade adicional é necessária para modelar a robustez, proporcionando assim, contrapartes robustas lineares para modelos originalmente lineares, o que não ocorre com a abordagem de Ben-Tal e Nemirovski.

A otimização robusta de Bertsimas e Sim foi utilizada em [16] para reformular o problema CCUC de forma a proporcionar um modelo de programação matemática capaz de ser resolvido por solvers disponíveis no mercado. Entretanto, nesse trabalho somente foram contempladas falhas de geradores, desconsiderando a presença da rede de transmissão. A consideração da rede de transmissão no problema de planejamento da operação com segurança, bem como a possibilidade de contingência em suas linhas de transmissão, é de suma importância como pudemos perceber nos casos de apagão [3][4] citados acima. Todavia, levar em conta tal rede na formulação do problema inviabiliza a abordagem empregada nesses trabalhos e, portanto, esse ainda é um problema em aberto.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é apresentar uma abordagem inovadora e computacionalmente eficiente para considerar o critério de segurança $n-K$, para qualquer K , no problema de planejamento da operação de curto prazo considerando a rede de transmissão. As contribuições deste trabalho podem ser divididas em dois tópicos: (1) a formulação de um modelo analítico de programação matemática tri-nível em que o critério de segurança $n-K$ é garantido e (2) uma metodologia eficiente de solução do modelo tri-nível proposto através da técnica de decomposição de Benders.

2. Modelo Contingency Dependent

No problema de planejamento de despacho de curto prazo, a segurança foi incorporada através da definição de diferentes tipos de reservas [10][11], com as quais podemos implementar ações corretivas para contornar contingências. Há dois tipos principais de reservas, as girantes e as não-girantes. As girantes são aquelas que podem ser acionadas a partir de geradores que já estejam acoplados ao sistema, precisando apenas aumentar ou diminuir suas gerações. As não-girantes são as reservas provenientes de geradores desligados que são chamados a produzir energia em casos de emergência. Neste trabalho, abordaremos apenas as reservas girantes, que podem ser divididas em dois subtipos, reservas de subida e de descida. Como o nome já diz, a reserva de subida trata do quanto o gerador pode aumentar sua geração e a de descida, do quanto pode diminuir, como mostra a ilustração (figura 1) a seguir, onde o gerador i , com limite mínimo de geração \underline{P}_i , foi chamado a produzir p_i , mas em determinado caso de contingência k , apresentará potência p_i^k , que poderá ser igual, maior ou menor do que p_i , respeitando os limites, previamente decididos, através das reservas de subida, r_i^U , e descida, r_i^D .

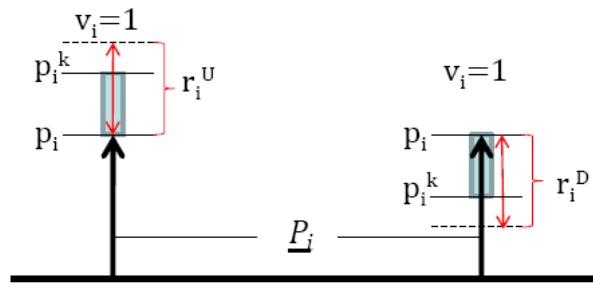


Figura 1: Ilustração das reservas de subida e de descida.

Isto posto, utilizando reservas de subida e de descida, o modelo Contingency Dependent visa determinar uma programação de geração e reservas para sistemas de potência capaz de suprir a demanda tanto no estado normal, também chamado de pré-contingência, quanto no estado de contingência. Para tanto, em se tratando do critério de segurança $n-K$, tal modelo considera explicitamente cada uma das possíveis combinações de falhas de K elementos do sistema enumerando-as através de $\binom{|\mathcal{L}|+|\mathcal{I}|}{K}$ restrições; onde $|\mathcal{L}|$ é o número de linhas de transmissão e $|\mathcal{I}|$, o número de geradores. Formulamos abaixo este modelo, como foi feito nos trabalhos [10][12]-[15].

$$\text{Minimizar}_{f_l, p_i, \theta_b, v_i, r_i^U, r_i^D, f_l^k, p_i^k, \theta_b^k} \sum_{i \in I} (C_i^P(p_i, v_i) + C_i^U r_i^U + C_i^D r_i^D) \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I_b} p_i + \sum_{l \in \mathcal{L} | to(l)=b} f_l - \sum_{l \in \mathcal{L} | fr(l)=b} f_l = D_b; \forall b \in N \quad (2)$$

$$f_l = \frac{1}{x_l} (\theta_{fr(l)} - \theta_{to(l)}); \forall l \in \mathcal{L} \quad (3)$$

$$-\bar{F}_l \leq f_l \leq \bar{F}_l; \forall l \in \mathcal{L} \quad (4)$$

$$\underline{P}_i v_i \leq p_i \leq \bar{P}_i v_i; \forall i \in I \quad (5)$$

$$p_i + r_i^U \leq \bar{P}_i v_i; \forall i \in I \quad (6)$$

$$p_i - r_i^D \geq \underline{p}_i v_i; \forall i \in I \quad (7)$$

$$0 \leq r_i^U \leq \bar{R}_i^U v_i; \forall i \in I \quad (8)$$

$$0 \leq r_i^D \leq \bar{R}_i^D v_i; \forall i \in I \quad (9)$$

$$v_i \in \{0,1\}; \forall i \in I \quad (10)$$

$$\sum_{i \in I_b} p_i^k + \sum_{l \in \mathcal{L} | to(l)=b} f_l^k - \sum_{l \in \mathcal{L} | fr(l)=b} f_l^k = D_b; \forall b \in N, \forall k \in \mathcal{C} \quad (11)$$

$$f_l^k = \frac{A_l^k}{x_l} (\theta_{fr(l)}^k - \theta_{to(l)}^k); \forall l \in \mathcal{L}, \forall k \in \mathcal{C} \quad (12)$$

$$-\bar{F}_l \leq f_l^k \leq \bar{F}_l; \forall l \in \mathcal{L}, \forall k \in \mathcal{C} \quad (13)$$

$$p_i^k \geq A_i^k (p_i - r_i^D); \forall i \in I, \forall k \in \mathcal{C} \quad (14)$$

$$p_i^k \leq A_i^k (p_i + r_i^U); \forall i \in I, \forall k \in \mathcal{C} \quad (15)$$

No modelo acima, os conjuntos N , \mathcal{L} , I e \mathcal{C} contêm, respectivamente, as barras, as linhas de transmissão, os geradores e os possíveis casos de contingência. As variáveis f_l, p_i, θ_b representam fluxo na linha l , geração na usina i e ângulo de fase na barra b no estado normal, respectivamente. Já f_l^k, p_i^k, θ_b^k têm o mesmo significado, mas corresponde ao caso de contingência k . A matriz A_j^k armazena todas as possíveis combinações de K falhas, sendo cada uma delas alocada como um estado de contingência k em uma das linhas da matriz. Cada um dos elementos de A_j^k pode ser 1, se o j -ésimo elemento do sistema estiver disponível no estado de contingência k , ou 0, caso esse componente esteja indisponível. As primeiras $|\mathcal{L}|$ (nº de linhas de transmissão) colunas da matriz A_j^k referem-se ao status (disponível ou indisponível) das linhas em cada caso de contingência k , enquanto as $|I|$ (nº de geradores) colunas seguintes estão relacionadas ao status dos geradores. Sendo assim, temos que:

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{L}|+|I|} A_j^k \geq (|\mathcal{L}| + |I|) - K; \forall k \in \mathcal{C}$$

A função objetivo (1) visa minimizar os custos de geração e reservas de cada usina. A restrição (2) é a restrição de rede que, funcionando tal como a lei dos nós de Kirchhoff, determina que a geração total na barra acrescida do fluxo de potência que chega e decrescida do fluxo que sai deve ser equivalente à demanda da barra. A restrição (3) é uma aproximação para o fluxo de potência D.C., válida para casos onde os ângulos de fase são pequenos. Tal restrição determina que o fluxo de cada linha escoe da barra adjacente de maior ângulo de fase para a barra adjacente de menor ângulo de fase, do mesmo modo que a corrente parte do maior para o menor potencial na lei de Ohm. A restrição (4) determina a capacidade física de fluxo de cada linha. A restrição (5) define os limites de geração de cada usina. As restrições de (6) a (9) tratam dos limites de reserva de subida e descida de cada um dos geradores. A restrição (10) expressa que o gerador i estará ou ligado ($v_i=1$) ou desligado ($v_i=0$), no estado normal, através da decisão da variável binária v_i . Já (11) determina que as variáveis f_l^k, p_i^k deverão respeitar as restrições de rede impostas, em todos os casos de contingência, da mesma forma como f_l, p_i respeitam no estado normal. Por sua vez, (12) impõe todos os casos de contingência possíveis às linhas, ressaltando que seus fluxos deverão continuar partindo da barra adjacente de maior ângulo de fase para a barra de menor ângulo de fase. A desigualdade (13) restringe os fluxos sob caso de contingência aos respectivos limites de linhas. As inequações (14) e (15) delimitam as gerações de cada usina sob cada caso k de contingência.

Uma vez apresentado e explicado o modelo, podemos ver que, de fato, o número de restrições depende fortemente do parâmetro de segurança K aplicado pelo usuário. Para sermos mais precisos, apresentamos abaixo a relação entre esse parâmetro e o número de restrições, o número de variáveis contínuas e o número de variáveis inteiras do modelo.

<i>Modelo dependente de contingência</i>	
<i># Restrições</i>	$2 I C + 3 L C + N C + 6 I + 3 L + N $
<i># Variáveis Contínuas</i>	$3 I + I C + L + L C + N + N C + 1$
<i># Variáveis Inteiras</i>	$ I $

$$|C| = \binom{|I| + |L|}{K}$$

Tabela 1: Relação entre o parâmetro K e o número de restrições e de variáveis contínuas e inteiras.

Sendo assim, para ficar ainda mais claro o grande efeito do parâmetro K no número de restrições, bem como no número de variáveis contínuas e inteiras, mostramos na tabela 2, abaixo, como esses números variam à medida que K aumenta de 1 a 5, para um sistema de $|N| = 24$ barras, $|I| = 26$ geradores e $|L| = 61$ linhas de transmissão.

<i>Modelo dependente de contingência</i>			
K	<i># Restrições</i>	<i># Variáveis Contínuas</i>	<i># Variáveis Inteiras</i>
1	2.290×10^4	9.873×10^3	26
2	9.693×10^5	4.155×10^5	26
3	2.745×10^7	1.176×10^7	26
4	5.765×10^8	2.471×10^8	26
5	9.570×10^9	4.101×10^9	26

Tabela 2: Variação do número de restrições e de variáveis contínuas e inteiras com o parâmetro K .

As tabelas 1 e 2, acima, mostram porque é intratável computacionalmente considerar o critério de segurança $n-K$, para K maior do que dois, em sistemas de tamanho razoável.

3. Modelo Tri-Nível

Inspirados no cenário mostrado pelas tabelas 1 e 2 da seção anterior, os autores de [16] utilizaram a técnica de otimização robusta [20] para reformular o modelo contingency dependent, propondo uma modelagem matemática com a qual podemos evitar a necessidade de considerar todas as contingências e considerar apenas a pior delas. Contudo, o trabalho [16] tratou apenas de panes em geradores. Tendo isso em vista, neste trabalho, estenderemos esse modelo, incorporando a ele as características de rede de transmissão, bem como a possibilidade de falhas em suas linhas. Para tanto, pensamos em um modelo tri-nível de otimização [21]. Nessa formulação, modelamos o processo de ação e reação em que se define a programação da potência e reserva das usinas, a escolha da pior contingência e a subsequente reação do operador para contorná-la com as reservas programadas. Assim, cada nível é caracterizado da seguinte maneira:

1. no primeiro nível, o operador do sistema planeja o scheduling das usinas, suas respectivas produções em estado normal e reservas para possíveis contingências de maneira a minimizar o custo desse planejamento;
2. no segundo, o modelo encontra a contingência mais severa, com até K elementos (linhas e geradores) fora de serviço. Essa busca é feita de maneira a maximizar o corte de carga da melhor reação que o operador pode exercer frente a essa contingência;
3. por fim, no terceiro nível, o operador busca minimizar o corte de carga, através de um redespacho das usinas dentro dos limites de potência e reserva programados no primeiro nível, para a contingência mais severa proposta pelo segundo nível.

Abaixo, apresentamos a formulação matemática do modelo, cujas premissas foram descritas acima:

$$\underset{f_l, p_i, \theta_b, v_i, r_i^U, r_i^D}{\text{Minimizar}} \sum_{i \in I} (C_i^P(p_i, v_i) + C_i^U r_i^U + C_i^D r_i^D) \quad (16)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I_b} p_i + \sum_{l \in \mathcal{L} | to(l)=b} f_l - \sum_{l \in \mathcal{L} | fr(l)=b} f_l = D_b; \forall b \in N \quad (17)$$

$$f_l = \frac{1}{x_l} (\theta_{fr(l)} - \theta_{to(l)}); \forall l \in \mathcal{L} \quad (18)$$

$$-\bar{F}_l \leq f_l \leq \bar{F}_l; \forall l \in \mathcal{L} \quad (19)$$

$$\underline{P}_i v_i \leq p_i \leq \bar{P}_i v_i; \forall i \in I \quad (20)$$

$$p_i + r_i^U \leq \bar{P}_i v_i; \forall i \in I \quad (21)$$

$$p_i - r_i^D \geq \underline{P}_i v_i; \forall i \in I \quad (22)$$

$$0 \leq r_i^U \leq \bar{R}_i^U v_i; \forall i \in I \quad (23)$$

$$0 \leq r_i^D \leq \bar{R}_i^D v_i; \forall i \in I \quad (24)$$

$$v_i \in \{0,1\}; \forall i \in I \quad (25)$$

$$\Delta D^* \leq 0 \quad (26)$$

$$\Delta D^* = \max_{a_i^G, a_l^L, \delta^*} \left\{ \delta^* \right\} \quad (27)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I} a_i^G + \sum_{l \in L} a_l^L \geq n - K \quad (28)$$

$$a_i^G \in \{0,1\}; \forall i \in I \quad (29)$$

$$a_l^L \in \{0,1\}; \forall l \in L \quad (30)$$

$$\delta^* = \min_{\Delta D_b, f_l^{wc}, p_i^{wc}, \theta_b^{wc}} \left[\sum_{b \in N} \Delta D_b \right] \quad (31)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I_b} p_i^{wc} + \sum_{l \in L | to(l)=b} f_l^{wc} - \sum_{l \in L | fr(l)=b} f_l^{wc} = D_b - \Delta D_b; \forall b \in N \quad (32)$$

$$f_l^{wc} = \frac{a_l^L}{x_l} (\theta_{fr(l)}^{wc} - \theta_{to(l)}^{wc}); \forall l \in L \quad (33)$$

$$-\bar{F}_l \leq f_l^{wc} \leq \bar{F}_l; \forall l \in L \quad (34)$$

$$a_i^G (p_i - r_i^D) \leq p_i^{wc} \leq a_i^G (p_i + r_i^U); \forall i \in I \} \quad (35)$$

O primeiro nível, (16)-(26), tem função objetivo, (16), e restrições, (17) a (25), iguais às do modelo contingency dependent explicado anteriormente. A restrição (26) é um importante elo entre o primeiro nível e os demais, dado que essa restrição limita a zero o valor da variável ΔD^* , resultado da função objetivo do segundo nível (27).

No segundo nível, (27)-(30), a função objetivo, (27), resulta no máximo corte de carga que uma intervenção externa pode provocar no sistema dada uma programação de geração e reserva para cada gerador. A inequação (28) restringe em K o número de falhas em peças do sistema que esta intervenção pode causar.

No terceiro nível, (31)-(35), temos uma reação do operador do sistema, no sentido de contornar o corte de carga provocado pelo segundo nível, utilizando as reservas programadas no primeiro. A resposta do operador ao caso de contingência "proposto" por uma intervenção externa vem através das variáveis: p_i^{wc} , f_l^{wc} , θ_b^{wc} ; que representam geração em cada gerador i , fluxo de potência em cada linha l e ângulo de fase em cada barra b sob o pior caso de contingência, dada uma programação de gerações e reservas. Tal reação é limitada pela decisão de primeiro nível na restrição (35), ou seja, o operador, se for o caso, só pode aumentar ou diminuir a geração de uma usina dentro dos limites decididos no primeiro nível.

É possível avaliar se os níveis 2 e 3 atingiram o propósito para eles enunciado da seguinte maneira: no segundo nível, queremos maximizar a variável δ , que, por sua vez, está limitada ao resultado da função objetivo do terceiro nível (31), que minimiza a soma dos cortes de carga em cada barra. Para tanto, são escolhidos, no segundo nível, vetores a^G e a^L tais que provoquem o maior corte de carga em (31), anulando o máximo de linhas e geradores nas restrições (33) e (35). Como a soma dos elementos dos vetores a^G e a^L deve resultar, pela restrição (28), em, no mínimo, $n - K$, a intervenção externa poderá afetar, no máximo, K elementos entre geradores e linhas. De modo a buscar o maior corte de carga possível, tal intervenção sempre se utilizará do número máximo de componentes do sistema que pode afetar, ou seja, desligará K elementos de maneira criteriosa à procura da pior contingência. Desse



modo, a restrição (28) estará sempre ativa, e o segundo nível decidirá quais componentes deverão ficar fora de serviço nos vetores de variáveis binárias de decisão a^G e a^L para que o valor de δ^* seja maximizado e, conseqüentemente, seja causado o maior dano possível ao operador.

4. Metodologia de Solução

Modelos de três níveis, como o (16)-(35), apresentado na seção anterior, não podem ser resolvidos de maneira trivial pelos solvers disponíveis no mercado. Para tratar tais tipos de formulação, precisamos diminuir ao máximo o número de níveis. Em [16], foi utilizada a teoria apresentada por Bertsimas e Sim em [20] para reduzir o número de níveis do modelo proposto de dois para um, obtendo uma formulação equivalente viável de ser resolvida com moderado esforço computacional. Todavia, nem sempre dispomos de condições favoráveis para reduzir um problema multi-nível a um de apenas um nível. No presente trabalho, utilizamos a mesma técnica de [16] para reduzir o número de níveis do modelo (16)-(35) de três para dois. Entretanto, como não obtivemos uma formulação equivalente de um nível, mas sim uma de dois níveis, se fez necessário o desenvolvimento de uma heurística de solução. Os passos que envolveram a nossa busca por uma metodologia de solução eficiente para o problema em questão são descritos nas subseções a seguir.

a. Segundo Nível Equivalente

Da mesma forma como feito em [16], podemos obter um limite inferior para o segundo nível original, (27)-(30), através da formulação dual do terceiro nível original, (31)-(35), à luz do teorema da dualidade forte e da metodologia apresentada em [20]. Sendo assim, apresentamos primeiramente o dual do terceiro nível abaixo.

$$\delta^* = \max_{\beta_b, \omega_l, \pi_l, \sigma_l, \gamma_i, \chi_i} \sum_{b \in N} \beta_b D_b - \sum_{l \in \mathcal{L}} \pi_l \bar{F}_l - \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_l \bar{F}_l + \sum_{i \in I} \gamma_i a_i^G (p_i - r_i^D) - \sum_{i \in I} \chi_i a_i^G (p_i + r_i^U) \quad (36)$$

sujeito a:

$$\beta_b + \gamma_i - \chi_i \leq 0; \forall b \in N, \forall i \in I_b \quad (37)$$

$$\beta_{to(l)} - \beta_{fr(l)} + \omega_l + \pi_l - \sigma_l = 0; \forall l \in \mathcal{L} \quad (38)$$

$$\beta_b \leq 1; \forall b \in N \quad (39)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L} \mid to(l)=b} \frac{a_l^L}{x_l} \omega_l - \sum_{l \in \mathcal{L} \mid fr(l)=b} \frac{a_l^L}{x_l} \omega_l = 0; \forall b \in N \quad (40)$$

No modelo acima, as variáveis $\beta_b, \omega_l, \pi_l, \sigma_l, \gamma_i$ e χ_i são duais das restrições (32), (33), (34) e (35), respectivamente. Da mesma maneira, as variáveis primais $p_i^{wc}, f_l^{wc}, \Delta D_b$ e $\theta_{fr(l)}^{wc}$ são duais das restrições (37), (38), (39) e (40), respectivamente.

De posse do dual do terceiro nível, podemos acoplá-lo ao segundo nível original, escrevendo, assim, as condições de otimalidade do terceiro nível no segundo, no intuito de obter a formulação de um segundo nível equivalente. Essa formulação está expressa a seguir.

$$\Delta D^* = \max_{\beta_b, \omega_l, \pi_l, \sigma_l, \gamma_i, \chi_i} \sum_{b \in N} \beta_b D_b - \sum_{l \in \mathcal{L}} \pi_l \bar{F}_l - \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_l \bar{F}_l + \sum_{i \in I} \gamma_i a_i^G (p_i - r_i^D) - \sum_{i \in I} \chi_i a_i^G (p_i + r_i^U) \quad (41)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I} a_i^G + \sum_{l \in \mathcal{L}} a_l^L \geq n - K \quad (42)$$

$$a_i^G \in \{0,1\}; \forall i \in I \quad (43)$$

$$a_l^L \in \{0,1\}; \forall l \in \mathcal{L} \quad (44)$$

$$\beta_b + \gamma_i - \chi_i \leq 0; \forall b \in N, \forall i \in I_b \quad (45)$$

$$\beta_{to(l)} - \beta_{fr(l)} + \omega_l + \pi_l - \sigma_l = 0; \forall l \in \mathcal{L} \quad (46)$$

$$\beta_b \leq 1; \forall b \in N \quad (47)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L} \mid to(l)=b} \frac{a_l^L}{x_l} \omega_l - \sum_{l \in \mathcal{L} \mid fr(l)=b} \frac{a_l^L}{x_l} \omega_l = 0; \forall b \in N \quad (48)$$

A formulação matemática do segundo nível equivalente acima possui, no entanto, produtos de variáveis de decisão de segundo e terceiro níveis originais na função objetivo e na restrição (48), o que torna o problema não-convexo e intratável pelos solvers de que dispomos. Para contornar esse problema, utilizamos a conhecida técnica de linearização de produtos através de restrições disjuntivas com bigM. Para tanto, foram criadas as seguintes variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned} y_l &= \omega_l(1 - a_l^L) \\ z_i &= \gamma_i a_i^G \\ h_i &= \chi_i a_i^G \end{aligned}$$

Uma vez linearizados os produtos de variáveis de decisão prejudiciais ao modelo, obtivemos a versão final do segundo nível equivalente, que pode ser vista a seguir.

$$\Delta D^* = \max_{\substack{a_i^G, a_l^L, \Delta D_b \\ \beta_b, \omega_l, \pi_l, \sigma_l, \gamma_i, \chi_i \\ z_i, h_i, y_l}} \left\{ \sum_{b \in N} \beta_b D_b - \sum_{l \in \mathcal{L}} \pi_l \bar{F}_l - \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_l \bar{F}_l + \sum_{i \in I} z_i (p_i - r_i^D) - \sum_{i \in I} h_i (p_i + r_i^U) \right\} \quad (49)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I} a_i^G + \sum_{l \in \mathcal{L}} a_l^L \geq n - K \quad (50)$$

$$a_i^G \in \{0,1\}; \forall i \in I \quad (51)$$

$$a_l^L \in \{0,1\}; \forall l \in \mathcal{L} \quad (52)$$

$$\beta_b + \gamma_i - \chi_i \leq 0; \forall b \in N, \forall i \in I_b \quad (53)$$

$$\beta_{to(l)} - \beta_{fr(l)} + \omega_l + \pi_l - \sigma_l = 0; \forall l \in \mathcal{L} \quad (54)$$

$$\beta_b \leq 1; \forall b \in N \quad (55)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L} \mid to(l)=b} \left(\frac{\omega_l}{x_l} - \frac{y_l}{x_l} \right) - \sum_{l \in \mathcal{L} \mid fr(l)=b} \left(\frac{\omega_l}{x_l} - \frac{y_l}{x_l} \right) = 0; \forall b \in N \quad (56)$$

$$-Ma_l^L \leq y_l - \omega_l \leq Ma_l^L; \forall l \in \mathcal{L} \quad (57)$$

$$-M(1 - a_l^L) \leq y_l \leq M(1 - a_l^L); \forall l \in \mathcal{L} \quad (58)$$

$$-(1 - a_i^G)M \leq z_i - \gamma_i \leq (1 - a_i^G)M; \forall i \in I \quad (59)$$

$$0 \leq z_i \leq Ma_i^G; \forall i \in I \quad (60)$$

$$-(1 - a_i^G)M \leq h_i - \chi_i \leq (1 - a_i^G)M; \forall i \in I \quad (61)$$

$$0 \leq h_i \leq Ma_i^G; \forall i \in I \quad (62)$$

O segundo nível equivalente acima é capaz de achar, dada uma programação de gerações e reservas, o pior caso de contingência, ou seja, os K elementos do sistema que provocam o maior corte de carga, ao ficarem fora de serviço simultaneamente por falhas independentes ou dependentes umas das outras. Sendo assim, reproduz de maneira fidedigna o papel dos níveis dois e três originais. Desta forma, agora temos um modelo equivalente de dois níveis, no qual o primeiro nível é (16)-(26) e o segundo nível é (49)-(62).

b. Primeiro Nível Aproximado

O primeiro nível, tal como é formulado em (16)-(26), não é possível de ser resolvido porque a variável ΔD^* , presente na restrição (26), é função do segundo nível equivalente, (49)-(62), cujo comportamento, por sua vez, depende da decisão de primeiro nível envolvendo gerações e reservas programadas. Nesse contexto, modificamos o primeiro nível de maneira que este viesse a ser resolvido de forma eficiente, dualizando a restrição (26) ao incorporar a variável α à função objetivo. Dessa forma, a modelagem do primeiro nível aproximado segue abaixo.

$$\underset{\substack{f_l, p_i, \theta_b, v_i, \\ r_i^U, r_i^D, \Delta D^*, \alpha}}{\text{Minimizar}} \sum_{i \in I} (C_i^P(p_i, v_i) + C_i^U r_i^U + C_i^D r_i^D) + C^{LS} \alpha \quad (63)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I_b} p_i + \sum_{l \in \mathcal{L} \mid to(l)=b} f_l - \sum_{l \in \mathcal{L} \mid fr(l)=b} f_l = D_b; \forall b \in N \quad (64)$$

$$f_l = \frac{1}{x_l} (\theta_{fr(l)} - \theta_{to(l)}); \forall l \in \mathcal{L} \quad (65)$$

$$-\bar{F}_l \leq f_l \leq \bar{F}_l; \forall l \in \mathcal{L} \quad (66)$$

$$\underline{P}_i v_i \leq p_i \leq \bar{P}_i v_i; \forall i \in I \quad (67)$$

$$p_i + r_i^U \leq \bar{P}_i v_i; \forall i \in I \quad (68)$$

$$p_i - r_i^D \geq \underline{P}_i v_i; \forall i \in I \quad (69)$$

$$0 \leq r_i^U \leq \bar{R}_i^U v_i; \forall i \in I \quad (70)$$

$$0 \leq r_i^D \leq \bar{R}_i^D v_i; \forall i \in I \quad (71)$$

$$v_i \in \{0,1\}; \forall i \in I \quad (72)$$

$$\Delta D_{j-1}^* + \sum_{i \in I} [(p_i - p_{i,j-1}^*)(z_{i,j-1}^* - h_{i,j-1}^*) + (r_i^D - r_{i,j-1}^{D*})(-z_{i,j-1}^*) + (r_i^U - r_{i,j-1}^{U*})(-h_{i,j-1}^*)] \leq \alpha; \forall j = 1, \dots, k \quad (73)$$

Essa nova variável, denominada α , representa uma aproximação para a função ΔD^* (corte de carga) através dos planos de corte do bloco de restrições (73). Dessa maneira, estamos penalizando o corte de carga na função objetivo, associando-o a um custo ao invés de simplesmente limitá-lo a zero como é feito pela restrição (26). Desse modo, decisões com corte de carga serão viáveis apesar de indesejáveis, o que fica claro dado o alto custo c^{LS} pago por cada unidade de corte de carga. Explicaremos com mais detalhes como são determinadas as restrições de corte que aproximam ΔD^* na próxima subseção.

Ainda no intuito de prover um primeiro nível o mais sofisticado possível, adicionamos a ele as restrições abaixo, advindas do artigo [16].

$$(|I| - K)\lambda - \sum_{i \in I} \xi_i \geq \sum_{b \in N} \Delta D_b \quad (74)$$

$$\lambda - \xi_i \leq p_i + r_i^U; \forall i \in I \quad (75)$$

$$\xi_i \geq 0; \forall i \in I \quad (76)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (77)$$

Tais restrições são válidas para o problema e têm como papel influenciar na decisão de reservas de subida, tornando primeiro nível capaz de proporcionar soluções robustas a falhas de geradores. Na próxima subseção, veremos com mais detalhes a atuação dessas restrições no sentido de fornecer um melhor ponto de partida para o algoritmo que será proposto.

c. Algoritmo de Benders

Postas em prática as observações feitas nas subseções anteriores, chegamos a um modelo de dois níveis ainda sem condições de ser resolvido por solvers comerciais. Sendo assim, se fez necessário o desenvolvimento de uma heurística capaz de resolver o problema.

Nesse sentido, baseados na Decomposição de Benders [21], adaptamos o algoritmo referente a essa técnica, o algoritmo de Benders, ao nosso caso. Essa é uma abordagem adequada quando estamos diante de um problema de dois níveis, sendo largamente utilizada em diversos trabalhos técnicos.

Dessa forma, a idéia do algoritmo proposto no presente trabalho é a seguinte: primeiramente, resolvemos o primeiro nível, (63)-(77), e determinamos uma programação inicial de geração e reserva de cada usina. Essa decisão de primeiro nível chega sob forma de parâmetro ao segundo nível, (49)-(62), que, ao ser resolvido, encontra o maior corte de carga que pode ocorrer, dadas as gerações e reservas do sistema, bem como sua topologia. Voltamos, então, ao primeiro nível, onde é proposto um novo despacho dos geradores e, em seguida, o submetemos novamente ao segundo nível. Repetimos esses passos em iterações sucessivas até determinar quais devem ser as gerações e reservas propiciadas por cada usina de modo que o corte de carga encontrado pelo segundo nível seja o menor possível. Nesse sentido, as restrições (74)-(77) têm um importante papel: proporcionar um melhor ponto de partida ao algoritmo, tornando-o mais rápido. Com essas restrições, a solução do primeiro nível já chega, ao segundo nível, robusta a falhas de geradores em um sistema de nó único. Dessa maneira, o espaço de busca do algoritmo é reduzido consideravelmente, dado que soluções de primeiro nível já são propostas com substancial reserva de subida. Sendo assim, o algoritmo proposto precisa apenas visitar um subespaço reduzido bem menor do que o espaço total de busca, o que,

consequentemente, melhora sua performance. A dinâmica do algoritmo proposto é ilustrada no esquema a seguir.

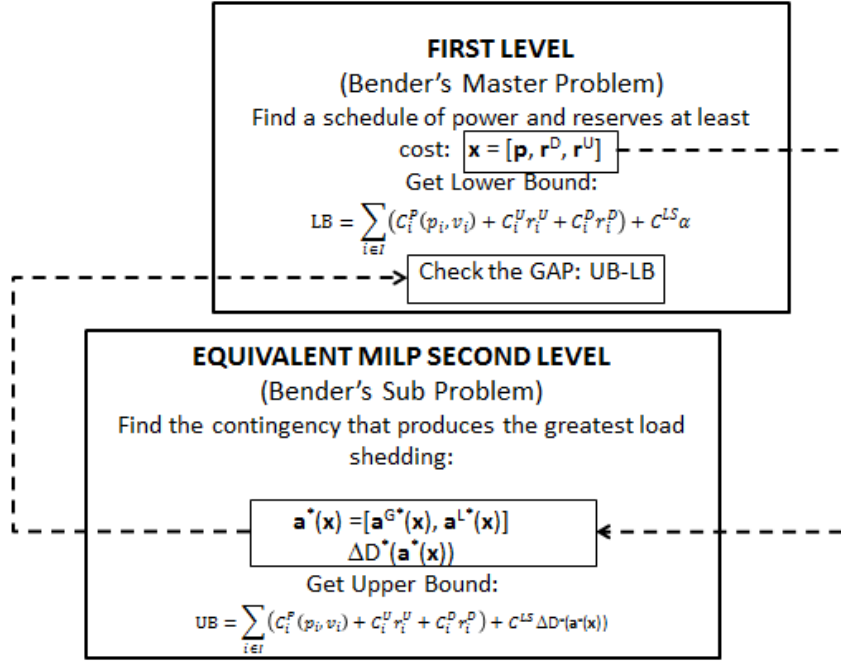


Figura 2: Ilustração do algoritmo proposto.

A seguir, formalizamos em pseudocódigo a ideia descrita e ilustrada acima, deixando de forma ainda mais clara todas as etapas da metodologia de solução do problema de dois níveis em questão.

1) Inicialização

- Defina o valor do contador global de iterações $k=0$;
- Encontre a solução inicial sem segurança:
Resolva o problema master (63)-(77) e armazene \mathbf{p}_k^* , \mathbf{r}_k^{U*} e \mathbf{r}_k^{D*} ;
- Calcule o limite inferior:
 $LB^* = C^P(\mathbf{p}_k^*, \mathbf{v}_k^*) + C_i^U \mathbf{r}_k^{U*} + C_i^D \mathbf{r}_k^{D*} + C^{LS} \alpha_k^*$;
- Resolva o subproblema (49)-(62) para \mathbf{p}_k^* , \mathbf{r}_k^{U*} e \mathbf{r}_k^{D*} e armazene ΔD_k^* , \mathbf{z}_k^* e \mathbf{h}_k^* ;
- Calcule o limite superior:
 $UB^* = C^P(\mathbf{p}_k^*, \mathbf{v}_k^*) + C_i^U \mathbf{r}_k^{U*} + C_i^D \mathbf{r}_k^{D*} + C^{LS} \Delta D_k^*$;

2) Atualize o contador de iterações: $k \leftarrow k + 1$.

3) Loop do Benders

Enquanto $UB^* - LB^* \neq 0$ Faça

- Insira a nova restrição de corte no vetor de conjunto de cortes:

$$Corte(k) = \left\{ \Delta D_{k-1}^* + \sum_{i \in I} [(p_i - \mathbf{p}_{i,k-1}^*)(\mathbf{z}_{i,k-1}^* - \mathbf{h}_{i,k-1}^*) + (r_i^D - \mathbf{r}_{i,k-1}^{D*})(-\mathbf{z}_{i,k-1}^*) + (r_i^U - \mathbf{r}_{i,k-1}^{U*})(-\mathbf{h}_{i,k-1}^*)] \leq \alpha \right\}. \quad (78)$$

- Resolva o problema master (63)-(77) - $\{Corte(j)\}_{j=1}^k$ e armazene \mathbf{p}_k^* , \mathbf{r}_k^{U*} e \mathbf{r}_k^{D*} ;
- Calcule o limite inferior:
 $LB^* = C^P(\mathbf{p}_k^*, \mathbf{v}_k^*) + C_i^U \mathbf{r}_k^{U*} + C_i^D \mathbf{r}_k^{D*} + \alpha_k^*$;
- Resolva o subproblema (49)-(62) para \mathbf{p}_k^* , \mathbf{r}_k^{U*} e \mathbf{r}_k^{D*} e armazene ΔD_k^* , \mathbf{z}_k^* e \mathbf{h}_k^* ;
- Calcule o limite superior:
 $UB^* = C^P(\mathbf{p}_k^*, \mathbf{v}_k^*) + C_i^U \mathbf{r}_k^{U*} + C_i^D \mathbf{r}_k^{D*} + \Delta D_k^*$;
- $k \leftarrow k + 1$.



Um importante passo do algoritmo, ainda não comentado nesta subseção, é o processo de inserção das restrições (73) de corte no primeiro nível. Essas restrições são constituídas através de informações provenientes da resolução do segundo nível. Tais informações levam em consideração a variação infinitesimal do corte de carga com a geração, bem como com as reservas de subida e descida, e são assimiladas pelo primeiro nível sob a forma de planos de corte que limitam sua região viável, levando-o em direção a uma decisão menos vulnerável à falta de energia. Esses planos de corte são adicionados até que encontremos a solução de menor déficit de atendimento à demanda, quando o gap entre UB^* e LB^* , calculados a cada iteração, se fecha.

5. Casos de Estudo

Uma vez esclarecida a metodologia de solução, apresentamos nesta seção os resultados obtidos em dois estudos de caso: um pequeno, de teste, onde é possível averiguar facilmente a coerência da solução encontrada, e um sistema padrão do IEEE um pouco modificado sem perdas de generalidade.

a. Exemplo 3 Barras

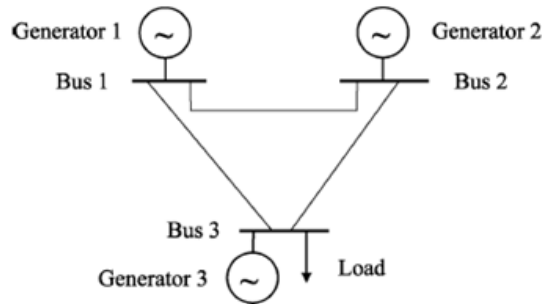


Figura 3: Topologia do exemplo de três barras.

O exemplo de três barras desta subseção é proveniente de [10], onde encontramos a topologia acima e os dados mostrados na tabela a seguir.

Dados dos Geradores									Dados das Linhas de Transmissão				
	Custos				Limites (MW)								
Ger.	C_0 \$	p \$/MW	r^U \$/MW	r^D \$/MW	\bar{P}	\underline{P}	\bar{R}^U	\bar{R}^D	Linha	Barras Adjacentes		\bar{F}_l (p.u.)	x (p.u.)
1	10	50	1	0.25	50	2.4	47.6	47.6	1	1	2	1	0.63
2	0.5	3	0.3	0.02	50	2.4	47.6	47.6	2	1	3	1	0.63
3	5	19.9	0.7	0.1	50	2.4	47.6	47.6	3	2	3	0.3	0.63

Tabela 3: Dados do exemplo de três barras.

Trata-se de um exemplo simples, cujo objetivo é checar a solução do algoritmo descrito na seção anterior, que aqui será aplicado para determinar uma programação de geração e reservas capaz de atender a uma demanda de 50MW na barra 3, adotando o critério de segurança $n - 1$. Os resultados são apresentados nos gráficos abaixo, com valores em p.u. na base de 100MVA e 138kV, e podem ser analisados com ainda mais detalhes na subseção "RESULTADOS - 3 BARRAS" do anexo.

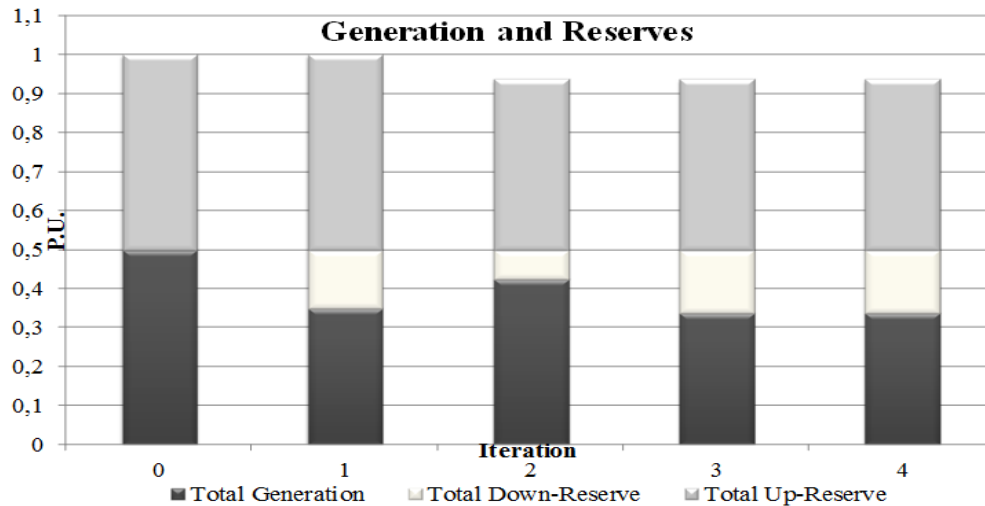


Figura 4: Geração e reserva totais a cada iteração – 3 Barras.

O gráfico acima ilustra a geração e a reserva de todas as três usinas somadas em cada iteração. Logicamente, em todas as iterações, a soma total das produções dos geradores foi equivalente à demanda do sistema. Essa geração total é representada no gráfico acima pelas barras pretas. As barras brancas partem sempre do valor da demanda, 0.5 p.u., para baixo. Essas barras representam a reserva de descida, ou seja, o sistema pode abaixar sua geração total (barra preta) de 0.5 p.u até o limite especificado pela barra branca em cada iteração. Acima de 0.5 p.u, temos as barras cinzas, que são as reservas de subida delimitando o quanto a geração total do sistema pode subir em cada iteração. A solução capaz de atender a demanda, sob o critério de segurança $n - 1$, aparece na última iteração.

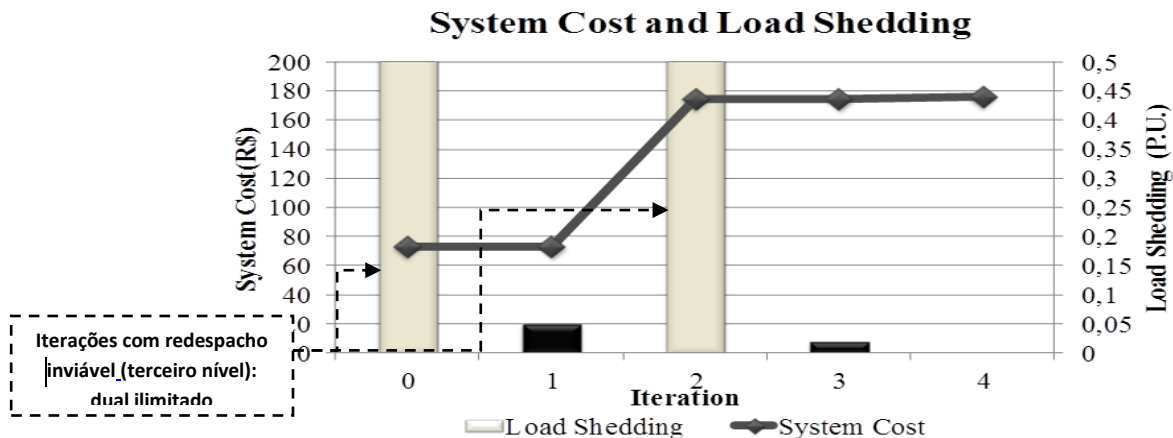


Figura 5: Custo do sistema e corte de carga em cada iteração– 3 Barras.

No gráfico acima, as barras representam o corte de carga em cada iteração e a linha, o custo do sistema. Verificamos que o algoritmo obteve sucesso no objetivo de encontrar uma solução robusta a falha de qualquer componente do sistema, isto é, adotando o critério $n - 1$.

Podemos observar que as iterações 0 e 2 tiveram corte de carga acima da demanda total do sistema de 0.5 p.u.. Isso ocorre quando o pior caso de contingência, encontrado pelo segundo nível equivalente (subproblema), implica um terceiro nível original (redespacho) inviável. Por exemplo, na iteração 0, temos 0.45 p.u. gerado pela usina 2 e 0.05 p.u. pela usina 3, sem nenhuma reserva de descida

programada. Quando a linha 2, que liga as barras 1 e 3 com capacidade de 1 p.u., é interrompida, toda a geração da usina 2 é obrigada a passar pela linha 3, que liga as barras 2 e 3. Infelizmente, a linha 3 não tem capacidade para suportar 0.45 p.u., seu fluxo máximo é de apenas 0.3 p.u. e, além disso, não há reserva de descida programada para o gerador 2. Sendo assim, são violadas restrições de rede do terceiro nível original e o redespacho se torna inviável. Isso se reflete da seguinte maneira: no intuito de resolver um segundo nível equivalente não linear, utilizamos uma versão linearizada do dual do terceiro nível. Quando o terceiro nível é inviável, seu dual, conseqüentemente, é ilimitado. Entretanto, a linearização com bigM's impõe limites à região viável desse problema antes ilimitado. Dessa forma, quando o redespacho (terceiro nível) é inviável, o segundo nível equivalente, ao invés de resultar em um valor infinito, retorna um valor finito da ordem do bigM. A chave para identificar esses casos é verificar quando o segundo nível equivalente retorna um valor de corte de carga acima da demanda total, que é o máximo valor que um terceiro nível viável pode exibir. A próxima figura ilustra com detalhes o caso explicado acima.

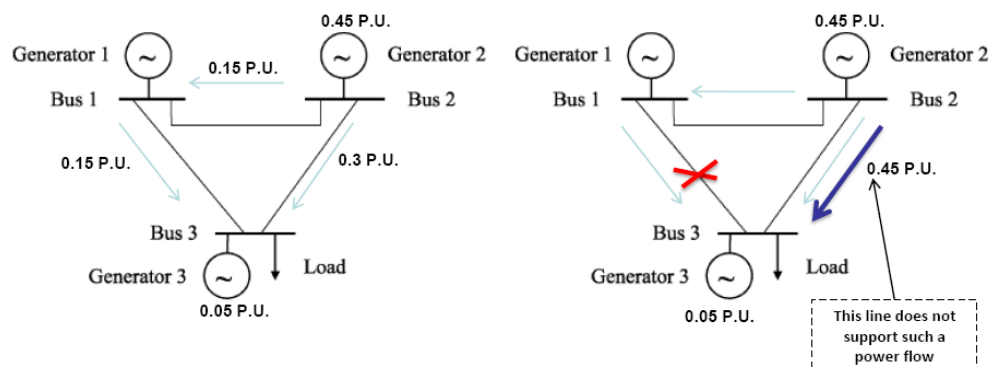


Figura 6: Redespacho inviável.

Primeiramente, à esquerda da figura acima, temos a decisão de despacho do primeiro nível. Em seguida, à direita, temos a intervenção externa causando o pior caso de contingência possível, interrompendo a linha 2 e fazendo com que o redespacho do sistema, reação do operador, se torne inviável.

b. Exemplo RTS 24 Barras Modificado

Seguindo a linha do exemplo anterior, aplicamos o mesmo algoritmo agora a um sistema maior, de 24 barras, 26 geradores e 61 linhas com demanda total de 13.92 p.u.. Para compor esse exemplo, duplicamos algumas linhas de transmissão do sistema padrão de 24 barras do IEEE [22], no intuito de construir uma topologia em que fosse possível encontrar soluções sem corte de carga até $K=3$. As linhas duplicadas são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29 e três vezes a linha 11. Adotamos, neste estudo de caso, o critério $n-K$, onde K variou de 1 a 5. Para $K=1$ e $K=2$, já na primeira iteração, o algoritmo foi capaz de encontrar uma solução robusta a K falhas em componentes do sistema, valendo-se das restrições (74)-(77), que reduzem o espaço de busca do algoritmo. Para $K=3$, foram necessárias dez iterações, partindo da iteração zero, para solucionar o problema de dois níveis. A seguir, apresentamos os gráficos.

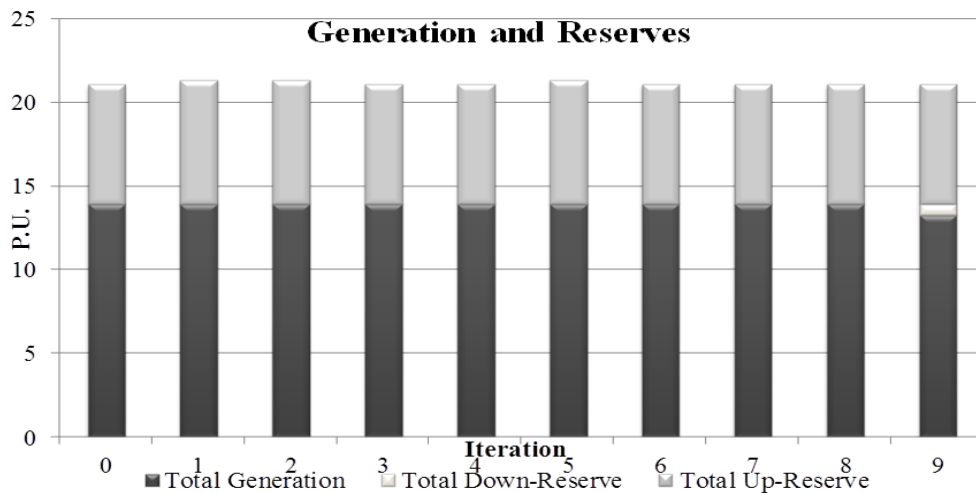


Figura 7: Geração e reserva totais a cada iteração – 24 Barras K=3.

No gráfico acima, percebemos que o primeiro nível vem evitando ao longo das iterações “gastar” com reservas de descida, mas só consegue resolver o problema quando se permite utilizar tal recurso para obter uma solução segura a qualquer combinação de três falhas.

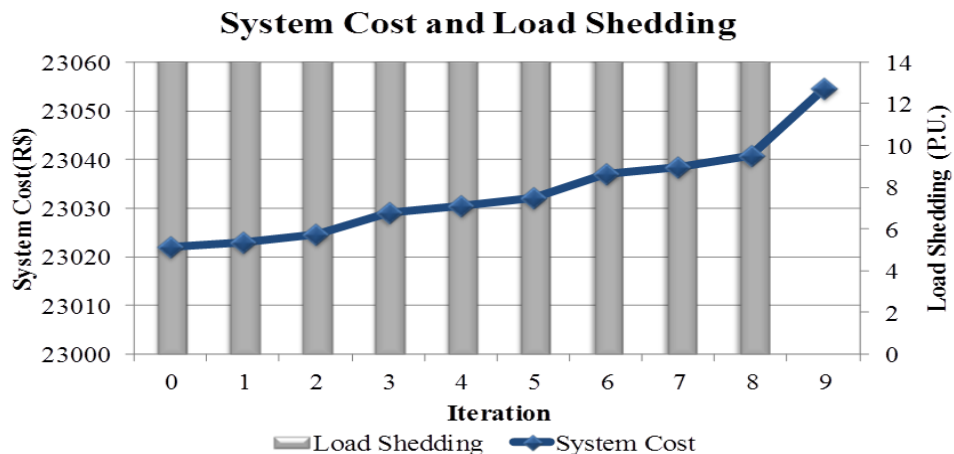


Figura 8: Custo do sistema e corte de carga em cada iteração – 24 Barras K=3.

Na figura acima, percebemos que, exceto a última iteração, todas as outras sofrem com corte de carga acima da demanda, evidenciando o que foi explicado no final da subseção anterior. Isso acontece justamente pela falta de reservas de descida que, quando adicionadas, permitem ao primeiro nível encontrar a solução desejada.

A seguir apresentamos os gráficos das iterações do mesmo estudo de caso, agora para $K = 4$.

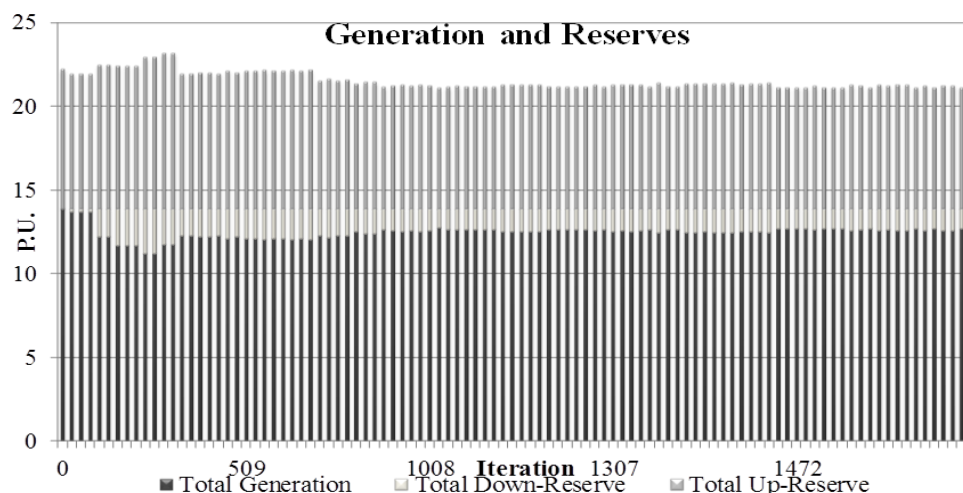


Figura 9: Geração e reserva totais a cada iteração – 24 Barras K=4.

Infelizmente, para essa topologia, depois de 1491 iterações, verificamos que não foi possível encontrar uma solução imune a corte de carga para qualquer combinação de quatro falhas no sistema. Suspeitamos fortemente neste ponto da pesquisa que trata-se de uma limitação da rede, uma vez que, possivelmente, tal configuração de malha de linhas de transmissão disponível para esse estudo de caso não seja favorável a determinação de uma programação de gerações e reservas que sobreviva a falhas de até quatro elementos. Em linhas gerais, acreditamos que não haja linhas de transmissão suficientes para atingir esse objetivo, de modo que com quatro possibilidades de falha, algumas barras podem ficar desconectadas do sistema, ficando ilhadas, caracterizando um grafo desconexo, o que dificulta a resolução do problema. Todavia essa afirmação não pode ser completamente comprovada devido a não convexidade do segundo nível equivalente já discutida anteriormente.

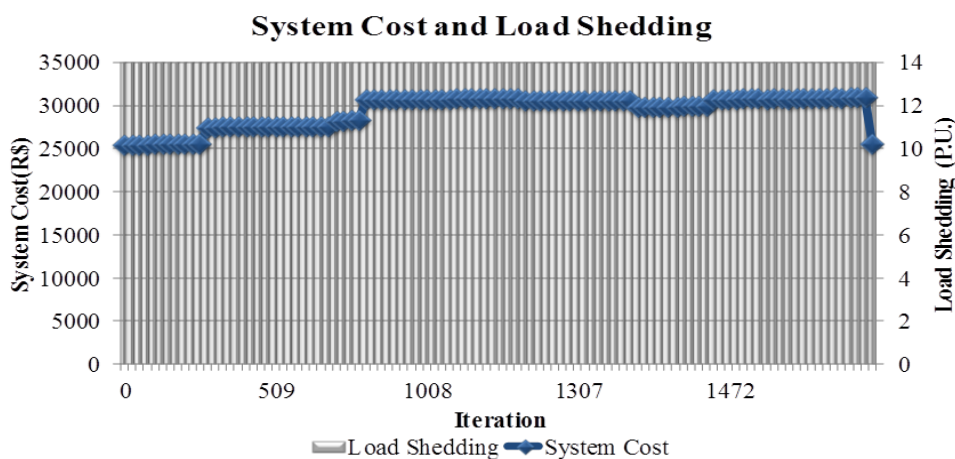


Figura 10: Custo do sistema e corte de carga em cada iteração – 24 Barras K=4.

Como já dissemos, o gráfico acima reitera que, para a dada topologia do caso de estudo, não encontramos solução sem déficit no atendimento à demanda sob critério $n - 4$. Uma análise criteriosa dos resultados indicou que, em muitas das iterações, o pior caso de contingência é interromper quatro linhas tais que desconectem uma ou mais barras da rede, deixando o grafo da rede de transmissão desconexo, o que propiciou redespacho inviável em todas as iterações e, consequentemente, cortes de carga acima da demanda total.

Abaixo, por fim, apresentamos os gráficos referentes à aplicação do critério de segurança $n - 5$ ao estudo de caso proposto.

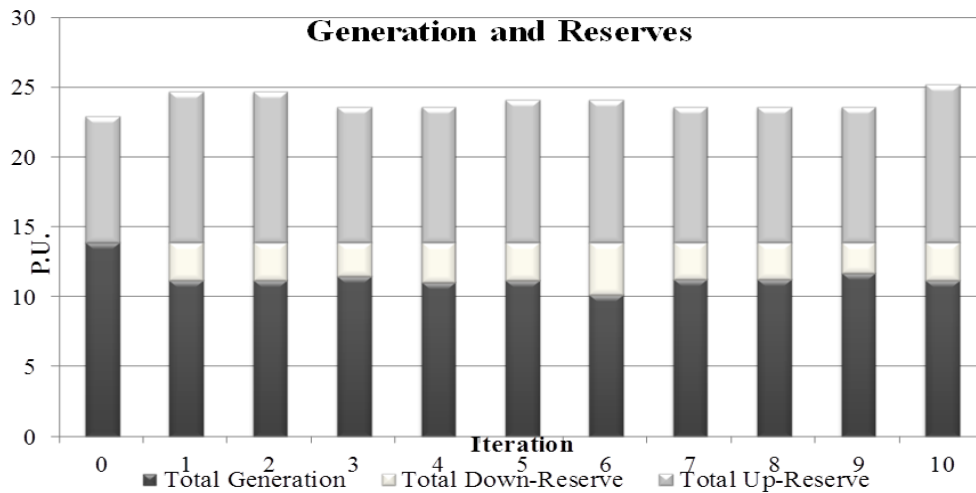


Figura 11: Geração e reserva totais a cada iteração – 24 Barras K=5.

Para $K = 5$, o gap do algoritmo de Benders fechou-se rapidamente, contudo o quadro foi tão indesejável quanto para $K = 4$ e, mais uma vez, não foi possível encontrar uma solução sem corte de carga. Todavia, esse resultado, na verdade, não chegou a ser uma surpresa, dado que o incremento no parâmetro K torna sempre mais difícil achar uma solução imune a cortes de carga. Sendo assim, uma topologia que não admite despacho sob o critério de segurança $n - 4$ não aceitaria, de forma alguma, uma solução adotando $n - 5$, sendo esse resultado perfeitamente coerente.

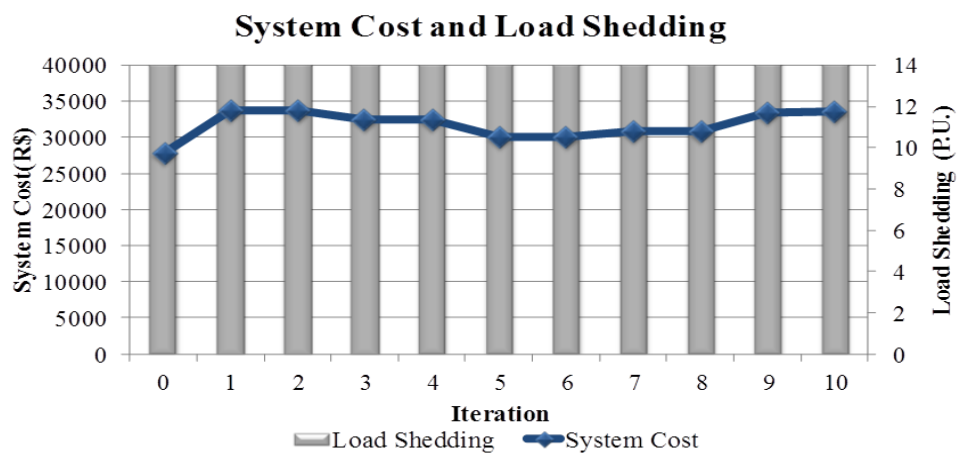


Figura 12: Custo do sistema e corte de carga em cada iteração – 24 Barras K=5.

O gráfico acima exhibe o comportamento dos custos, bem como do corte de carga, ao longo das onze iterações realizadas neste estudo de caso para $K = 5$. Assim, como sob o critério $n - 4$, todas as iterações também apresentaram corte de carga acima da demanda, indicando resdespacho inviável, o que é natural pelos mesmos motivos discutidos no parágrafo anterior.

Todos os resultados deste estudo de caso têm suas iterações finais registradas no anexo, na subseção "RESULTADOS - 24 BARRAS". Abaixo, temos um resumo final dos resultados obtidos nos dois estudos

de caso, além de uma avaliação do desempenho do algoritmo no que se refere a esforço computacional. Nos estudos de caso citados, utilizamos um computador Pentium Intel i7, processador de 3.2 Ghz e 16 GB RAM.

Tempos Computacionais(s)					Função Objetivo – Custo do Sistema (\$)		
Exemplo	Critério de Contingência	Modelo CD	Modelo Robusto		Modelo CD	Modelo Robusto	
			Com restrições (74)-(77)	Sem restrições (74)-(77)		Com restrições (74)-(77)	Sem restrições (74)-(77)
3 Barras	$K=0$	0.015	0.015	0.016	40	40	40
	$K=1$	0.031	0.172	0.344	175.784	175.784	175.784
RTS 24 Barras Modificado	$K=0$	0.031	0.031	0.031	16230.9	16230.9	16230.9
	$K=1$	2.016	0.234	294.287	17032.5	17032.5	17032.5
	$K=2$	421.928	0.86	266403*	18791.3	18791.3	263832.2*
	$K=3$	255491*	41.639	244811*	24097.3*	23054.6	345950.9*
	$K=4$	SM	6547.66	226802*	SM	1.9e + 06**	416956*
	$K=5$	SM	1.703	33122*	SM	1.36e + 07**	518352*

*Não terminado até este tempo. UB reportado para o modelo robusto.

**Nenhuma solução viável encontrada para o terceiro nível. Dual do terceiro nível ilimitado. UB reportado.

SM- Sem memória suficiente para carregar a matriz do problema.

Tabela 4: Comparação de desempenho dos modelos.

A tabela acima demonstra a grande superioridade, em termos computacionais, do modelo robusto proposto neste trabalho frente ao modelo contingency dependent, utilizado até então para prover soluções com segurança, sobretudo quando utilizamos as restrições (74)-(78) provenientes de [16], que deram um enorme salto de qualidade na metodologia de solução do problema. Em duas oportunidades, para $K = 4$ e $K = 5$, o solver não foi capaz nem de carregar a matriz do problema contingency dependent, mesmo sendo utilizado um computador com 16 GB de RAM.

6. Conclusão

Os resultados computacionais oriundos deste estudo corroboram a superioridade de formulações multiníveis frente à formulação convencional, em que as contingências são enumeradas de maneira explícita. Para um sistema de teste classificado pelo IEEE (RTS-24 bus) com $K > 2$, o modelo convencional não foi capaz de ser resolvido. Já o modelo proposto resolveu o problema em tempo computacional satisfatório (inferior a 2 horas) em um computador Pentium Intel i7, processador de 3.2 Ghz e 16 GB RAM. Esses resultados serão submetidos à revista IEEE Transactions on Power Systems e foram realizados em uma cooperação acadêmica entre a PUC-Rio e a Universidad Castilla-La Mancha (UCLM), coordenada pelos professores Alexandre Street (DEE / PUC-Rio) e José Manuel Arroyo (UCLM).

7. Referências

- [1] A. J. Wood and B. F. Wollenberg, *Power Generation, Operation, and Control*, 2nd ed. New York: Wiley, 1996.
- [2] P. Kundur, J. Paserba, V. Ajjarapu, G. Andersson, A. Bose, C. Canizares, N. Hatziaargyriou, D. Hill, A. Stankovic, C. Taylor, T. van Cutsem, and V. Vittal, "Definition and classification of power system stability," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 19, no. 2, pp. 1387-1401, May 2004.
- [3] Relatório de Análise de Perturbação-RAP, "Análise da Perturbação do dia 10/11/2009 às 22h13min envolvendo o desligamento dos três circuitos da LT 765kV Itaberá-Ivaiporã", ONS – RE-3-252/2009
- [4] Relatório de Análise de Perturbação-RAP, "Análise da Perturbação do dia 04/02/2011 à 00h21min envolvendo os estados do Nordeste", ONS – RE-3-0032/2011
- [5] G. C. Oliveira, S. Binato, and M. V. F. Pereira, "Value-based transmission expansion planning of hydrothermal systems under uncertainty," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 22, no. 4, pp. 1429-1435, Nov. 2007.
- [6] M. Carrión, J. M. Arroyo, and N. Alguacil, "Vulnerability-constrained transmission expansion planning: A stochastic programming approach," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 22, no. 4, pp. 1436-1445, Nov. 2007.
- [7] J. Choi, T. D. Mount, and R. J. Thomas, "Transmission expansion planning using contingency criteria," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 22, no. 4, pp. 2249-2261, Nov. 2007.
- [8] N. Alguacil, M. Carrión, and J. M. Arroyo, "Transmission network expansion planning under deliberate outages," *Int. J. Electr. PowerEnergy Syst.*, vol. 31, no. 9, pp. 553-561, Oct. 2009.
- [9] J. M. Arroyo, "Bilevel programming applied to power system vulnerability analysis under multiple contingencies," *IET Gener. Transm. Distrib.*, vol. 4, no. 2, pp. 178-190, Feb. 2010.
- [10] J. M. Arroyo and F. D. Galiana, "Energy and reserve pricing in security and network-constrained electricity markets," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 20, no. 2, pp. 634-643, May 2005.
- [11] F. D. Galiana, F. Bouffard, J. M. Arroyo, and J. F. Restrepo, "Scheduling and pricing of coupled energy and primary, secondary, and tertiary reserves," *Proc. IEEE*, vol. 93, no. 11, pp. 1970-1983, Nov. 2005.
- [12] J. Wang, N. E. Redondo, and F. D. Galiana, "Demand-side reserve offers in joint energy/reserve electricity markets," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 18, no. 4, pp. 1300-1306, Nov. 2003.
- [13] P. A. Ruiz, C. R. Philbrick, E. Zak, K. W. Cheung, and P. W. Sauer, "Uncertainty management in the unit commitment problem," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 24, no. 2, pp. 642-651, May 2009.
- [14] K. W. Hedman, R. P. O'Neill, E. B. Fisher, and S. S. Oren, "Optimal transmission switching with contingency analysis," *IEEE Trans. PowerSyst.*, vol. 24, no. 3, pp. 1577-1586, Aug. 2009.
- [15] K. W. Hedman, M. C. Ferris, R. P. O'Neill, E. B. Fisher, and S. S. Oren, "Co-optimization of generation unit commitment and transmission switching with n-1 reliability," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 25, no. 2, pp. 1052-1063, May 2010.
- [16] A. Street, F. Oliveira, J.M. Arroyo, "Contingency-Constrained Unit Commitment With n-K Security Criterion: A Robust Optimization Approach", *Power Systems, IEEE Transactions on* , vol.PP, no.99, pp.1-10, doi:10.1109/TPWRS.2010.2087367.
- [17] A. L. Soyster, "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming," *Oper. Res.*, vol. 21, no. 5, pp. 1154-1157, Sep.-Oct. 1973.



[18] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, "Robust convex optimization," Math. Oper. Res., vol. 23, no. 4, pp. 769-805, Nov. 1998.

[19] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, "Robust optimization – Methodology and applications," Math. Program., vol. 92, no. 3, pp. 453-480, May 2002.

[20] D. Bertsimas and M. Sim, "The price of robustness," Oper. Res., vol. 52, no. 1, pp. 35-53, Jan.-Feb. 2004.

[21] A. J. Conejo, E. Castillo, R. Mínguez,; e R.G. Bertrand, Decomposition Techniques in Mathematical Programming. New York, Ed. Springer, 2006. ISBN 3-540-27685-8.

[22] Reliability Test System Task Force, "The IEEE reliability test system—1996," IEEE Trans. Power Syst., vol. 14, no. 3, pp. 1010–1020, Aug. 1999.

Anexo

As tabelas de resultados apresentadas nesta seção têm valores em p.u. na base de base de 100MVA e 138kV.

a. Resultados 3 Barras

Iteration 0					Iteration 1				
Master Problem: First Level Decision					Master Problem: First Level Decision				
System Cost: \$ 73					System Cost: \$ 73.3				
Generator\ Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f	Generator\ Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f
1	0	0	0	-0.15	1	0	0	0	-0.15
2	0.45	0.05	0	0.15	2	0.45	0.05	0.15	0.15
3	0.05	0.45	0	0.3	3	0.05	0.45	0	0.3
Subproblem: Outage					Subproblem: Outage				
$\Delta D^* = 15, LB = 73, UB = 150073$					$\Delta D^* = 0.05, LB = 73.3, UB = 573.3$				
Generator\ Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*	Generator\ Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*
1	1	1	0	100	1	1	1	0	100
2	1	0	100	0	2	1	1	0	0
3	1	1	0	0	3	0	1	0	0
Iteration 2					Iteration 3				
Master Problem: First Level Decision					Master Problem: First Level Decision				
System Cost: \$ 174.472					System Cost: \$ 174.644				
Generator\ Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f	Generator\ Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f
1	0.024	0.038	0	-0.138	1	0.024	0	0	-0.138
2	0.438	0	0.076	0.162	2	0.438	0.038	0.162	0.162
3	0.038	0.4	0	0.3	3	0.038	0.438	0	0.3
Subproblem: Outage					Subproblem: Outage				
$\Delta D^* = 8.6, LB = 174.472, UB = 86174.5$					$\Delta D^* = 0.038, LB = 174.644, UB = 554.644$				
Generator\ Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*	Generator\ Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*
1	1	1	100	0	1	1	1	0	0.5
2	1	0	100	0	2	1	1	0	0
3	1	1	0	0	3	0	1	0	0
Iteration 4									
Master Problem: First Level Decision									
System Cost: \$ 175.784									
Generator\ Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f					
1	0.024	0.076	0	-0.138					
2	0.438	0	0.162	0.162					
3	0.038	0.362	0	0.3					
Subproblem: Outage									
$\Delta D^* = 0, LB = 175.784, UB = 175.784$									
Generator\ Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*					
1	1	1	0	0					
2	1	1	0	0					
3	1	0	0	0					
Robust Model Time: 0.172s; CD Model Time: 0.031s									

b. Resultados 24 Barras

i. $K = 0$

Iteration 0									
Master Problem: First Level Decision					Subproblem: Outage				
System Cost: \$ 16230.9					$\Delta D^* = 0, LB = 16230.9, UB = 16230.9$				
Generator\Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f	Generator\Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*
1	0	0	0	-0.009226	1	1	1	99	100
2	0	0	0	-0.009226	2	1	1	99	100
3	0	0	0	0.157647	3	1	1	99	100
4	0	0	0	0.157647	4	1	1	99	100
5	0	0	0	0.347878	5	1	1	99	100
6	0	0	0	0.347878	6	1	1	99	100
7	0	0	0	0.256404	7	1	1	99	100
8	0	0	0	0.256404	8	1	1	99	100
9	0	0	0	0.25752	9	1	1	99	100
10	0.76	0	0	0.25752	10	1	1	99	100
11	0.76	0	0	0.058097	11	1	1	0	1
12	0.76	0	0	0.058097	12	1	1	99	100
13	0.76	0	0	-0.339949	13	1	1	0	1
14	0	0	0	-0.339949	14	1	1	99	100
15	0	0	0	0.075704	15	1	1	99	100
16	0	0	0	0.075704	16	1	1	99	100
17	1.55	0	0	0.174528	17	1	1	99	100
18	1.55	0	0	0.174528	18	1	1	0	1
19	1.55	0	0	-0.07453	19	1	1	0	1
20	1.55	0	0	-0.07453	20	1	1	99	100
21	0	0	0	-0.1526	21	1	1	99	100
22	0	0	0	-0.1526	22	1	1	99	100
23	0	0	0	-0.1526	23	1	1	99	100
24	3.5	0	0	-0.1526	24	1	1	0	1
25	1.1777	0	0	-0.3753	25	1	1	0	1
26	0	0	0	-0.34745	26	1	1	99	100
27	--	--	--	-0.3753	27	--	1	--	--
28	--	--	--	-0.34745	28	--	1	--	--
29	--	--	--	-0.345654	29	--	1	--	--
30	--	--	--	-0.991944	30	--	1	--	--
31	--	--	--	-0.400456	31	--	1	--	--
32	--	--	--	-1.04675	32	--	1	--	--
33	--	--	--	-0.545807	33	--	1	--	--
34	--	--	--	-0.100152	34	--	1	--	--
35	--	--	--	-0.100152	35	--	1	--	--
36	--	--	--	-0.135642	36	--	1	--	--
37	--	--	--	-0.951525	37	--	1	--	--
38	--	--	--	-0.951525	38	--	1	--	--
39	--	--	--	-0.987774	39	--	1	--	--
40	--	--	--	-0.987774	40	--	1	--	--
41	--	--	--	-0.573852	41	--	1	--	--
42	--	--	--	-0.573852	42	--	1	--	--
43	--	--	--	-0.378489	43	--	1	--	--
44	--	--	--	-0.378489	44	--	1	--	--
45	--	--	--	0.03954	45	--	1	--	--
46	--	--	--	0.03954	46	--	1	--	--
47	--	--	--	0.339949	47	--	1	--	--

48	--	--	--	0.339949	48	--	1	--	--
49	--	--	--	0.184711	49	--	1	--	--
50	--	--	--	0.184711	50	--	1	--	--
51	--	--	--	-0.606201	51	--	1	--	--
52	--	--	--	-0.606201	52	--	1	--	--
53	--	--	--	0.347986	53	--	1	--	--
54	--	--	--	0.021435	54	--	1	--	--
55	--	--	--	-0.050257	55	--	1	--	--
56	--	--	--	-0.050257	56	--	1	--	--
57	--	--	--	-1.04815	57	--	1	--	--
58	--	--	--	-1.04815	58	--	1	--	--
59	--	--	--	-1.3607	59	--	1	--	--
60	--	--	--	-1.3607	60	--	1	--	--
61	--	--	--	-0.021435	61	--	1	--	--
Robust Model Time: 0.031s; CD Model Time: 0.031s									

ii. K = 1

Iteration 0									
Master Problem: First Level Decision					Subproblem: Outage				
System Cost: \$ 17032.5					$\Delta D^* = 0, LB = 17032.5, UB = 17032.5$				
Generator\ Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f	Generator\ Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*
1	0	0	0	0.2153	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0.2153	2	1	1	0	100
3	0	0	0	0.027304	3	1	1	0	100
4	0	0	0	0.027304	4	1	1	0	100
5	0	0	0	0.253696	5	1	1	0	100
6	0	0	0	0.253696	6	1	1	0	100
7	0	0	0	0.146594	7	1	1	0	100
8	0	0	0	0.146594	8	1	1	0	100
9	0	0	0	0.180706	9	1	1	0	100
10	0.76	0	0	0.180706	10	1	1	100	100
11	0.76	0	0	0.103048	11	1	1	100	100
12	0.6977	0	0	0.103048	12	1	1	100	100
13	0	0	0	-0.515244	13	1	1	0	100
14	0	0	0	-0.515244	14	1	1	0	100
15	0	0	0	-0.034106	15	1	1	0	100
16	0	0	0	-0.034106	16	1	1	0	100
17	1.55	0	0	0.080346	17	1	1	0	0
18	1.55	0	0	0.080346	18	1	1	100	100
19	1.55	0	0	-0.151344	19	1	1	0	0
20	1.55	0	0	-0.151344	20	1	1	100	100
21	0	0	0	-0.1526	21	1	1	0	100
22	0	0	0	-0.1526	22	1	1	0	100
23	0	0	0	-0.1526	23	1	1	0	100
24	3.5	0	0	-0.1526	24	1	1	0	0
25	1	1	0	-0.393181	25	1	1	0	0
26	1	2.5	0	-0.329569	26	1	1	0	0
27	--	--	--	-0.393181	27	--	1	--	--
28	--	--	--	-0.329569	28	--	1	--	--
29	--	--	--	-0.460499	29	--	1	--	--
30	--	--	--	-1.04258	30	--	1	--	--
31	--	--	--	-0.585677	31	--	1	--	--
32	--	--	--	-1.16776	32	--	1	--	--
33	--	--	--	-0.560168	33	--	1	--	--
34	--	--	--	-0.243004	34	--	1	--	--

35	--	--	--	-0.243004	35	--	1	--	--
36	--	--	--	-0.190754	36	--	1	--	--
37	--	--	--	-1.00979	37	--	1	--	--
38	--	--	--	-1.00979	38	--	1	--	--
39	--	--	--	-1.02251	39	--	1	--	--
40	--	--	--	-1.02251	40	--	1	--	--
41	--	--	--	-0.716704	41	--	1	--	--
42	--	--	--	-0.716704	42	--	1	--	--
43	--	--	--	-0.302171	43	--	1	--	--
44	--	--	--	-0.302171	44	--	1	--	--
45	--	--	--	-0.212073	45	--	1	--	--
46	--	--	--	-0.212073	46	--	1	--	--
47	--	--	--	0.515244	47	--	1	--	--
48	--	--	--	0.515244	48	--	1	--	--
49	--	--	--	0.025173	49	--	1	--	--
50	--	--	--	0.025173	50	--	1	--	--
51	--	--	--	-0.513197	51	--	1	--	--
52	--	--	--	-0.513197	52	--	1	--	--
53	--	--	--	0.083913	53	--	1	--	--
54	--	--	--	-0.033566	54	--	1	--	--
55	--	--	--	-0.271144	55	--	1	--	--
56	--	--	--	-0.271144	56	--	1	--	--
57	--	--	--	-0.955147	57	--	1	--	--
58	--	--	--	-0.955147	58	--	1	--	--
59	--	--	--	-1.2677	59	--	1	--	--
60	--	--	--	-1.2677	60	--	1	--	--
61	--	--	--	0.033566	61	--	1	--	--
Robust Model Time: 0.234s; CD Model Time: 2.016s									

iii. K = 2

Iteration 0									
Master Problem: First Level Decision					Subproblem: Outage				
System Cost: \$ 18791.3					$\Delta D^* = 0, LB = 18791.3, UB = 18791.3$				
Generator\Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f	Generator\Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*
1	0	0	0	-0.0006342	1	1	1	0	100
2	0	0	0	-0.0006342	2	1	1	0	100
3	0.02	0.038	0	-0.0092122	3	1	1	0	0
4	0.02	0.1	0	-0.0092122	4	1	1	0	0
5	0	0	0	0.201146	5	1	1	0	100
6	0	0	0	0.201146	6	1	1	0	100
7	0	0	0	0.114736	7	1	1	0	100
8	0	0	0	0.114736	8	1	1	0	100
9	0	0	0	0.15663	9	1	1	0	100
10	0.76	0	0	0.15663	10	1	1	0	0
11	0.15	0.61	0	0.080952	11	1	1	0	0
12	0.76	0	0	0.080952	12	1	1	0	0
13	0.2577	0.502	0	-0.529664	13	1	1	0	0
14	0	0	0	-0.529664	14	1	1	0	100
15	0	0	0	-0.0659644	15	1	1	0	100
16	0.25	0.75	0	-0.0659644	16	1	1	0	0
17	1.55	0	0	0.0277963	17	1	1	0	0
18	1.55	0	0	0.0277963	18	0	1	0	0
19	1.55	0	0	-0.17542	19	1	1	100	100
20	1.55	0	0	-0.17542	20	1	1	100	100
21	0	0	0	-0.0901	21	1	1	0	100

22	0	0	0	-0.0901	22	1	1	0	100
23	0	0	0	-0.0901	23	1	1	0	100
24	3.5	0	0	-0.0901	24	0	1	0	0
25	1	2.5	0	-0.334501	25	1	1	0	0
26	1	2.5	0	-0.263249	26	1	1	0	0
27	--	--	--	-0.334501	27	--	1	--	--
28	--	--	--	-0.263249	28	--	1	--	--
29	--	--	--	-0.456532	29	--	1	--	--
30	--	--	--	-103.709	30	--	1	--	--
31	--	--	--	-0.596742	31	--	1	--	--
32	--	--	--	-11.773	32	--	1	--	--
33	--	--	--	-0.560508	33	--	1	--	--
34	--	--	--	-0.246383	34	--	1	--	--
35	--	--	--	-0.246383	35	--	1	--	--
36	--	--	--	-0.192058	36	--	1	--	--
37	--	--	--	-101.117	37	--	1	--	--
38	--	--	--	-101.117	38	--	1	--	--
39	--	--	--	-102.333	39	--	1	--	--
40	--	--	--	-102.333	40	--	1	--	--
41	--	--	--	-0.720083	41	--	1	--	--
42	--	--	--	-0.720083	42	--	1	--	--
43	--	--	--	-0.297284	43	--	1	--	--
44	--	--	--	-0.297284	44	--	1	--	--
45	--	--	--	-0.21138	45	--	1	--	--
46	--	--	--	-0.21138	46	--	1	--	--
47	--	--	--	0.529664	47	--	1	--	--
48	--	--	--	0.529664	48	--	1	--	--
49	--	--	--	0.0244802	49	--	1	--	--
50	--	--	--	0.0244802	50	--	1	--	--
51	--	--	--	-0.510997	51	--	1	--	--
52	--	--	--	-0.510997	52	--	1	--	--
53	--	--	--	0.0827159	53	--	1	--	--
54	--	--	--	-0.0337554	54	--	1	--	--
55	--	--	--	-0.271742	55	--	1	--	--
56	--	--	--	-0.271742	56	--	1	--	--
57	--	--	--	-0.952947	57	--	1	--	--
58	--	--	--	-0.952947	58	--	1	--	--
59	--	--	--	-12.655	59	--	1	--	--
60	--	--	--	-12.655	60	--	1	--	--
61	--	--	--	0.0337554	61	--	1	--	--
Robust Model Time:0.86s; CD Model Time: 421.928s									

iv. $K = 3$

Iteration 9									
Master Problem: First Level Decision					Subproblem: Outage				
System Cost: \$ 23054.6					$\Delta D^* = 0, LB = 23054.6, UB = 23054.6$				
Generator\ Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f	Generator\ Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*
1	0	0	0	0.0452346	1	1	1	0	100
2	0	0	0	0.0452346	2	1	1	0	100
3	0	0	0	-0.162197	3	1	1	0	100
4	0	0	0	-0.162197	4	1	1	0	100
5	0	0	0	0.00326187	5	1	1	0	100
6	0	0	0	0.00326187	6	1	1	0	100
7	0	0	0	-0.060297	7	1	1	0	100
8	0	0	0	-0.060297	8	1	1	0	100

9	0	0	0	0.018682	9	1	1	0	100
10	0.15	0.61	0	0.018682	10	1	1	0	0
11	0.15	0.61	0	0.018938	11	1	1	0	0
12	0.15	0.61	0	0.018938	12	1	1	0	0
13	0.15	0.61	0	-0.620635	13	1	1	0	0
14	0	0	0	-0.620635	14	1	1	0	100
15	0	0	0	-0.240997	15	1	1	0	100
16	0.25	0.75	0	-0.240997	16	1	1	0	0
17	1.55	0	0	-0.170088	17	0	1	0	0
18	1.55	0	0	-0.170088	18	0	1	0	0
19	1.55	0	0	-0.313368	19	0	1	0	0
20	1.55	0	0	-0.313368	20	1	1	0	0
21	0.69	1.149	0	-0.0901	21	1	1	0	0
22	0	0	0	-0.0901	22	1	1	0	100
23	0.69	1.149	0	-0.0901	23	1	1	0	0
24	3.4877	0	0.626	-0.0901	24	1	1	0	0
25	1	0.839	0	-0.351144	25	1	1	0	0
26	1	0.839	0	-0.246606	26	1	1	0	0
27	--	--	--	-0.351144	27	--	1	--	--
28	--	--	--	-0.246606	28	--	1	--	--
29	--	--	--	-0.681296	29	--	1	--	--
30	--	--	--	-1.31971	30	--	1	--	--
31	--	--	--	-0.887006	31	--	1	--	--
32	--	--	--	-1.52542	32	--	1	--	--
33	--	--	--	-1.08278	33	--	1	--	--
34	--	--	--	-0.24276	34	--	1	--	--
35	--	--	--	-0.24276	35	--	1	--	--
36	--	--	--	-0.677616	36	--	1	--	--
37	--	--	--	-1.08376	37	--	1	--	--
38	--	--	--	-1.08376	38	--	1	--	--
39	--	--	--	-0.837249	39	--	1	--	--
40	--	--	--	-0.837249	40	--	1	--	--
41	--	--	--	-0.71646	41	--	1	--	--
42	--	--	--	-0.71646	42	--	1	--	--
43	--	--	--	-0.394472	43	--	1	--	--
44	--	--	--	-0.394472	44	--	1	--	--
45	--	--	--	-0.225163	45	--	1	--	--
46	--	--	--	-0.225163	46	--	1	--	--
47	--	--	--	0.620635	47	--	1	--	--
48	--	--	--	0.620635	48	--	1	--	--
49	--	--	--	0.0382628	49	--	1	--	--
50	--	--	--	0.0382628	50	--	1	--	--
51	--	--	--	-0.618345	51	--	1	--	--
52	--	--	--	-0.618345	52	--	1	--	--
53	--	--	--	0.106521	53	--	1	--	--
54	--	--	--	-0.0299951	54	--	1	--	--
55	--	--	--	-0.25984	55	--	1	--	--
56	--	--	--	-0.25984	56	--	1	--	--
57	--	--	--	-1.06029	57	--	1	--	--
58	--	--	--	-1.06029	58	--	1	--	--
59	--	--	--	-1.37284	59	--	1	--	--
60	--	--	--	-1.37284	60	--	1	--	--
61	--	--	--	0.0299951	61	--	1	--	--

Robust Model Time: 41.639; CD Model Time: 255491s*

*Não resolvido até esse tempo.

v. K = 4

Iteration 1491									
Master Problem: First Level Decision					Subproblem: Outage				
System Cost: \$ 25530					$\Delta D^* = 37.38, LB = 1.9e + 06, UB = 1.9e + 06$				
Generator\ Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f	Generator\ Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*
1	0	0	0	0.038683	1	1	1	0	100
2	0	0	0	0.038683	2	1	1	0	100
3	0	0	0	-0.14759	3	1	1	0	100
4	0	0	0	-0.14759	4	1	1	0	100
5	0	0	0	-0.004793	5	1	1	0	100
6	0	0	0	-0.004793	6	1	1	0	100
7	0	0	0	-0.061696	7	1	1	0	100
8	0	0	0	-0.061696	8	1	1	0	100
9	0	0	0	0.013529	9	1	1	0	100
10	0.15	0.61	0	0.013529	10	1	1	0	0
11	0.15	0.61	0	-0.01046	11	1	1	0	0
12	0.15	0.61	0	-0.01046	12	1	1	0	0
13	0.15	0.61	0	-0.57663	13	1	1	0	0
14	0.25	0.75	0	-0.57663	14	1	1	0	0
15	0.25	0.75	0	-0.242396	15	1	1	0	0
16	0.25	0.75	0	-0.242396	16	1	1	0	0
17	1.55	0	0	-0.178143	17	1	1	0	0
18	1.55	0	0	-0.178143	18	1	1	0	0
19	1.3379	0.21	0	-0.31852	19	1	1	100	0
20	1.55	0	0	-0.31852	20	1	1	100	0
21	0.69	0.99	0	0.0349	21	1	1	100	0
22	0	0	0	0.0349	22	1	1	0	100
23	0.69	0.99	0	0.0349	23	1	1	100	0
24	3.1998	0	1.8	0.0349	24	1	1	100	0
25	1	0.68	0	-0.22318	25	1	1	0	0
26	1	0.68	0	-0.12457	26	1	1	0	0
27	--	--	--	-0.22318	27	--	1	--	--
28	--	--	--	-0.12457	28	--	1	--	--
29	--	--	--	-0.604592	29	--	1	--	--
30	--	--	--	-1.20208	30	--	0	--	--
31	--	--	--	-0.79864	31	--	1	--	--
32	--	--	--	-1.39613	32	--	1	--	--
33	--	--	--	-0.997589	33	--	0	--	--
34	--	--	--	-0.202822	34	--	1	--	--
35	--	--	--	-0.202822	35	--	1	--	--
36	--	--	--	-0.618396	36	--	1	--	--
37	--	--	--	-0.989906	37	--	1	--	--
38	--	--	--	-0.989906	38	--	1	--	--
39	--	--	--	-0.765043	39	--	1	--	--
40	--	--	--	-0.765043	40	--	1	--	--
41	--	--	--	-0.676522	41	--	1	--	--
42	--	--	--	-0.676522	42	--	1	--	--
43	--	--	--	-0.355933	43	--	1	--	--
44	--	--	--	-0.355933	44	--	1	--	--
45	--	--	--	-0.219697	45	--	1	--	--
46	--	--	--	-0.219697	46	--	1	--	--
47	--	--	--	0.57663	47	--	1	--	--
48	--	--	--	0.57663	48	--	1	--	--
49	--	--	--	0.032797	49	--	1	--	--
50	--	--	--	0.032797	50	--	1	--	--
51	--	--	--	-0.534402	51	--	1	--	--

52	--	--	--	-0.534402	52	--	1	--	--
53	--	--	--	0.097081	53	--	1	--	--
54	--	--	--	-0.031486	54	--	1	--	--
55	--	--	--	-0.26456	55	--	1	--	--
56	--	--	--	-0.26456	56	--	1	--	--
57	--	--	--	-0.976352	57	--	1	--	--
58	--	--	--	-0.976352	58	--	1	--	--
59	--	--	--	-1.2889	59	--	0	--	--
60	--	--	--	-1.2889	60	--	0	--	--
61	--	--	--	0.031486	61	--	1	--	--
Robust Model Time: 6547.66s; CD Model Time: **									

**Não foi possível carregar a matriz do problema usando este modelo.

vi. K = 5

Iteration 10									
Master Problem: First Level Decision					Subproblem: Outage				
System Cost: \$ 33600					$\Delta D^* = 271.59, LB = 1.36e + 07, UB = 1.36e + 07$				
Generator\ Line	p^*	r^{U*}	r^{D*}	f	Generator\ Line	Generator Status	Line Status	z^*	h^*
1	0.02	0.1	0	0.0234374	1	1	1	0	0
2	0	0	0	0.0234374	2	1	1	0	100
3	0.02	0.1	0	-0.0615532	3	1	1	0	0
4	0.02	0.1	0	-0.0615532	4	1	1	0	0
5	0.02	0.1	0	0.0844158	5	1	1	0	0
6	0.16	0.04	0	0.0844158	6	1	1	0	0
7	0.16	0.04	0	0.0211676	7	1	1	0	0
8	0.16	0.04	0	0.0211676	8	1	1	0	0
9	0.16	0.04	0	0.0754198	9	1	1	0	0
10	0.15	0.61	0	0.0754198	10	1	1	0	0
11	0.15	0.61	0	-0.0045	11	1	1	0	0
12	0.15	0.61	0	-0.0045	12	1	1	0	0
13	0.15	0.61	0	-0.496551	13	1	1	0	0
14	0.25	0.75	0	-0.496551	14	1	1	0	0
15	0.25	0.75	0	-0.159532	15	1	1	0	0
16	0.25	0.75	0	-0.159532	16	1	1	0	0
17	1.55	0	0	-0.0889342	17	1	1	0	0
18	1.55	0	0	-0.0889342	18	1	1	0	0
19	1.1777	0.372	0.638	-0.25663	19	1	1	100	0
20	0	0	0	-0.25663	20	1	1	0	100
21	0.69	1.258	0	0.0349	21	1	1	100	0
22	0.69	1.258	0	0.0349	22	1	1	100	0
23	0.69	1.258	0	0.0349	23	1	1	100	0
24	3.5	0	2.1	0.0349	24	1	1	100	0
25	1	0.948	0	-0.212688	25	1	1	0	0
26	1	0.948	0	-0.135062	26	1	1	0	0
27	--	--	--	-0.212688	27	--	1	--	--
28	--	--	--	-0.135062	28	--	1	--	--
29	--	--	--	-0.555349	29	--	1	--	--
30	--	--	--	-1.0527	30	--	0	--	--
31	--	--	--	-0.708103	31	--	1	--	--
32	--	--	--	-1.20545	32	--	0	--	--
33	--	--	--	-1.0227	33	--	0	--	--
34	--	--	--	-0.120378	34	--	1	--	--
35	--	--	--	-0.120378	35	--	1	--	--
36	--	--	--	-0.707058	36	--	1	--	--
37	--	--	--	-0.775545	37	--	1	--	--

38	--	--	--	-0.775545	38	--	1	--	--
39	--	--	--	-0.476927	39	--	1	--	--
40	--	--	--	-0.476927	40	--	1	--	--
41	--	--	--	-0.594078	41	--	1	--	--
42	--	--	--	-0.594078	42	--	1	--	--
43	--	--	--	-0.250767	43	--	1	--	--
44	--	--	--	-0.250767	44	--	1	--	--
45	--	--	--	-0.204784	45	--	1	--	--
46	--	--	--	-0.204784	46	--	1	--	--
47	--	--	--	0.496551	47	--	1	--	--
48	--	--	--	0.496551	48	--	1	--	--
49	--	--	--	0.0178835	49	--	1	--	--
50	--	--	--	0.0178835	50	--	1	--	--
51	--	--	--	-0.331878	51	--	1	--	--
52	--	--	--	-0.331878	52	--	1	--	--
53	--	--	--	0.0713223	53	--	1	--	--
54	--	--	--	-0.0355552	54	--	1	--	--
55	--	--	--	-0.277439	55	--	1	--	--
56	--	--	--	-0.277439	56	--	1	--	--
57	--	--	--	-0.773828	57	--	1	--	--
58	--	--	--	-0.773828	58	--	1	--	--
59	--	--	--	-1.08638	59	--	0	--	--
60	--	--	--	-1.08638	60	--	0	--	--
61	--	--	--	0.0355552	61	--	1	--	--
Robust Model Time: 1.703s; CD Model Time:**									

**Não foi possível carregar a matriz do problema usando este modelo