

## 2

### Modelagem Matemática do Problema

O escoamento de uma gota imersa em um fluido através de um capilar é um problema transiente, não linear, bifásico com superfície livre e descrito pela equação de Navier - Stokes e as condições de contorno apropriadas.

#### 2.1

##### Descrição do problema

Como já foi discutido, o interesse do trabalho é estudar o escoamento de uma gota imersa em um outro líquido imiscível através de um capilar reto e com garganta. Deseja-se determinar o efeito da geometria, da razão de viscosidades das duas fases, da tensão interfacial, do tamanho de gota. Uma representação esquemática é apresentada na figura (2.1).

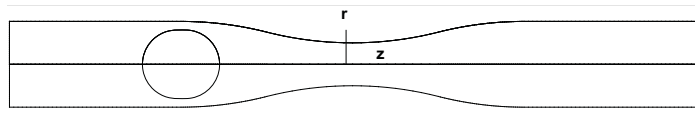


Figura 2.1: Gota em um capilar

Adota-se as seguintes considerações na solução do problema:

- Escoamento axisimétrico, por isso não considera-se a diferença de massas específicas nem os efeitos da gravidade. Como consequência o problema 3D converte-se em 2D.
- Escoamento desenvolvido na seção de entrada.
- Fluidos incompressíveis e imiscíveis.
- Processo isotérmico, assim as propriedades como a massa específica e a viscosidade são constantes em cada fase.

## 2.2

### Formulação matemática

#### 2.2.1

#### Equações de conservação da quantidade de movimento linear e massa

Em cada uma das fases ( $l=w$  ou  $o$ ), o campo de velocidade e pressão devem satisfazer as equações de conservação da quantidade de movimento linear e massa:

$$\rho_l \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial t} + \rho_l \bar{u}_l \cdot \bar{\nabla} \bar{u}_l = \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_l + \bar{f}_l^B \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho_l \bar{u}_l = 0 \quad (2-2)$$

onde  $\rho_l$ ,  $\bar{u}_l$ ,  $\bar{T}_l$  e  $\bar{f}_l^B$  representam a massa específica, campo de velocidade, tensor de tensões e força de corpo de cada uma das fases (óleo e água) respectivamente.

Assumindo que os dois líquidos são Newtonianos, o tensor das tensões é escrito como:

$$\bar{T}_l = -p_l \bar{I} + \mu_l [\bar{\nabla} \bar{u}_l + \bar{\nabla} \bar{u}_l^T] \quad (2-3)$$

onde  $p_l$  e  $\mu_l$  representam a pressão e a viscosidade de cada uma das fases respectivamente.

Na interface entre os fluidos, deve-se aplicar as condições cinemáticas e de balanço de forças. Considerando as forças capilares, o balanço de forças é escrito como:

$$\bar{n} \cdot (\bar{T}_w - \bar{T}_o) = \sigma \frac{d\bar{t}}{ds} \quad (2-4)$$

onde  $\bar{n}$  é o vetor unitário normal à interface,  $\sigma$  é a tensão interfacial e  $\frac{d\bar{t}}{ds}$  é a curvatura da interface.

Embora tem-se mencionado as equações em forma dimensional, o problema poderia ter sido apresentado usando a formulação adimensional. Os números adimensionais que governam o escoamento são os seguintes:

- Razão de viscosidades:  $\frac{\mu_o}{\mu_w}$

- Razão de diâmetros:  $\frac{d_{gota}}{D_{capilar}}$  e  $\frac{D_{garganta}}{D_{capilar}}$
- Número de Reynolds:  $Re = \frac{\rho V D_{capilar}}{\mu_w}$
- Número de capilaridade:  $Ca = \frac{\mu_w V}{\sigma}$

Para o problema tratado o número de Reynolds é pequeno ( $Re \approx 10^{-4}$ ), uma indicação que as forças viscosas dominam o escoamento em comparação com a forças inerciais. Por outro lado, o número de capilaridade  $Ca$  é utilizado para caracterizar a maioria dos casos rodados ( $\sigma \neq 0$ ), os valores dele indicam se as forças viscosas são mais dominantes que as forças devido à tensão interfacial no escoamento.

A posição da interface entre os fluidos é desconhecida a priori e faz parte da solução do problema, caracterizando este escoamento como um escoamento de superfície livre.

Neste trabalho, o problema de superfície é resolvido numericamente utilizando o método de curvas de nível (*Level Set*) descrito a seguir.

### 2.2.2 Método de Level Set

No método de *Level Set*, cada fluido é “marcado” por um campo escalar  $c$ . O sinal do valor de  $c$  define que fluido ocupa cada ponto de domínio.

$$\begin{cases} c < 0 & \implies \text{fase óleo}(\Omega_1); \\ c = 0 & \implies \text{interface}(\partial\Omega); \\ c > 0 & \implies \text{fase água}(\Omega_2). \end{cases} \quad (2-5)$$

Desta forma, a viscosidade de cada ponto é escrita em função do campo escalar  $c$ :

$$\mu(c) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)H_\varepsilon(c) \quad (2-6)$$

onde  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são as viscosidades de óleo e de água, respectivamente e  $H_\varepsilon(c)$  é conhecida como função Heaviside suavizada e dada por,

$$H_\varepsilon(c) = \frac{c + \varepsilon}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi c}{\varepsilon}\right) \quad (2-7)$$

$H_\varepsilon(c)$  é uma função contínua da função degrau que ajuda a melhorar a estabilidade numérica quando a viscosidade é interpolada ao longo da interface e é mostrada na figura (2.2).

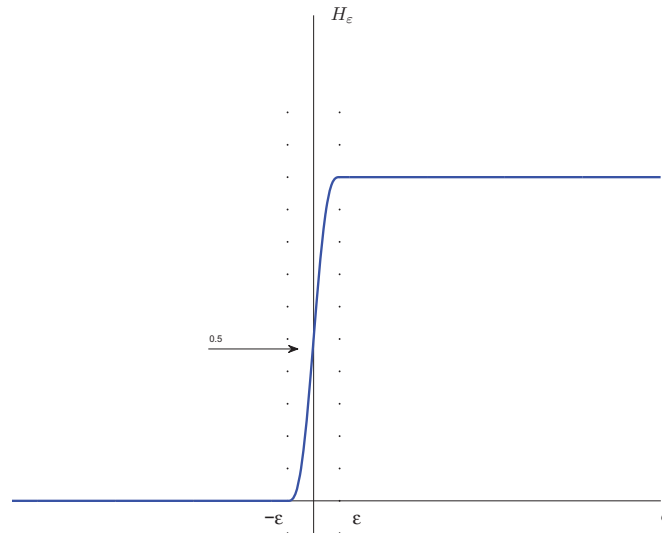


Figura 2.2: Função Heaviside suavizada

A isolinha  $c = 0$  representa a interface entre os fluidos. O movimento da interface é descrito por uma equação de transporte do escalar  $c$  sem termos difusivos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} c = 0 \quad (2-8)$$

Como a equação carece do termo difusivo, o campo  $c$  é só convectado pelo campo de velocidade  $\bar{u}$ .

Tradicionalmente, o campo inicial  $c$  é definido como uma função distância com sinal, isto é, além de considerar a distância entre qualquer ponto no domínio  $\Omega$  e a interface  $\partial\Omega$ , considera-se a relação de pertinência do ponto aos domínios para definir o sinal.

Se os erros numéricos forem desprezíveis, a equação de transporte de  $c$  irá preservar a isolinha  $c = 0$  como sendo a interface entre as duas fases.

Como a equação (2-8) é puramente hiperbólica, as condições de contorno do campo  $c$  devem ser especificadas ao longo das fronteiras do domínio onde ocorre um fluxo entrando. Nos trabalhos relacionados com o método *Level Set*, como no trabalho de Sussman[12], as fronteiras do domínio são paredes e as condições de contorno não são necessárias. No problema analisado neste trabalho, claramente existe uma fronteira com fluxo de entrada, onde a função  $c$  deve ser especificada a cada instante de tempo. Isto inviabiliza a utilização usual da função  $c$  como a distância de qualquer ponto até a interface do domínio. A alternativa adotada neste trabalho foi definir a função  $c$  de forma que “longe o suficiente” da interface ela assuma um valor constante  $+1$  ou  $-1$ , de acordo com a fase. A transição entre estes dois valores extremos ocorre de forma suave. A função  $c(\bar{x})$  em  $t = 0$  foi definida como:

$$c(\bar{x}) = \begin{cases} +1 & \text{se } d(\bar{x}) > \varepsilon_c; \\ \frac{d(\bar{x})}{\varepsilon_c} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi d(\bar{x})}{\varepsilon_c}\right) & \text{se } -\varepsilon_c \leq d(\bar{x}) \leq \varepsilon_c; \\ -1 & \text{se } d(\bar{x}) < -\varepsilon_c. \end{cases} \quad (2-9)$$

onde  $\varepsilon_c$  é um parâmetro que define a faixa de transição entre os valores extremos  $c(x) = \pm 1$  e tem unidade de comprimento (não deve-se confundir com o  $\varepsilon$  já definido). Além disso,  $d(\bar{x})$  é a distância euclidiana entre o ponto  $\bar{x}$  e o ponto mais perto dele pertencendo à interface  $\partial\Omega$  entre as fases.

$$d(\bar{x}) = \min(\bar{x} - \bar{x}_c), \bar{x}_c \in \partial\Omega \quad (2-10)$$

A figura (2.3) apresenta a função  $c(\bar{x})$  definida pela equação (2-9) em função da distância  $d$  à interface. O campo de  $c(\bar{x})$  para uma interface circular é mostrado na figura (2.4). Em ambas figuras, pode-se observar claramente a transição suave entre as duas fases, o que minimiza erros numéricos na solução da equação de transporte (2-8).

A força capilar que aparece na condição de contorno entre as fases é incluída na solução pelo método de *Level Set* através de uma força de corpo, como foi descrito por Brackbill[16] e é definida como:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma k \bar{n} d\Gamma = \lim_{h_i \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sigma k \bar{\nabla} c \delta(c) d\Omega \quad (2-11)$$

onde  $h_i$  é a espessura da interface,  $\sigma$  foi definida como a tensão interfacial entre as fases,  $k$  é a curvatura da interface e  $\delta(c)$  é a função delta de Dirac

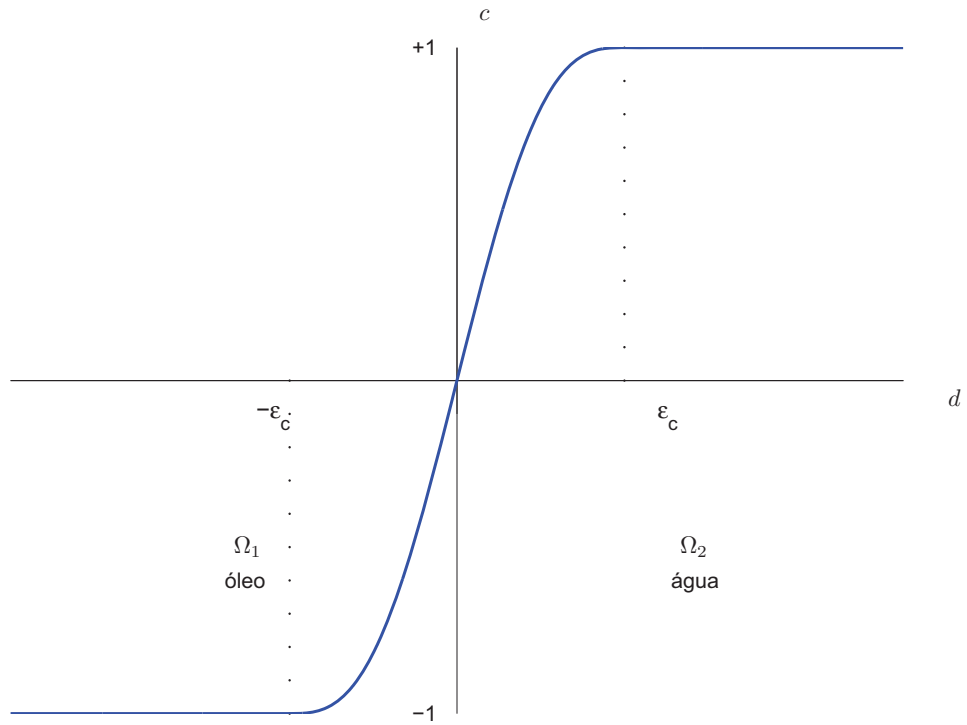


Figura 2.3: Definição de  $c$  em função de  $d$

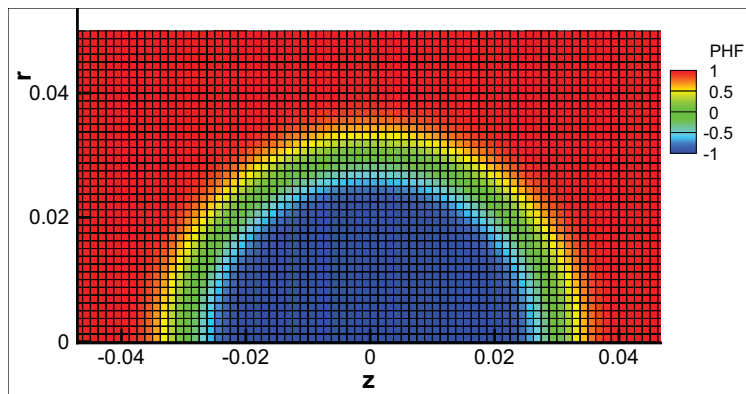


Figura 2.4: Campo escalar  $c$  no domínio do capilar

suavizada, isto é, a derivada da função Heaviside suavizada  $H_\varepsilon(c)$  e é mostrada na figura (2.5).

$$\delta(c) = \frac{dH_\varepsilon(c)}{dc} = \frac{1}{2\varepsilon} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi c}{\varepsilon}\right) \right] \quad (2-12)$$

Como a isolinha  $c(\bar{x}) = 0$  representa a interface entre as fases, segundo Osher[17], a curvatura pode ser calculada em função do campo escalar  $c(\bar{x})$ :

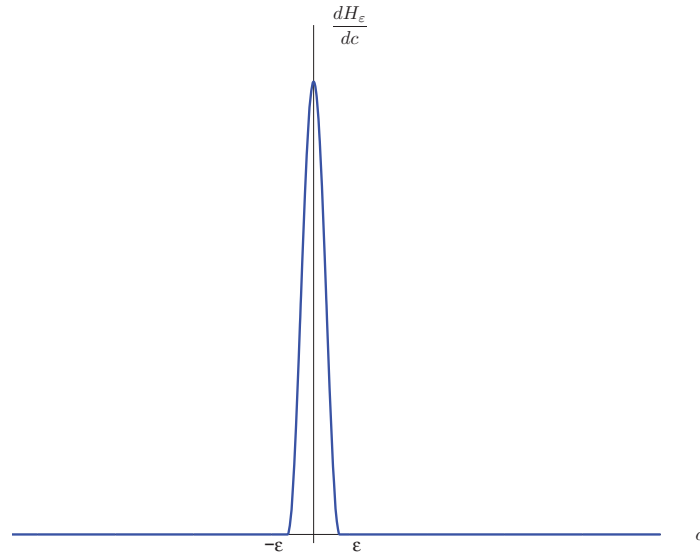


Figura 2.5: Função Delta

$$k = \bar{\nabla} \cdot \frac{\bar{\nabla} c}{\|\bar{\nabla} c\|} \quad (2-13)$$

No sistema de coordenadas cilíndricas a curvatura é dada por:

$$k(c_r, c_z) = \frac{c_z^2 c_{rr} - 2c_z c_r c_{zr} + c_r^2 c_{zz}}{(c_r^2 + c_z^2)^{3/2}} + \frac{1}{r} \frac{c_r}{(c_r^2 + c_z^2)^{1/2}} \quad (2-14)$$

### 2.2.3

#### Aplicação das condições de contorno

Para resolver o problema define-se as condições de contorno. De acordo com a figura (2.6), na entrada impõe-se um perfil de velocidade parabólico com uma vazão  $Q$  prescrita.

$$\begin{aligned} v_r(r, z = -\frac{L}{2}) &= 0 \\ v_z(r, z = -\frac{L}{2}) &= \frac{2Q}{\pi R^2} [1 - (\frac{r}{R})^2] \end{aligned} \quad (2-15)$$

onde  $R$  é o raio e  $L$  é o comprimento do capilar.

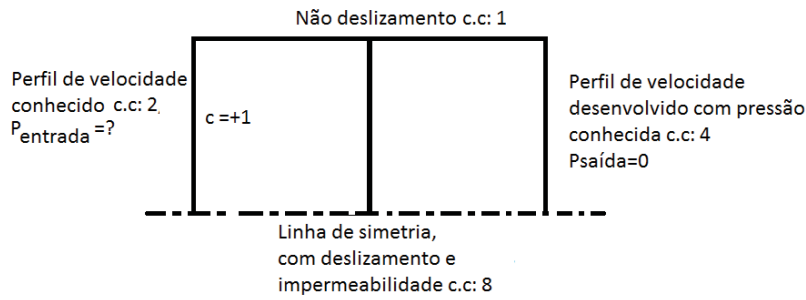


Figura 2.6: Condições de contorno para malha gerada

Na saída o perfil de velocidade é desenvolvido e a pressão conhecida,

$$\begin{aligned} \bar{n} \cdot \bar{\nabla} \bar{u} &= 0, p = P^* \\ \bar{n} \cdot \bar{T} &= -P^* \bar{n} + \mu \bar{n} \cdot (\bar{\nabla} \bar{u})^T \end{aligned} \quad (2-16)$$

onde  $P^*$  é a pressão na saída.

Na linha de simetria impõe-se as condições de simetria,

$$\begin{aligned} \bar{t} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{T}) &= 0 \\ \bar{n} \cdot \bar{u} &= 0 \end{aligned} \quad (2-17)$$

onde  $\bar{t}$  e  $\bar{n}$  são os vetores unitários tangencial e normal à linha de simetria.

Ao longo das paredes define-se condição de não deslizamento. Finalmente, também se estabelece a condição de contorno para o campo  $c$  igual a  $+1$  só na entrada, já a equação é hiperbólica.