CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS E EIXOS COM ENTALHES
EM U SUBMETIDOS A ESFORÇOS COMBINADOS UTILIZANDO
TÉCNICAS FOTOELÁSTICAS

por

José Luiz de França Freire

TESE DE MESTRADO

Fevereiro de 1975

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS E EIXOS COM ENTALHES EM
U SUBMETIDOS A ESFORÇOS COMBINADOS UTILIZANDO
TÉCNICAS FOTOELÁSTICAS

por

José Luiz de França Freire

Tese submetida como requisito parcial para a obtenção do
grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS
DE
ENGENHARIA MECÂNICA

Assinatura do Orientador da Tese

Rio de Janeiro, GB, Fevereiro de 1975.

À minha esposa
Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao professor Henner Alberto Gomide ,
pelos conhecimentos adquiridos no campo da Fotoelasticidade
e pela dedicação na orientação deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Mecâni-
ca na pessoa de todos os seus professores.

Ao Instituto Tecnológico da Universi-
dade Católica, através dos funcionários da oficina Mecânica,
que tornaram possível a confecção dos modelos e aparelhos
utilizados.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas, ao
Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e à Coordena-
ção de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior, pela
ajuda financeira e material recebida, possibilitando a
realização do curso de Mestrado na Pontifícia Universida-
de Católica do Rio de Janeiro.

SUMÁRIO

Foram determinados experimentalmente fatores de concentração de tensões teóricos para placas e eixos com entalhes simétricos e circunferenciais em U sujeitos à combinação de esforços de flexão e tração, para as placas e, flexão e torção para os eixos. Os fatores obtidos foram plotados em gráficos para comparação com os fatores determinados aplicando-se o Princípio da Superposição. Foram utilizadas as relações geométricas $D/d = 1,5 ; 1,25 ; 1,10$ e $r/d = 0,30 ; 0,25 ; 0,20$ para as placas. Para os eixos utilizaram-se apenas as relações $D/d = 1,3$ e $r/d = 0,25$. Também foram obtidos fatores de concentração de tensões para os esforços puros e seus valores comparados com resultados já publicados.

Os resultados para as placas foram obtidos a partir da Fotoelasticidade Bidimensional. Foi empregado o método fotoelástico tridimensional de Congelamento de Tensões para os eixos. Neste caso, os modelos foram cortados em finas fatias para separação das tensões. Para o estudo tridimensional foi utilizado um material desenvolvido no Laboratório de Fotomecânica da PUC-RJ.

ABSTRACT

Theoretical stress concentration factors were determined experimentally for bars and shafts with symmetrical and circumferential U - Shaped grooves subjected to combinations of bending - tension loads for the bars and bending - torsion loads for the shafts. The stress concentration factors obtained were plotted to compare with the factors determined by application of the superposition effects. The geometric relations used for the bars were $D/d = 1,5 ; 1,25 ; 1,10$ and $r/d = 0,30 ; 0,25 ; 0,20$. The geometric relations used for the shafts were $D/d = 1,3$ e $r/d = 0,25$. The stress concentration factors were also determined for single loaded specimens and they were compared with data already published.

The stress concentration factors for the bars were determined by the Two - Dimensional Photoelastic Method. In the case of the shafts they were determined by the Three - Dimensional Photoelastic Method of Stress Freezing. In this method, the models were cut into thin slices of a new photoelastic material developed in the Laboratory of Photomechanics of the Universidade Católica.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
Capítulo 1 - Confeção dos Modelos	3
1.1- Relações geométricas para o entalhe em U	3
1.2- Confeção das Placas	4
1.2.1- Material Utilizado	4
1.2.2- Usinagem dos Modelos	4
1.2.3- Principais dimensões dos modelos	5
1.3- Confeção dos Eixos	7
1.3.1- Material Utilizado	7
1.3.2- Fundição, Tratamento Térmico e Calibração do material	7
1.3.3- Usinagem dos modelos	9
1.3.4- Principais dimensões dos modelos	11
Capítulo 2 - Estudo Bidimensional. Placas	13
2.1- O fator de concentração de tensões	13
2.2- O sistema de cargas	13
2.3- Método para obtenção dos resultados	16
2.4- Análise dos resultados obtidos	21
Capítulo 3 - Estudo Tridimensional. Eixos	33
3.1- Análise teórica para obtenção do fator de concentração de tensões	33
3.2- O método experimental	36
3.2.1- O sistema de cargas	36
3.2.2- Congelamento das tensões e corte em fatias	38
3.2.3- Escolha das fatias retiradas dos modelos e separação das tensões atuantes	40
3.3- Análise dos resultados obtidos	51

CONCLUSÕES	58
APENDICE A	61
APENDICE B	68
APENDICE C	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83

NOTAÇÕES

D - maior diâmetro dos eixos ou maior largura das placas
 d - menor diâmetro dos eixos ou menor largura das placas
 K - valor da franja
 K_t - fator de concentração de tensões
 $|L|$ - fatia longitudinal
 N, n - ordem de franja
 $n_{\max}$ - ordem de franja máxima
 $n_x, n_y, n_{x'}$ - ordem de franja para luz incidindo nas direções x, y e x'
 $n_{xe}, n_{ye}, n_{x'e}$ - ordem de franja no entalhe
 t - espessura
 r - raio do entalhe
 $t_x, t_y, t_{x'}, t_{xe}, t_{ye}, t_{x'e}$ - espessura nas direções x, y e x'
 T_c - temperatura crítica
 X, Y, Z - sistema de coordenadas
 α - ângulo
 $|\alpha|$ - fatia retirada segundo ângulo α
 $1, 2, 3$ - direções principais
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - tensões principais
 $\sigma_{\text{nom}}, \sigma_{l\text{nom}}, \sigma'_{l\text{nom}}$ - tensões nominais
 $\sigma_{\text{max}}, \sigma_{l\text{max}}$ - tensões máximas
 $\tau_{xy}, \tau'_{xy}, \tau_{xye}$ - tensões cisalhantes
 $\sigma_x, \sigma'_x, \sigma'_y, \sigma_{xe}, \sigma_{ye}$ - tensões normais

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de um material brasileiro para fotoelasticidade tridimensional¹, de fácil obtenção e com custo mais baixo que outros importados, possibilitou a medição experimental do fator de concentração de tensões em eixos, com uma determinada geometria do entalhe circunferencial U, sujeitos a carregamentos combinados de flexão e torção. Para Neuber e Hahn², um estudo analítico destes fatores é extremamente difícil, se não impossível.

Utilizando-se a técnica fotoelástica de congelamento de tensões e corte em fatias do modelo não só os fatores de concentração de tensões para os carregamentos combinados são medidos, mas, também, os fatores para os carregamentos de flexão e torção aplicados separadamente. Os fatores para estas solicitações simples são comparados com resultados obtidos por outros autores^{3,4,5} enquanto que os fatores para carregamentos combinados o foram com o Princípio da Superposição aplicado ao caso.

A mesma técnica fotoelástica foi utilizada por H. Fessler, C.C. Rogers e P. Stanley^{6,7} para o estudo do fator de concentração de tensões para carregamentos combinados em rasgos de chavetas, embora os modelos tenham sido solicitados com os esforços simples aplicados separadamente. A seguir, os fatores de concentração de tensões para os carregamentos combinados foram calculados aplicando-se o Princípio da Superposição.

H. G. Rylander, P.M.A. da Rocha, L.F. Kreisle e G.J. Vaughn⁸, utilizando-se da técnica fotoelástica da camada birrefringente e de um polariscópio de re

flexão, obtiveram medidas dos fatores de concentração de tensões para eixos filetados, sujeitos a carregamentos de flexão e torção aplicados de forma combinada, assim como para estas solicitações puras. Como os fatores encontrados para as solicitações de flexão pura e torção pura estivessem muito próximos, sendo sua diferença em torno de 2%, a variação dos fatores para os carregamentos combinados em função da variação da relação entre os momentos fletor e torçor aplicados ficou mascarada, embora os resultados obtidos permitissem a observação, feita pelos autores, que eles eram intermediários aos medidos para flexão e torção quando aplicados separadamente.

Neste trabalho, para melhor notar-se esta variação, escolheu-se uma relação de parâmetros para o entalhe em U estudado de maneira que os valores dos fatores de concentração de tensões para flexão e torção estivessem afastados um do outro. Este afastamento, para a relação estudada e segundo os resultados publicados por Peterson⁴, é da ordem de 20%.

Dado à sua grande importância, fatores de concentração de tensões para o entalhe em U em placas também foram obtidos em relação aos esforços puros e combinados de tração e flexão. Os resultados para os esforços de tração e flexão aplicados separadamente foram comparados com os obtidos por outros autores^{3,4,5}, enquanto os fatores para os esforços combinados foram comparados com o Princípio da Superposição aplicado ao caso. Apenas um sucesso relativo foi alcançado, em razão, principalmente, de ter sido grande a espessura adotada para as placas em relação aos raios empregados para os entalhes. Métodos para melhor obtenção e análise dos resultados experimentais são expostos, baseando-se em trabalhos publicados recentemente^{6,9,10,11}.

CAPÍTULO 1

CONFECÇÃO DOS MODELOS

1.1. - Relações geométricas para o entalhe em U.

O entalhe em U em placas e eixos é uma forma de grande interesse na engenharia por ocorrer em grande número de elementos estruturais e de máquinas⁴.

Placas e eixos com entalhe em U ficam com sua geometria perfeitamente definida a partir das relações r/d e D/d onde r é o raio do entalhe, d a menor largura das placas ou o menor diâmetro no caso dos eixos e, D , a maior largura para as placas ou o maior diâmetro para os eixos. Uma ilustração destas dimensões está na figura 1.

fig. 1 : Principais dimensões para placas e eixos com entalhes em U

1.2. - Confeção das Placas.

1.2.1. - Material Utilizado.

O material escolhido foi o PSM-1, uma placa de poliéster fornecida pela Photolastic Inc., USA, de formato quadrado, com 257 mm de lado e 6,25 mm de espessura. O PSM-1 é recomendado para estudos bidimensionais, onde não haja necessidade de congelamento de tensões, devido à não absorção de umidade da atmosfera e, por ser livre de creep.

Placas de material fundido, embora desejáveis, não foram empregadas por apresentarem grande variação de espessura. Uma correção desta variação por meio de usinagem apresenta problemas pelo fato das placas necessitarem possuir grandes dimensões em relação à espessura. Além disso, seu efeito de tempo é maior e sua transparência é menor em relação às placas de PSM-1. O aparecimento de manchas devidas ao processo de fundição também não recomenda seu emprego.

1.2.2. - Usinagem dos Modelos.

O grande inconveniente do material PSM-1 está na sua usinagem, por ser muito sensível ao calor gerado no corte, o qual produz um alto nível de tensões residuais nos seus bordos usinados. Este problema foi evitado usinando-se os modelos de acordo com a recomendação do fabricante do PSM-1 que sugere velocidade de corte de média a alta, avanço lento e intensa refrigeração¹².

As placas foram usinadas numa fresadora universal. Tiras com as dimensões D foram cortadas com uma serra circular com dimensões 150x2x32mm. Utilizou-se velocidade de corte igual a 480 rpm e avanço de 12mm/min. Os entalhes em U foram posteriormente construídos com fresas de topo DIN 844, com diâmetros nominais de

12,8 e 5 mm. A velocidade de corte foi de 480 rpm e o a vanço foi feito manualmente, com velocidade aproximada de 6mm/min. Verificou-se que o menor nível de tensões residuais devidas à usinagem do entalhe em U ocorria quando o corte era feito com a base cortante das fresas.

Os furos para fixação das placas ao sistema de cargas foram feitos por uma broca de 6,25 mm de diâmetro empregando-se uma furadeira. Não houve af preocupações quanto à geração de calor no corte por ser esta região bastante longe da zona de medição das tensões. Mesmo assim utilizou-se refrigeração no corte sendo o nível de tensões residuais devido à usinagem abaixo do esperado.

1.2.3. - Principais Dimensões dos Modelos.

Na tabela 1 estão relacionados os modelos

TABELA 1 : Modelos de Placas Utilizados.

Placas	D(mm)	d(mm)	r(mm)	D/d	r/d
P-1	29,9	19,9	6,1	1,50	0,306
P-2	36,0	24,0	6,1	1,50	0,253
P-3	30,0	20,0	4,1	1,50	0,205
P-4	41,0	27,0	4,1	1,50	0,152
P-5	34,5	23,1	2,5	1,50	0,108
P-6	29,9	20,0	6,1	1,50	0,305
P-7	35,9	23,9	6,1	1,50	0,255
P-8	29,9	20,0	4,1	1,50	0,205
P-9	25,0	20,0	6,1	1,25	0,305
P-10	30,0	24,0	6,1	1,25	0,253
P-11	25,0	20,0	4,1	1,25	0,205
P-12	22,2	20,0	6,1	1,10	0,305
P-13	26,5	24,1	6,1	1,10	0,253
P-14	22,0	20,0	4,1	1,10	0,205

los de placas construídos e suas principais dimensões e relações. A figura 2 mostra as dimensões gerais utilizadas para as placas.

fig. 2 : Dimensões gerais das placas

Os primeiros cinco modelos foram abandonados mais tarde quando se tentou reduzir as tensões de usinagem a zero aplicando-se um tratamento de recozimento. Embora a referencial¹³ sugira um tratamento deste material, para alívio das tensões de usinagem, foi empregado o tratamento recomendado pelo Photolastic Inc¹². Devido a vibrações no forno onde se realizou o tratamento as placas movimentaram-se ficando empenadas e irremediavelmente perdidas. Apenas três delas, as de $r/d = 0,20$; $0,25$ e $0,30$ foram substituídas, porque, com os resultados que já haviam sido obtidos, para a tração pura, verificou-se uma tendência dos fatores de concentração de tensões

para as placas com relações $r/d = 0,10$ e $0,15$ fugiram muito dos valores para eles esperados, o que será comentado na seção 2.4

1.3. - Confeção dos Eixos.

1.3.1. - Material Utilizado.

Foi utilizado o material desenvolvido na PUC-RJ¹ que consiste na mistura de 100 partes em peso da resina epoxi CY-205 da Ciba S/A, com os endurecedores HY-901 (anidrido ftálico) também da Ciba S/A, 20 partes em peso, e o anidrido maleico, 30 partes em peso, produzido pela Ucebel S/A. O material fotoelástico resultante é ideal para o método de congelamento de tensões, apresentando facilidade de ser fundido em grandes espessuras, alta figura de mérito, boa transparência e fácil usinagem¹. Trabalhos realizados^{14, 15, 16, 17, 18} com este material demonstraram-no como sendo de ótima qualidade para o método de congelamento de tensões.

1.3.2. - Fundição, Tratamento e Calibração do Material.

Foi utilizada a técnica de fundição sugerida na referência¹. Após isto, estando a mistura líquida a 70°C realizou-se seu vazamento em moldes cilíndricos de ferro fundido revestido de uma fina camada de borracha de silicon, que estavam pré-aquecidos (70°C). A mistura permaneceu nos moldes durante 24 horas, em média, à temperatura de 70°C , para endurecimento. Após estas 24 horas os tarugos foram sacados dos moldes e iniciou-se o tratamento térmico mostrado na figura 3, para sua cura total.¹

fig. 3 : Tratamento Térmico do Material Utilizado

fig. 4 : Valor da franja x temperatura para a mistura com : 100pp CY-205, 20pp anidrido ftálico, 30pp anidrido maleico

Os valores de K , valor da franja do material e, de T_c , temperatura crítica do material foram determinados a partir do método de calibração descrito nas referências (1) e (19).

Embora os valores de K e T_c tenham sido tabelados¹ houve a necessidade de uma nova calibração do material usado, por que, outro lote dos componentes da mistura, foi empregado. As propriedades encontradas foram aproximadamente as mesmas. O gráfico mostrado na figura 4 apresenta os valores de K do material utilizado em função da variação da temperatura.

O valor de T_c foi importante para a utilização do método de congelamento de tensões. O valor de K , embora não tenha sido empregado diretamente, serviu para a previsão das cargas que deveriam atuar nos modelos para que se pudesse obter aproximadamente 20 franjas por centímetro de espessura nas fatias retiradas para a região do entalhe.

1.3.3. - Usinagem dos Modelos.

Após sua fundição e tratamento térmico os modelos foram usinados até sua forma final (Figura 5).

Embora este material não apresente problemas de usinagem foi utilizada intensa refrigeração, principalmente na formação do entalhe circunferencial U . Para a confecção deste entalhe foi especialmente projetada uma pastilha de forma tronco-cônica, apresentada na figura 6 juntamente com o porta-pastilha.

fig. 5 : Forma final dos eixos com entalhes
circunferenciais em U

fig. 6 : Pastilha e porta-pastilha para formação
do entalhe circunferencial em U

1.3.4. - Principais Dimensões dos Modelos.

Na tabela 2 estão relacionados os modelos dos eixos construídos e suas principais dimensões. Na figura 7 estão as dimensões gerais utilizadas. Os furos servem para aplicação dos esforços de flexão e torção. O maior diâmetro dos eixos, após os filetes, na região onde estão os furos, tem a finalidade de proporcionar maior resistência a esta região por causa da concentração de tensões provocada pelos furos e porque os carregamentos são neles concentrados. Esta solução foi adotada após haver o primeiro eixo construído (que não está relacionado na tabela 2, por haver servido apenas para testar o sistema de cargas) rompido a partir dos furos, na temperatura crítica do material, em torno de 150°C.

TABELA 2 : Modelos de eixos Utilizados.

Eixo	D(mm)	d(mm)	r(mm)	D/d	r/d
T-0	25,0	15,0	5,0	1,66	0,33
T-1	26,0	20,0	5,0	1,3	0,25
M-1					
MT-1					
MT-2					
MT-3					
MT-4					
MT-5					
MT-6					
MT-7					
MT-8

fig. 7 : Dimensões gerais dos eixos

Também deve ser observado que o eixo T-0 não possui as mesmas relações que os outros, isto é, $r/d = 0,25$ e $D/d = 1,3$. Este eixo foi construído antes de se haver decidido quais relações seriam utilizados neste trabalho e teve como principais finalidades o teste do sistema de carga para torção pura e comparação do valor obtido para o fator de concentração de tensões devido à torção pura com os obtidos por outros autores^{3,4,5}.

CAPÍTULO 2

ESTUDO BIDIMENSIONAL - PLACAS

2.1. - O Fator de Concentração de Tensões.

Concentração de tensões é um aumento localizado das tensões existentes numa peça sujeita a um determinado carregamento devido à descontinuidades na sua geometria. A medida quantitativa da concentração de tensões é dada pelo fator de concentração de tensões que, no caso de uma placa sujeita a momento fletor, tração ou à combinação destes dois esforços, é definido como

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad (1)$$

onde $\sigma_{\max}$ é a máxima tensão normal ocorrente na concentração de tensões e, σ_{nom} , é a tensão nominal, isto é, a máxima tensão que ocorreria na placa relativa à sua menor dimensão (d), sob as mesmas solicitações⁴. O subscrito t indica que o fator de concentração de tensões é um fator teórico ou geométrico, isto é, depende apenas da geometria da peça e do tipo de esforço estático que ela recebe⁴.

2.2. - Sistema de cargas.

Na seleção de um sistema de cargas para as placas procurou-se atender às seguintes finalidades:

- a. aplicação de momento fletor puro
- b. aplicação de tração pura
- c. aplicação da combinação destes dois esforços com

- a possibilidade de variação de qualquer um deles sem ser necessária a desmontagem do modelo
- d. cada solicitação aplicada deve permanecer constante durante todo o tempo necessário para medição das tensões existentes na placa
 - e. montagem rápida do sistema de cargas no polariscópio e dos modelos no sistema
 - f. possibilidade de obtenção das tensões nominais diretamente das medidas das ordens de franjas feitas no modelo, evitando-se a utilização de células de carga, extensômetros elétricos, ou qualquer outro meio que não o fotoelástico utilizado para obtenção das tensões máximas no entalhe.

Após a análise de alguns sistemas, o mais simples, e que atendeu às características listadas acima foi o apresentado nas figuras 8 e 9. Este sistema consiste de um aplicador de cargas trativas da Photolastic Inc., USA, ao qual foi adaptado um dispositivo para aplicação de momentos fletores puros aos modelos. Como estes dois dispositivos, o de cargas trativas e o de momentos fletores puros trabalhassem independentemente, foi possível ser aplicada qualquer combinação destes dois esforços.

O bom funcionamento do sistema de cargas ficou evidenciado nos perfis lineares das tensões nominais levantados para cada experimento. O desvio máximo das tensões extremas devido à aplicação de momentos fletores puros à placas não excedeu de 2%. Para tensões devidas à tração pura, o desvio não excedeu a 1%. Além disto, acredita-se que estes desvios não sejam originários do sistema de cargas mas de erros de leitura e também devido à extrapolação das tensões nos bordos das placas.

fig. 8 : O sistema de cargas para as placas

fig. 9 : O sistema de cargas para as placas
montado ao polariscópio de transmis-
são Chapman

2.3. - Método para Obtenção dos Resul tados.

Para determinação de K_t pela expressão (1) determinaram-se experimentalmente os valores de σ_{max} e σ_{nom} . Estas tensões foram obtidas segundo explicação abaixo através dos valores das ordens de franjas medidos em diversos pontos do modelo. Durante a leitura das ordens de franja o modelo permaneceu solicitado, montado no sistema de cargas o qual estava adaptado ao Polariscópio horizontal Chapman mostrado na figura 9.

A obtenção das ordens de franja, n , para cada ponto estudado do modelo foi feita através do método de compensação de Tardy^{19,20,21,22}. A câmara ZOOM proporcionou um aumento de 2 a 3 vezes da região estudada de cada placa. Um papel milimetrado transparente foi posicionado sobre seu visor a fim de que se pudesse relacionar as ordens de franja medidas para pontos de uma determinada seção do modelo com suas ordenadas y , figuras 10 e 11, a fim de se obter o perfil de tensões para a dada seção. Gráficos $n \times y$ foram construídos e as ordens de franja relativas aos valores extremos de y , isto é, aos contornos dos modelos, foram extrapolados^{23,24,25,37}.

fig. 10 : Região do entalhe vista no visor da câmara ZOON
do polariscópio Chapman

fig. 11 : Região não afetada pela concentração de tensões
no visor da câmara ZOON do polariscópio
Chapman

A determinação de $\sigma_{\max}$ foi feita a partir do conhecimento da ordem de franja no contorno da menor seção da placa. A fim de medir-se a ordem de franja no contorno com um erro mínimo levantou-se a curva média dos valores de n ao longo da seção considerada, para um número de pontos em torno de 15 a 20, sendo que, 8 a 10 destes pontos, estavam localizados bem próximos aos bordos dos modelos (Figura 12). Com isto procurou-se minimizar os efeitos nocivos de tensões criadas na usinagem, tensões devido ao tempo de vida dos modelos e, ligeiras imprecisões de leitura de ordens de franja que possam ter ocorrido. Como a tensão σ_2 é nula no contorno tem-se que o valor procurado de $\sigma_{\max}$ é o próprio valor de $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1$, diretamente proporcional à ordem de franja máxima¹⁹ tomada no gráfico. Assim,

$$\sigma_{\max} = \frac{n_{\max} K}{t} \quad (2)$$

A determinação dos valores σ_{nom} foi análoga à obtenção de $\sigma_{\max}$. Ao longo de y , figura 12, foram obtidas as ordens de franja para 10 pontos, em média. No lugar de se utilizar a menor seção da placa, onde o efeito da concentração de tensões é máximo, utilizou-se uma seção inteira, de largura D , longe do entalhe. A curva teórica que passa pelos pontos representativos das ordens de franja medidos ao longo de y é uma reta, para o perfil de tensões devido ao momento fletor, devido ao esforço de tração e devido à combinação destes esforços. Assim, plotaram-se os valores das ordens de franja medidos em função de variação de y num gráfico e traçou-se a reta que melhor passasse pelos pontos obtidos experimentalmente. Os valores das ordens de franja nos contornos foram, então, obtidos graficamente.

fig. 12 : Gráficos de nxy para a seção do entalhe (esquerda) e para a seção longe do entalhe (direita)

Para achar-se σ_{nom} basta resolver um sistema simples, de duas equações e duas incógnitas, σ'_m e σ'_p , que são as tensões normais devidas ao momento fletor e ao esforço de tração atuantes na seção, respectivamente. Conhecidas σ'_m e σ'_p pode-se obter os valores de σ_m e σ_p , suas correspondentes na seção de largura d , sabendo-se que os esforços são constantes para as duas seções consideradas. Em resumo, tem-se o seguinte:

$$\begin{cases} \sigma'_m + \sigma'_p = (\sigma_1 - \sigma_2) \text{ para } y = 0 = \frac{n_a K}{t} = \frac{N K}{t} \\ -\sigma'_m + \sigma'_p = (\sigma_1 - \sigma_2) \text{ para } y = D = \frac{n_D K}{t} = \frac{n K}{t} \end{cases}$$

Então:

$$\sigma'_p = \frac{N+n}{2} \cdot \frac{K}{t} \quad (3)$$

$$\sigma'_m = \frac{N-n}{2} \cdot \frac{K}{t} \quad (4)$$

e

$$\sigma_p = \sigma'_p \cdot \frac{D}{d} \quad (5)$$

$$\sigma_m = \sigma'_m \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2 \quad (6)$$

Somando-se as expressões (5) e (6) obtem-se a expressão de σ_{nom} ,

$$\sigma_{nom} = \frac{D}{d} \cdot \left(\frac{K}{t} \cdot \frac{N+n}{2} + \frac{N-n}{2} \cdot \frac{D}{d} \right) \quad (7)$$

Substituindo-se as expressões (2) e (7) na expressão (1) tem-se o valor do fator de concentração de tensões, isto é,

$$K_t = \frac{n_{max}}{\frac{D}{d} \left(\frac{N+n}{2} + \frac{N-n}{2} \cdot \frac{D}{d} \right)} \quad (8)$$

Como se pode concluir da expressão (8), o valor de K_t independe dos valores de K , valor da franja do material e de t , espessura*. Mais ainda, que independentemente de serem conhecidos os valores dos carregamentos de tração e flexão aplicados pode-se determinar K_t apenas com medidas das ordens de franjas nas seções do en

* Foi feita na seção 2.4 uma análise do problema de espessura das placas, pois verificou-se que os resultados estavam por ela sendo influenciados.

talhe e em uma seção inteira do modelo. Isto evita que se necessite trabalhar com células de carga ou extensômetros elétricos, assim como medir-se as distâncias dos pontos de aplicação das cargas aos apoios para efeito do conhecimento do momento fletor aplicado o que tornaria mais trabalhoso cada experimento, além de se excluir mais uma fonte de erros.

Na determinação dos valores de K_t para os esforços puros de tração e momento fletor tem-se para a expressão (8) que $(N-n)/2 = 0$ e $(N+n)/2 = 0$, respectivamente.

No apêndice A encontram-se plotados em gráficos as medidas realizadas e as curvas de extrapolação para obtenção das ordens de franjas n_{max} , N e n para a placa P-8 assim como uma tabela onde estão estes valores para as placas P-6 a P-14.

2.4. - Análise dos Resultados Obtidos.

Foram obtidos fatores de concentração de tensões para as placas P-6 até P-14. Para cada uma destas placas, isto é, para os 9 conjuntos de relações D/d e r/d obtiveram-se fatores de concentração de tensões relativos aos carregamentos de tração pura, momento fletor puro e, devido à combinação destes esforços.

Nas figuras 1 a 6 do Apêndice B encontram-se plotados em gráficos os resultados obtidos para K_t devido à tração pura (figura 1 a 3-B) e devido à flexão pura (figura 4 a 6-B). Estes gráficos fornecem os valores de K_t em função das geometrias da placas, r/d e D/d , e em função do tipo de sollicitação a que elas estão sujeitas. Também estão plotados as curvas apresentadas por Peterson⁴ (em linha contínua) e por Neuber^{3,5} (em linha interrompida) que fornecem K_t para as mesmas condições, com

o objetivo de comparação de resultados.

As figuras 13 a 21 mostram os fatores de concentração de tensões para o caso dos esforços combinados, cada uma destas figuras referindo-se a uma determinada relação geométrica (D/d e r/d). Os valores de K_t foram aí plotados em função da variação das razões entre as tensões nominais devidas a cada um dos dois esforços aplicados. As tensões nominais foram calculadas para a menor seção dos modelos. As razões, σ_m / σ_p e σ_p / σ_m , são menores ou iguais a 1. Segundo se tem conhecimento não existem similares publicados para estes gráficos. Assim, a curva em linha contínua neles apresentada representa o Princípio de Superposição aplicada ao caso.

Antes de se fazer uma análise dos resultados encontrados, foram feitas algumas observações sobre as diferenças entre os resultados de Peterson e de Neuber que ocorrem tanto para a tração pura quanto para a flexão pura.

Como não existem soluções matemáticas exatas para os fatores de concentração de tensões em placas com entalhes em U^{2,26}, Neuber^{3,5} baseou seus resultados, para estes fatores, na combinação das soluções matemáticas que encontrou para os fatores de concentração de tensões em placas onde $D/d \rightarrow \infty$ com entalhes hiperbólicos profundos (K_{th}), e em placas onde $D/d \rightarrow 1$ com entalhes elípticos (K_{te}). Os valores de K_t para o entalhe em U são calculados, de forma aproximada, pela relação simples.

$$K_t = 1 + \sqrt{\frac{(K_{te} - 1)^2 (K_{th} - 1)^2}{(K_{te} - 1)^2 + (K_{th} - 1)^2}} \quad (9)$$

Os resultados de Neuber foram apresentados e discutidos por Peterson³ e por Leven²⁷ que os for

necem sob a forma de equações e, também, sob a forma de gráficos para uma rápida aplicação na engenharia. Na primeira edição do seu livro³, Peterson apresenta gráficos para os fatores de concentração de tensões em placas com entalhes em U sujeitas à tração e à flexão puras, baseados no método combinado de Neuber.

Estudos mais recentes^{9,11,28,29}, verificaram que os resultados de Neuber subestimavam o fator de concentração de tensões para placas com entalhes em U, sujeitas à tração e à flexão puras, em torno de um máximo de 10% para o campo de relações $D/d = 2$ a $1,5$, $r/d = 0,10$ a $0,30$. Baseando-se, então, nos resultados de Flynn e Roll⁹, App² e Koerner³⁰, Isida³¹ e Ling^{28,29} para a tração pura e, nos resultados de Frocht³², Isida³¹ e Ling^{28,29} para a flexão pura, Peterson apresentou novas curvas para o fator de concentração de tensões em placas com entalhes em U na 2ª edição do seu livro⁴. Estas curvas estão apresentadas, em parte, nas figuras 1 a 6 do apêndice B. Recentes resultados encontrados por Wilson e White¹¹ estão em boa concordância com os resultados apresentados por Peterson⁴.

Ainda quanto aos resultados de Neuber^{3,5}, há o trabalho de Baratta³³, que comparou a fórmula empírica determinada por Baratta e Neal²⁶ e a solução de Neuber com vários resultados experimentais publicados para placas com entalhe em U, sob tração pura. Baratta conclui que a solução de Neuber para o caso estudado subestimava os resultados experimentais em 94% das comparações feitas.

Para os pequenos e grandes valores de r/d Peterson sugere que os gráficos que apresenta⁴, baseados nas fórmulas de Neuber^{3,4,5}, sejam utilizados, principalmente, para as relações $D/d \rightarrow \infty$ e $D/d \rightarrow 1$ pois, embora aproximados, os erros tendem a decrescer rapidamente

te. Dentro desta faixa, resultados experimentais são bastante escassos. Um estudo para pequenos valores de r/d (de 0,08 a 0,011) foi realizado por Frocht e Landsberg³⁴, utilizando $D/d = 1,5$ e 2. Seus resultados foram discutidos por A.J. Durelli e R.H. Jacobsen³⁵ e comparados com os resultados de Neuber para esta faixa, verificando-se que os valores de K_t encontrados por Frocht e Landsberg eram maiores que os de Neuber, embora próximos. Outros resultados³⁸, para $D/d = 1,18$ e r/d variando de 0,001 até 0,02, empregando uma técnica fotoelástica bastante acurada forneceu também valores de K_t maiores que os encontrados por Neuber.

Baseando-se no fato que, as novas curvas apresentadas por Peterson⁴ foram construídas a partir de resultados experimentais e analíticos recentes que concordam entre si, que as curvas de Neuber^{3,5} subestimam os valores de K_t segundo a tendência atual, os resultados encontrados neste trabalho para K_t devido à tração e flexão puras foram comparados com as curvas de Peterson⁴. Uma rápida análise destes resultados indica que os valores de K_t encontrados para $r/d > 0,25$ concordam bem com as curvas de Peterson mas, que os resultados para $r/d = 0,20$ se afastam, em média, de 7,5%. Embora este erro, caso considere-se as curvas de Peterson como corretas, ainda seja para a fotoelasticidade um erro admissível, pode-se notar que caso fossem construídas curvas médias que passassem pelos 3 pontos obtidos, ocorreria uma forte tendência para aumento deste desvio em valores de $r/d < 0,20$. Esta tendência pode também ser notada nos testes a que foram sujeitos as placas P-1 a P-5 antes de serem abandonadas. Para estas placas o processo de extrapolação ainda não havia sido utilizado. Então, os valores de K_t , para a tração pura, foram obtidos a partir das medidas diretas das ordens da franjas máximas lidas no contorno, na região do entalhe. Os valores das tensões nominais foram obtidos a partir das ordens de franjas de seções inteiras

dos modelos, que eram depois corrigidas pela relação D/d . Os valores de K_t obtidos foram resultantes das médias de aproximadamente 20 medidas para cada placa, todas elas feitas do modo citado acima. A curva resultante de K_t , para $D/d = 1,5$ e em função dos valores de r/d está mostrada na figura 22. Nesta curva podemos notar a forte tendência de desvio da curva de Peterson quando r/d decresce.

Para o trabalho de medição de K_t com as novas placas resolveu-se abandonar os valores de $r/d < 0,20$ e utilizar a técnica de extrapolação das ordens de franja máximas no contorno. Como a tendência citada acima continuasse, apesar da técnica de extrapolação ter sido utilizada, chegou-se à conclusão que os erros nos valores de K_t seriam devidos à espessura dos modelos estudados, melhor dizendo, da relação r/t ser pequena, assumindo valores iguais a 0,975 ou 0,66 para as novas placas. Esta hipótese ficou bastante fortalecida após serem consultados trabalhos recentemente publicados^{6,9,10,11}. Wilson e White¹¹ afirmam que para boas medidas de K_t , a relação r/t deve ser no mínimo 0,66. Isto porque os valores de K_t publicados se supõem para estados bidimensionais de tensões, que se aplicam para placas muito finas, isto é, para relações $t/r \rightarrow 0$. Segundo Peterson⁴, quando t/r cresce, um estado plano de deformações aparece. Neste caso, a tensão no entalhe para a espessura média da placa aumenta enquanto que a sua equivalente, na superfície da placa, diminui. O caso de uma placa espessa com furo circular submetida à tração foi estudado analiticamente³⁶ e experimentalmente³⁹ por meio da fotoelasticidade utilizando o método de congelamento de tensões e corte em fatias. Para o método fotoelástico utilizado neste trabalho isto trás problemas, porque passa-se a obter uma tensão menor que a máxima realmente ocorrente no entalhe, embora maior que a mínima.

Wilson e White¹¹ idealizaram um método para medição de K_t em placas com entalhe em U de tal for

ma, a eliminar o efeito da espessura. Construíram placas com mesmas relações D/d e r/d mas, com diferentes relações t/r . Plotaram os valores de K_t obtidos num gráfico em função dos valores de t/r e extrapolaram a curva encontrada para $t/r = 0$, isto é, para a espessura zero, onde se encontra o valor de K_t realmente bidimensional.

Flynn e Roll^{9,10} utilizando-se do método de congelamento de tensões, propuseram um método de correção dos fatores encontrados por meio de um furo circular de calibração, cujo fator de concentração de tensões para $t/r \rightarrow 0$ seria conhecido. Deste modo Flynn e Roll pretenderam corrigir todos os erros possíveis de aparecerem, como por exemplo, efeito de bordo, a razão $t/r = 1$, que seriam os mesmos tanto para a região em estudo do entalhe em U como para o furo de calibração.

Fessler, Rogers e Stanley⁶ aplicaram um método semelhante ao de Wilson e Whitell¹¹ mas, para fotoelasticidade tridimensional. O método consistia em ir-se diminuindo progressivamente a espessura das fatias cortadas (método de congelamento das tensões) ao mesmo tempo que obtinham-se leituras das ordens de franja. Após isto, extrapolou-se por meio de um gráfico a ordem de franja para quando a espessura da fatia fosse zero.

Quanto aos resultados encontrados para os carregamentos combinados, apresentados nas figuras 13 a 21, pode-se concluir que, devido aos problemas com a espessura discutidos acima, uma grande margem de erro pode ser admitida. Apesar disto, uma visualização rápida destes gráficos permite observar a tendencia dos resultados encontrados em verificarem o princípio da superposição, que se encontra representado pelas curvas contínuas. Estas curvas foram construídas a partir da equação (10) e fornecem a variação do fator de concentração de tensões combinado em função das razões entre as tensões nominais.

Na expressão (10), K_{tm} e K_{tp} representam os fatores de concentração de tensões para os esforços puros de flexão e tração, respectivamente. Também foram assinalados nos gráficos os pontos obtidos experimentalmente com maiores desvios e os valores destes em relação às curvas teóricas. A média destes desvios máximos para as 9 placas es tá em torno de 6,5%, o que, para a técnica experimental empregada, é admissível.

$$K_t = \frac{\sigma_m \cdot K_{tm} + \sigma_p \cdot K_{tp}}{\sigma_m + \sigma_p} \quad (10)$$

fig. 13 : Valores de K_t em função das razões entre as tensões nominais Placa P-6 ; $D/d=1,5$; $r/d=0,315$

fig. 14 : Valores de K_t em função das razões entre as tensões nominais Placa P-7 ; $D/d=1,5$; $r/d=0,255$

fig. 15 : Valores de K_t em função das razões entre as tensões nominais Placa P-8 ; $D/d=1,5$; $r/d=0,215$

fig. 16 : Valores de K_t em função das razões entre as tensões nominais Placa P-9 ; $D/d=1,25$; $r/d=0,305$

fig. 17 : Valores de K_t em função das razões entre as tensões nominais Placa P-10 ; $D/d=1,25$; $r/d=0,253$

fig. 18 : Valores de K_t em função das razões entre as tensões nominais Placa P-11; $D/d=1,25$; $r/d = 0,205$

fig. 19 : Valores de K_t em função das razões entre as tensões nominais Placa P-12; $D/d=1,10$; $r/d=0,305$

fig. 21 : Valores de K_t em função das razões entre as tensões nominais Placa P-14; $D/d=1,10$; $r/d=0,205$

fig. 20 : Valores de K_t em função das razões entre as tensões nominais Placa P-13; $D/d=1,10$; $r/d=0,253$

fig. 22 : Valores de K_t
 para tração pura obtidos
 para as placas P-1 a P-5
 ($D/d = 1,5$)

CAPÍTULO 3

ESTUDO TRIDIMENSIONAL - EIXOS

3.1. - Análise Teórica para obtenção do Fator de concentração de Tensões.

Neste capítulo foi feito um estudo do fator de concentração de tensões para eixos com entalhes circunferenciais em U, sujeitos à combinação dos esforços de flexão e torção.

A definição adotada para o fator de concentração de tensões foi:

$$K_t = \frac{\text{tensão máxima no entalhe}}{\text{tensão máxima relativa ao menor diâmetro, sem se levar em consideração o efeito de concentração de tensões}}$$

$$= \frac{\sigma_{lmax}}{\sigma_{lnom}} \quad (11)$$

Em um ponto da superfície do eixo afastado do entalhe e longe dos apoios, atuam as tensões σ'_x devido ao momento fletor e, τ'_{xy} devido ao momento torçor, como está mostrado na figura 23. Assim, a tensão nominal para uma seção de diâmetro D é

$$\sigma'_{lnom} = \frac{\sigma'_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x'^2 + 4 \tau_{xy}'^2} \quad (12)$$

enquanto que a tensão nominal, calculada para a seção de diâmetro d, sem se levar em consideração o efeito da concentração de tensões, é

$$\sigma_{lnom} = \sigma'_{lnom} \left(\frac{D}{d} \right)^3 \quad (13)$$

fig. 23 : Tensões nominais relativas ao diâmetro D

Para a região do entalhe atuam as tensões σ_{xe} e σ_{ye} devido ao momento fletor e, τ_{xye} devido ao momento torçor. A tensão σ_{ye} é função da razão de Poisson do material e foi prevista por Neuber^{3,5} através de uma análise matemática para o fator de concentração de tensões em eixos com entalhes circunferenciais em U. Então, para a seção do entalhe mostrada na figura 24, tem-se que a tensão máxima atuante na região do entalhe é

$$\sigma_{lmax} = \frac{\sigma_{xe} + \sigma_{ye}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xe} - \sigma_{ye})^2 + 4 \tau_{xye}^2} \quad (14)$$

fig. 24 : Tensões máximas relativas à região da concentração de tensões

Existem duas razões para calcular-se o fator de concentração de tensões sem se levar em consideração a tensão circunferencial σ_{ye} . A primeira, é que σ_{ye} depende da razão de Poisson do material fotoelástico utilizado, diferente da razão de Poisson do aço ou dos materiais geralmente utilizados em elementos estruturais ou de máquinas. A segunda, é que sendo σ_{ye} de mesmo sinal^{3, 5} que σ_{xe} , o valor de σ_{lmax} fica acrescido de no máximo 3,5% para σ_{ye} igual a 15% de σ_{xe} e, conseqüentemente, o valor de K_t . Assim, o cálculo de σ_{lmax} foi feito a partir da expressão (15), abaixo, onde não se levou em consideração a tensão σ_{ye} .

$$\sigma_{1\max} = \frac{\sigma_{xe}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{xe}^2 + 4\tau_{xye}^2} \quad (15)$$

Os fatores de concentração de tensões para eixos com entalhes circunferenciais em U sujeitos à tração e à flexão puras levando-se em consideração a tensão σ_{ye} foram estudados por Peterson^{3,40,41}. Ele combinou a solução matemática de Neuber^{3,5} para este tipo de entalhe com o critério da Máxima Energia de Distorção, e utilizou a razão de Poisson igual a 0,3. O fator de concentração de tensões resultante foi chamado de K_t' e não é muito utilizado por ser, no máximo, 15% abaixo do valor correspondente de K_t obtido por Neuber.

Uma observação deve ser feita quanto à diferença entre os fatores de concentração de tensões bidimensional e tridimensional. No caso do entalhe em U, por exemplo, o fator bidimensional seria referente às placas finas, enquanto o fator tridimensional seria relativo a eixos com relações geométricas idênticas. No caso da flexão, a diferença entre estes dois fatores⁴² é da ordem de 6 a 8%, sendo o bidimensional maior que o tridimensional. A grande importância do estudo do fator bidimensional está na maior facilidade e rapidez de ser obtido em relação ao tridimensional, embora este seja de muito maior aplicação prática. Foram sugeridos^{3,4} métodos de passagem do fator bidimensional para o tridimensional mas existem algumas restrições⁴³ a estes processos.

3.2. - O Método Experimental.

3.2.1. - O Sistema de Cargas.

Na seleção de um sistema de cargas para o congelamento das tensões nos eixos, procurou-se um

dispositivo que aplicasse

- a. momento fletor puro
- b. momento torçor puro
- c. a combinação destes dois esforços

e que ainda atendessee às exigências impostas pelo método de congelamento das tensões que são:

- d. modelo com total liberdade para dilatar-se, a fim de evitar-surgimento indesejável de tensões devidas à restrição da sua expansão provocada pelo aumento da temperatura, assim como tensões que seriam provocadas pelo impedimento das deformações (relativamente grandes) do modelo, especialmente devido ao momento fletor.

O sistema utilizado, que atendeu a todas as características acima, está mostrado na figura 25. Montado no sistema de cargas está um eixo sofrendo um carregamento combinado de esforços de flexão e torção. Os apoios são montados sobre esferas de aço que eliminam grande parte do atrito, proporcionando liberdade de movimentos longitudinais e transversais aos eixos, evitando assim o surgimento de tensões devidas à restrição das deformações provocadas pelos carregamentos e pela variação da temperatura. Para o congelamento das tensões o modelo foi montado no sistema de cargas (figura 25) e este colocado num forno à temperatura ambiente.

fig. 25.: O sistema de cargas para os eixos

3.2.2. - Congelamento de Tensões e corte em fatias.

Foi utilizado o método fotoelástico de congelamento das tensões e posterior corte em fatias dos modelos 1, 19, 20, 21, 22.

Os modelos foram carregados à temperatura ambiente e, não à temperatura crítica como se costuma fazer. Em seguida a temperatura foi elevada com uma taxa de crescimento igual a $6^{\circ}\text{C}/\text{h}$ até alcançar 160°C , 10°C acima da temperatura crítica do material utilizado. Aí o modelo permaneceu durante 1 hora homogeneização da temperatura e, em seguida, esta foi abaixada com uma taxa de decréscimo igual a $1,5^{\circ}\text{C}/\text{h}$ até alcançar-se 100°C quando o forno foi desligado. Em seguida, o modelo foi acondicionado numa estufa à 70°C até que fosse cortado em fatias.

Estas fatias também ficaram acondicionadas a 70°C antes e após serem medidas a fim de se evitar absorção de umidade. As fatias foram cortadas dos modelos com o objetivo de se conhecerem as tensões σ_x , τ_{xy} , σ_{xe} e τ_{xye} (seção 3.1.) para o cálculo de K_t . As mesmas foram cortadas em uma fresadora universal com uma serra circular de dimensões 150 x 2 x 32mm. A velocidade de corte foi igual a 480 rpm, o avanço de 12 mm/min e utilizou-se intensa refrigeração no corte. A espessura média das fatias retiradas dos modelos foi igual a 1,40 mm. Sua medição foi feita através de um polariscópio de transmissão, mostrado na figura 26, utilizando-se o método de compensação de Tardy e incidência de luz branca normal ao plano das fatias¹⁹, 22.

fig. 26 : O polariscópio de transmissão modelo 051 da Photolastic

3.2.3. - Escolha das Fatias retiradas dos modelos e separação das tensões atuantes.

Do mesmo modo que para as placas, procurou-se obter as tensões nominais nos eixos a partir das tensões construídas nos próprios modelos a fim de evitar-se a inclusão de meios de calibração dos carregamentos aplicados, o que poderia introduzir erros. Assim, estas tensões foram obtidas a partir de duas fatias retiradas dos modelos em regiões longe do entalhe, do ponto de aplicação dos carregamentos e dos apoios. Um esquema mostrando as fatias retiradas, o estado de tensões combinado, bem como o sentido de aplicação dos momentos em relação a um sistema fixo de coordenadas está mostrado na figura 27.

fig. 27 : Fatias retiradas para obtenção das tensões nominais atuantes nos eixos

A seguir será mostrado o processo pelo qual foram obtidas as tensões σ_x , τ_{xy} , σ_{xe} , τ_{xye} , σ_{lnom} e σ_{lmax} .

A partir da fatia longitudinal $|L|$, e com incidência de luz normal à fatia e na direção y (figura 27), obtem-se a partir da fotoelasticidade¹⁹ que:

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \text{ FATIA } L}{\text{INCIDÊNCIA } y} = \sigma'_x = \frac{n_y K}{t_y} \quad (16)$$

A ordem de franja que interessa para o cálculo de σ_x na expressão (16) é a correspondente aos contornos da fatia $|L|$. Como para o contorno tem-se, em geral, dificuldades de medição, foram feitas várias leituras das ordens de franja a distâncias determinadas deste. Em seguida foram construídos gráficos onde as ordens de franja medidas para os diversos pontos foram plotadas em função das suas distâncias aos contornos. O valor de n_y no contorno foi obtido por extrapolação para a distância zero da curva média que passava pelos pontos plotados nos gráficos (apêndice C).

A obtenção da tensão τ'_{xy} foi feita a partir da leitura das ordens de franja nos contornos da fatia $|a|$ (figura 27), e do conhecimento da tensão σ'_x para estes pontos. É descrito abaixo o procedimento para a obtenção de τ'_{xy} .

O estado de tensões para um ponto na superfície do eixo com uma cota $Z_{\text{máxima}}$ (igual a $D/2$), em relação ao sistema de coordenadas X , Y e Z adotado, estando este ponto solicitado pelos carregamentos de flexão e torção mostrados na figura 27, é um estado plano de tensões que pode ser representado como na figura 28. Se a incidência de luz é feita numa direção x' que faça α

graus com o eixo X, (figura 28 e 29), a equação da fotoelasticidade fornecerá o valor da tensão $\sigma_{y'}$, mostrada na figura 29, e esta tensão será

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \text{ FATIA } \alpha \text{ INCIDENCIA X'} = \sigma_{y'} = \frac{n_{x'} K}{t_{x'}} \quad (17)$$

fig. 28.: Estado Plano de Tensões na superfície dos eixos para a cota Z máxima

fig. 29 : Incidência de luz segundo a direção X'.

Tensões $\sigma_{y'}$

Também foi utilizado o processo de extrapolação para a obtenção de n_x , nos contornos das fatias $|\alpha|$ (Apendice C).

Expressando σ_y , em função das tensões σ'_x e τ'_{xy} e, do ângulo α , tem-se

$$\sigma_{y'} = \sigma_{90^\circ + \alpha} = \frac{\sigma'_x}{2} - \frac{\sigma'_x}{2} \cos 2\alpha - \tau'_{xy} \sin 2\alpha \quad (18)$$

e, se o ângulo α for igual a 45° (positivo quando contado no sentido trigonométrico, a partir do eixo X) tem-se que

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma'_x}{2} - \tau'_{xy} = \frac{n_{x'} K}{t_{x'}} \quad (19)$$

Como já se conhece o valor de σ'_x da equação (16) tem-se que

$$\tau'_{xy} = \frac{n_y K}{2t_y} - \frac{n_{x'} K}{t_{x'}} \quad (20)$$

Duas observações importantes cabem ser feitas neste momento. A primeira, é que sendo τ'_{xy} negativa e σ'_x positiva para o ponto A (figura 27), a tensão σ_y , será a soma das respectivas ordens de franja, segundo a equação (20). A mesma situação ocorrerá para o ponto B, (figura 27), onde σ'_x será negativa e, τ'_{xy} positiva. Caso seja invertido o sentido do momento torçor ou utilizando $\alpha = -45^\circ$, em vez de 45° , estas ordens de franja se subtrairão, tornando n_x bastante pequena, o que dificultará muito sua leitura.

A segunda observação, é que na realidade, precisaria-se apenas de uma única fatia, a $|L|$ por exemplo, para a obtenção das tensões σ'_x e τ'_{xy} . Neste caso, σ'_x seria obtida como foi descrito anteriormente e, σ_y , seria obtida a partir da incidência oblíqua de luz, com direção X' , sobre a face da fatia $|L|$. Como quízes-se evitar o processo de incidência oblíqua de luz a fim de não se introduzirem erros inerentes ao processo, uma outra fatia, $|\alpha|$, foi retirada do modelo, com seu plano fazendo 45° com o eixo deste. Note-se que uma incidência de luz sobre a fatia $|\alpha|$ segundo a direção X' significa uma incidência de luz normal à sua face.

Conhecidas as tensões σ'_x e τ'_{xy} , a tensão nominal para a menor seção do modelo será

$$\sigma_{lnom} = \left(\frac{n_y}{2t_y} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n_y}{t_y} \right)^2 + 4 \left(\frac{n_y}{2t_y} - \frac{n_{x'}}{t_{x'}} \right)^2} \right) \cdot K \cdot \left(\frac{D}{d} \right)^3 \quad (21)$$

A determinação das tensões σ_{xe} e τ_{xye} , no entalhe, foi feita de maneira análoga à de σ'_x e τ'_{xy} , embora duas dificuldades tenham sido encontradas. A primeira diz respeito às duas fatias que deveriam ser retiradas do modelo passando pelo mesmo ponto, o de menor diâ-

metro. Esta dificuldade foi contornada ao aproveitar-se a simetria dos modelos e dos carregamentos aplicados, retirando-se duas meia-fatias, uma delas, longitudinal, passando pela cota $Z_{\text{mínima}}$ e, a outra, a 45° , passando pela cota $Z_{\text{máxima}}$ do menor diâmetro do entalhe. A figura 30 mostra um esquema do corte destas fatias. A segunda dificuldade foi a existência de σ_{ye} . Precisou-se, então, de uma outra fatia para sua determinação, já que não se utilizou o método da incidência oblíqua.

fig. 30 : Fatias longitudinal e a 45° para a obtenção das tensões σ_{xe} e τ_{xye}

Assim, a determinação de σ_{ye} foi feita através de uma sub-fatia, retirada da meia fatia longitudinal que, anteriormente, já havia sido utilizada para a medição de σ_{xe} . O corte desta fatia foi feito manualmente, através de uma serra fina e, o acabamento, dado

com uma lixa fina. Estas sub-fatias também foram medidas no polariscópio de transmissão mostrado na figura 26. O esquema da figura 31 mostra a sub-fatia para obtenção de σ_{ye} assim como a direção da incidência de luz, que foi feita paralela à direção X. Para o ponto C, do contorno, tem-se que:

$$\sigma_{ye} = \frac{n_{xe} K}{t_{xe}} \quad (22)$$

fig. 31 : Sub-fatia para a obtenção de σ_{ye} .

Uma observação cabe ser feita neste momento quanto à dificuldade de medição destas sub-fatias. Esta dificuldade foi ocasionada, principalmente, pelos seguintes motivos.

- a. baixa ordem de franja nestas fatias para a incidência de luz na direção X, devido à tensão σ_{ye} ser baixa em relação a tensão σ_{xe} .
- b. pequenas dimensões das sub-fatias.
- c. dificuldade de se obterem faces paralelas no seu corte devido às sub-fatias serem pequenas e pelo corte ter-se processado manualmente.

Apesar disto, não foi encontrada dificuldade de medição para a sub-fatia retirada do modelo M-1. Como este modelo foi solicitado apenas à flexão, uma fatia longitudinal inteira pode dele ser retirada, pois, não havia a necessidade da fatia inclinada a 45° por ser $\tau_{xye} = 0$. Possuindo, a sub-fatia maiores dimensões, tornou-se mais fácil a obtenção de faces paralelas e, como a tensão σ_{xe} fosse maior neste modelo que nos outros, a tensão σ_{ye} também o foi.

O eixo MT-8 foi especialmente construido para a medição da tensão σ_{ye} . Este eixo foi solicitado para uma razão igual a 1, entre as tensões nominais σ_x e τ_{xy} . Apesar das fatias transversal e longitudinal haverem partido durante sua usinagem, medições foram feitas e os resultados encontrados concordaram bem com os obtidos a partir do eixo M-1. Maiores detalhes sobre estes resultados e sua concordância encontram-se na seção 3.3:

Estão mostradas abaixo as expressões (23) e (24), para a obtenção das tensões σ_{xe} e τ_{xye} . Estas expressões foram obtidas análogamente às de σ'_x (expressão 16) e de τ'_{xy} (expressão 20), apenas com a inclu-são da tensão σ_{ye} . Então,

$$\sigma_{xe} = \frac{n_{ye} \cdot K}{t_{ye}} \quad (23)$$

$$\tau_{xye} = K \left(\frac{n_{ye}}{2t_{ye}} + \frac{n_{xe}}{2t_{xe}} - \frac{n_{x'e}}{t_{x'e}} \right) \quad (24)$$

A tensão máxima no entalhe, σ_{lmax} , pode ser agora obtida a partir das expressões (15), (23) e (24) e, então

$$\sigma_{lmax} = \left(\frac{n_{ye}}{2t_{ye}} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n_{ye}}{t_{ye}} \right)^2 + 4 \left(\frac{n_{ye}}{2t_{ye}} + \frac{n_{xe}}{2t_{xe}} - \frac{n_{y'e}}{t_{x'e}} \right)^2} \right) K \quad (25)$$

É interessante observar que os pontos mais solicitados dos modelos são os de cota $Z_{máxima}$ e $mínima$ (figura 24), tanto para os esforços puros como para os combinados. Assim, não foi necessário uma análise de tensões para dois ou mais pontos a fim de se verificar qual deles seria o mais solicitado. A figura 32 mostra as fatias longitudinal e a 45° retirados do eixo MT-7. Para estas fatias pode ser verificado que as ordens de franja máxima estão localizadas nos pontos de menor diâmetro, o que aconteceu para todos os eixos estudados. Isto torna válido o cálculo de σ_{lmax} através da equação (25) onde as ordens de franja n_{ye} , n_{xe} e $n_{x'e}$ são máximas e acontecem para o mesmo ponto.

fig. 32 : Fatias longitudinal e a 45° na região do entalhe do eixo MT-7

Deve-se também observar que as mudanças de forma sofridas pelos modelos no método de congelamento de tensões não foram levadas em consideração por terem sido desprezíveis. As deformações à temperatura crítica foram pequenas porque o material fotoelástico utilizado possui alta figura de mérito, isto é, a razão E/K é alta, onde E é o módulo de elasticidade do material e K é o valor da franja. Além disso, uma previsão dos carregamentos foi feita de modo que não se ultrapassasse o valor de 20 franjas por centímetro para a região do entalhe nos modelos.

A figura 33 mostra as fatias a 45° retiradas dos eixos MT-1 e MT-2, onde houve uma subtração das ordens de franja relacionadas às tensões σ_{xe} , τ_{xye} e σ_{ye} (ver expressão 24). Isto ocorreu porque as fatias

$|\alpha|$ dos eixos MT-1 e MT-2, para a região do entalhe, foram usinadas segundo um ângulo $\alpha = -45^\circ$, diminuindo, consequentemente, o valor de n_x 'e.

fig. 33 : Fatias a 45° na região do entalhe para os eixos MT-1 (esquerda) e MT-2 (direita)

Com os valores obtidos para σ_{lmax} e σ_{lnom} o fator de concentração de tensões pode ser obtido a partir da expressão (11). Então, substituindo as expressões (21) e (25) na expressão (11) obtém-se

$$K_t = \frac{\frac{n_{ye}}{2t_{ye}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_{ye}^2}{t_{ye}^2} + 4 \left(\frac{n_{ye}}{2t_{ye}} + \frac{n_{xe}}{2t_{xe}} - \frac{n_{x'e}}{t_{x'e}} \right)^2}}{\frac{n_y}{2t_y} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_y^2}{t_y^2} + 4 \left(\frac{n_y}{2t_y} - \frac{n_{x'}}{t_{x'}} \right)^2}} \left(\frac{d}{D} \right)^3 \quad (26)$$

Notar que K_t independe do valor da franja do material sendo calculado a partir das tensões nominal e máxima que por sua vez foram obtidas levando-se em conta as razões entre as ordens de franjas e as espessuras das fatias consideradas.

No apêndice C estão os valores das ordens de franja medidos para todos os eixos utilizados neste trabalho.

3.3. - Análise dos Resultados Obtidos.

Foram obtidos fatores de concentração de tensões para eixos com entalhes circunferenciais em U solicitados à flexão pura, à torção pura e à combinação destes esforços. Todos os modelos possuíam as mesmas relações geométricas, isto é, $D/d = 1,3$ e $r/d = 0,25$.

Na figura 34 estão plotados num gráfico os resultados encontrados. Neste gráfico os valores de K_t para os esforços puros ou combinados podem ser obtidos em função das razões das tensões nominais σ_x/τ_{xy} e τ_{xy}/σ_x , ambas menores ou iguais a 1. Estas tensões nominais são as que atuariam na superfície da menor seção (diâmetro d) dos eixos, caso não existisse o efeito da concentração de tensões. Foi também plotada neste gráfico a curva representativa do Princípio da Superposição aplicado ao caso. Os valores de K_t desta curva foram calculadas a partir da expressão (27) e plotados também em fun

ção das razões σ_x/τ_{xy} e τ_{xy}/σ_x

$$K_t = \frac{\sigma_{lmax}}{\sigma_{lnom}} = \frac{K_{tm} \cdot \sigma_x/2 + 1/2 (K_{tm}^2 \sigma_x^2 + 4 K_{tt}^2 \tau_{xy}^2)^{1/2}}{\sigma_x/2 + 1/2 (\sigma_x^2 + 4 \tau_{xy}^2)^{1/2}} \quad (27)$$

Os fatores de concentração de tensões K_{tm} e K_{tt} , para a flexão pura e torção pura respectivamente, foram os obtidos para os eixos M-1 e T-1 neste trabalho (ver tabela 4). Pode ser observada uma boa concordância entre os resultados experimentais e os seus correspondentes sobre a curva representativa do princípio da superposição. O desvio máximo observado foi de 3%. É interessante notar que, levando-se em conta que a curva teórica possui variação bastante suave, uma reta média pode ser passada através dos resultados experimentais, sendo o desvio máximo destes resultados em relação à reta, também de 3%.

Uma observação importante deve ser feita relativa aos valores calculados para as tensões τ_{xye} atuantes no entalhe a partir da expressão (24). Nesta expressão verifica-se que τ_{xye} depende do valor de n_{xe} isto é, do valor de σ_{ye} atuante no entalhe. Houve uma grande dificuldade na medição de n_{xe} para os diversos eixos, devido à ordem de franja ser baixa e, pelo fato das dimensões das sub-fatias serem reduzidas.

Como para o eixo M-1 estas medidas foram feitas com boa precisão devido à sub-fatia retirada possui um comprimento d e, a ordem de franja ter sido mais alta, calculou-se a relação σ_{ye}/σ_{xe} na região do entalhe para este eixo, sendo esta relação igual a 0,15, e σ_{ye} sendo de mesmo sinal que σ_{xe} . Pode-se, então, concluir que a tensão σ_{ye} vale aproximadamente 15% da tensão

σ_{xe} na região do entalhe, para a geometria adotada para os eixos, isto é, $D/d = 1,3$ e $r/d = 0,25$. Como esta tensão é devida ao momento fletor, não sofrendo influência do momento torsor^{3,5}, modificou-se a expressão (24) passando-se a utilizar a (28), mostrada abaixo, para o cálculo de τ_{xye} dos outros modelos estudados. A expressão (28) é semelhante à (24), onde a única modificação introduzida foi a substituição do valor n_{xe} por $0,15 n_{ye}$. Valores de K_t também foram calculados para o caso de σ_{ye} ser nulo, ou seja, para $n_{xe} = 0$ e, para quando $n_{xe} = 0,30 n_{ye}$ isto é, $\sigma_{ye} = 0,30 \sigma_{xe}$. Isto foi feito para se ter uma avaliação da influência dos erros de medição em σ_{ye} sobre os valores obtidos para K_t . Na tabela 3 verifica-se que a variação máxima do valor de K_t seria em torno de 4,4% para um erro de leitura de 100% em n_{xe} , considerando-se o valor $n_{xe} = 0,15 n_{ye}$ como correto.

Para o eixo MT-8 encontrou-se σ_{ye} igual a 15,3% de σ_{xe} o que concorda perfeitamente com o resultado obtido para o eixo M-1. Note-se que o eixo MT-8 foi solicitado à combinação dos dois esforços para uma razão $\sigma_x/\tau_{xy} = 1$, enquanto o eixo M-1 sofreu apenas momento fletor.

$$\tau_{xye} = K \left(\frac{0,575 n_{ye}}{t_{ye}} - \frac{n_{x'e}}{t_{x'e}} \right) \quad (28)$$

A tabela 4 apresenta a comparação dos resultados encontrados para a flexão e torção puras com valores de K_t fornecidos por Peterson⁴ e por Neuber^{3,5}. Além dos resultados para os eixos M-1 e T-1 foi incluído o fator de concentração de tensões obtido para o modelo T-0, com relações geométricas: $D/d = 1,66$ e $r/d = 0,33$. Este foi o primeiro modelo a ser testado, quando ainda não se havia escolhido as relações geométricas definitivas, para se obter informações a respeito do funcionamento do sistema de cargas e do método escolhido para o cor-

te das fatias.

Na tabela 4 também foram apresentados os desvios dos valores em relação aos resultados apresentados por Peterson⁴ e por Neuber^{3,5}. Pode-se observar que os resultados encontrados estão em excelente concordância. Para o caso dos eixos a razão entre o raio do entalhe e a espessura das fatias retiradas foi em torno de $t/r = 0,28$, bem menor que a razão mínima ocorrida para as placas, onde $t/r = 1,04$. Acredita-se que com $t/r = 0,28$, bem abaixo da razão máxima recomendada¹¹ igual a 1,5, o problema da espessura das fatias tenha sido superado para os eixos, o que não ocorreu para o caso das placas.

Ainda pela tabela 4 pode-se verificar que os resultados de Peterson são maiores que os de Neuber, o que acontece para todas as relações D/d e r/d , seguindo a mesma tendência encontrada para as placas. No caso da flexão pura, devido à falta de informações, principalmente de resultados experimentais, Peterson⁴ apresenta uma curva aproximada que foi construída a partir dos seus valores K_t bidimensionais, multiplicados pela razão entre os valores K_t tridimensionais e bidimensionais, de Neuber^{3,5}, para as mesmas relações geométricas. Esta aproximação, no caso de tração pura, concordou bem com o resultado encontrado fotoelásticamente por Cheng⁴⁴. Para as relações $D/d = 1,505$ e $r/d = 0,209$ Cheng encontrou $K_t = 1,85$, valor que o próprio pesquisador achou baixo, enquanto que o resultado de Peterson para estas relações é 1,92 e, o de Neuber, 1,77. Os resultados fornecidos por Neuber^{3,5} para K_t , em eixos com entalhes circunferenciais em U, são calculados através da combinação das soluções matemáticas dos fatores de concentração de tensões em eixos onde $D/d \rightarrow 1$, com entalhes circunferenciais elípticos (K_{te}) e, para os entalhes circunferenciais hiperbólicos em eixos onde $D/d \rightarrow \infty$ (K_{th}). A combina

ção destes dois fatores é então feita através da equação (9).

Para a torção pura, Peterson baseou - se em resultados publicados⁴⁵ para a construção das curvas de K_t . Neuber^{3,5} apresenta suas curvas baseado na combinação das soluções matemáticas para os entalhes hiperbólico e elíptico. Resultados publicados^{3,4,5,45,46,47} e os obtidos neste trabalho para eixos com entalhes circunferenciais em U sob torção pura não estão em concordância com os encontrados por H. Okubo^{48,49}.

TABELA 3 : Desvios relativos dos valores de K_t calculados para $\sigma_{ye} = 0$ e $\sigma_{ye} = 0,30\sigma_{xe}$ em relação à K_t obtido para $\sigma_{ye} = 0,15\sigma_{xe}$

Eixo	K_t 15%	K_t 0%	K_t 30%	D 0-15	D 30-15
MT-3	1,39	1,45	1,33	4,3%	4,3%
MT-4	1,36	1,42	1,30	4,4%	4,4%
MT-5	1,47	1,53	1,41	4,1%	4,1%
MT-6	1,27	1,30	1,24	2,4%	2,4%
MT-7	1,46	1,50	1,42	2,8	2,8%

TABELA 4 : Valores de K_t obtidos para flexão e torção puras e sua comparação com os valores correspondentes de Peterson⁴ e Neuber^{3,5}.

Eixo	Solici tação	Relações Geométricas	K_t ob tido	K_t Pe terson	K_t Neu ber	Desvio re lativo Pe terson	Desvio re lativo Neu ber
M-1	flexão pura	$D/d=1,3$ $r/d=0,25$	1,49	1,51	1,47	1,3%	1,4%
T-1	torção pura	$D/d=1,3$ $r/d=0,25$	1,25	1,28	1,25	2,3%	0%
T-0	torção pura	$D/d=1,66$ $r/d=0,33$	1,17	1,23	1,20	5,1%	2,6%

fig. 34 : Valores de K_t obtidos para os eixos M-1, T-1, MT-3 a MT-7, em função da razão entre as tensões nominais $D/d=1,3$; $r/d=0,25$

CONCLUSÕES

Através da Fotoelasticidade foram obtidos os fatores de concentração de tensões para placas e eixos com entalhes em U sujeitos a carregamentos combinados de tração e flexão (caso das placas) e flexão e torção (caso dos eixos). As placas estudadas possuíam relações geométricas $D/d = 1,5 ; 1,25 ; 1,10$ e $r/d = 0,30 ; 0,25$ e $0,20$. Para os eixos foi escolhida para análise a geometria determinada por $D/d = 1,3$ e $r/d = 0,25$.

Os fatores de concentração de tensões para as placas foram obtidos a partir de método fotoelástico bidimensional e chegou-se às seguintes conclusões.

- a. os valores de K_t obtidos para os carregamentos combinados de flexão e tração concordaram com seus valores calculados a partir do Princípio da Superposição, sendo a média dos desvios relativos máximos para todas as placas utilizadas igual a 6,5%.
- b. os valores de K_t obtidos para os carregamentos puros de flexão e tração foram, em geral, menores que os valores correspondentes publicados por Peterson⁴, sendo as médias dos desvios relativos máximos para todas as placas utilizadas iguais à 7,4% e 7,2%, respectivamente.
- c. o método utilizado para obtenção dos resultados não é aconselhável para relações $r/d < 0,20$. As médias dos desvios relativos dos resultados obtidos para as placas com $r/d = 0,20$ em relação aos resultados de Peterson foram iguais a 7,0% para a flexão e 7,2% para a tração.

- d. embora os desvios relativos mencionados nos itens a, b e c acima sejam admitidos pela Fotoelasticidade, acredita-se que tenham sido motivados, principalmente, pela grande espessura das placas analisadas em relação aos raios dos entalhes. Isto porque os métodos de leitura das ordens de franjas e extrapolação empregados incorrem em desvios menores que os obtidos. Para redução destes desvios, métodos mais precisos foram referidos a partir da bibliografia analisada.

Para o caso dos eixos, foi feito um estudo tridimensional pelo método fotoelástico de congelamento das tensões e corte em fatias dos modelos e, chegou-se às seguintes conclusões.

- a. os valores de K_t obtidos para os carregamentos combinados de flexão e torção concordaram muito bem com seus valores calculados a partir do Princípio da Superposição, sendo o desvio relativo máximo igual a 3%.
- b. os valores de K_t obtidos para os carregamentos puros de flexão e torção concordaram muito bem com os resultados de Peterson e Neuber. Notou-se, para o caso da flexão, a ausência de resultados experimentais, embora este seja um caso de real interesse no projeto de elementos estruturais e de máquinas.
- c. verificou-se que a tensão σ_{ye} vale aproximadamente 15% da tensão σ_{xe} para eixos com relações $D/d = 1,3$ e $r/d = 0,25$, construídos com o material fotoelástico utilizado e, à sua temperatura crítica, onde seu coeficiente de Poisson está em torno de 0,50.

O autor aconselha para a análise fotoelástica bidimensional de concentração de tensões a utilização de técnicas onde se leve em consideração a espessura dos modelos a serem empregados. Sugere, também, uma análise da variação das tensões máximas atuantes nos entalhes de placas ao longo da sua espessura.

Devido ao sucesso alcançado utilizando o método de congelamento das tensões, recomenda-se esta técnica para a análise de concentração de tensões em diferentes tipos de entalhes em modelos solicitados à esforços combinados. Embora este tipo de estudo seja de grande importância dentro da Engenharia muito pouco se tem feito no campo experimental.

APENDICE A

fig 1-A

Valor de $n_{\max}$. TRAÇÃO PURA

Placa P-8

fig. 2-A

Valor de $n_{\max}$. FLEXÃO PURA

Placa P-8

fig. 3-A

Valor de $n_{\max} \cdot \sigma_p / \sigma_m = 0,288$

Placa P-8

fig. 4-A

Valor de $n_{\max} \cdot \sigma_p / \sigma_m = 0,753$

Placa P-8

fig. 5-A

Valor de $n_{\max} \cdot \sigma_m / \sigma_p = 0,723$

fig. 6-A

Valor de $n_{\max} \cdot \sigma_m / \sigma_p = 0,807$

fig. 7-A

Valor de $n_{\max} \cdot \sigma_m / \sigma_p = 0,579$

fig. 8-A

Valor de $n_{\max} \cdot \sigma_m / \sigma_p = 0,302$

fig. 9-A : Valores de n e N .

Placa P-8. FLEXÃO PURA

fig. 10-A : Valores de n e N .Placa P-8. $\sigma_p/\sigma_m = 0.288$

fig. 12-A : Valores de n e N .Placa P-8. $\sigma_m/\sigma_p = 0.723$ fig. 11-A : Valores de n e N .Placa P-8. $\sigma_m/\sigma_p = 0.753$

fig. 13-A : Valores de n e N .

Placa P-8. $\sigma_m/\sigma_p = 0,807$

fig. 14-A : Valores de n e N .

Placa P-8. $\sigma_m/\sigma_p = 0,579$

fig. 15-A : Valores de n e N .

Placa P-8. $\sigma_m/\sigma_p = 0,302$

TABELA 1-A : Valores de N, n e $n_{\max}$ extrapolados para as
placas P-6 a P-14

PLACA	N	n	$\frac{\sigma_p}{\sigma_m}$	$\frac{\sigma_m}{\sigma_p}$	$n_{\max}$
P-6	0,75	0,76	-	0	2,236
P-6	1,15	-1,16	0	-	4,0
P-6	1,36	-0,85	0,158	-	4,6
P-6	1,45	-0,07	0,594	-	4,5
P-6	2,04	0,34	0,916	-	6,2
P-6	2,30	0,78	-	0,753	6,1
P-6	1,78	0,89	-	0,509	5,4
P-6	2,09	1,67	-	0,170	6,4
P-7	1,55	1,54	-	0	4,5
P-7	1,39	-1,47	0	-	4,9
P-7	1,59	-0,68	0,265	-	5,4
P-7	1,40	-0,02	0,650	-	4,6
P-7	1,31	0,47	-	0,712	4,45
P-7	1,35	0,75	-	0,432	4,3
P-7	1,58	0,89	-	0,421	4,95
P-7	1,31	0,98	-	0,217	3,95
P-8	1,37	1,33	-	0	4,16
P-8	1,19	-1,23	0	-	4,6
P-8	1,41	-0,55	0,288	-	5,0
P-8	1,62	0,11	0,753	-	5,1
P-8	1,55	0,55	-	0,723	5,2
P-8	1,34	0,41	-	0,807	4,5
P-8	1,45	0,65	-	0,579	4,7
P-8	1,60	1,07	-	0,302	4,65
P-9	1,85	1,87	-	0	4,3
P-9	1,61	-1,59	0	-	3,6
P-9	1,79	-1,21	0,153	-	4,4
P-9	2,21	-0,80	0,371	-	4,8
P-9	1,64	0,07	0,895	-	3,9
P-9	1,98	9,54	-	0,721	4,75
P-9	2,19	0,95	-	0,498	4,9
P-9	2,07	1,17	-	0,350	4,55
P-9	2,33	1,60	-	0,239	5,3
P-10	1,50	1,50	-	0	3,65
P-10	1,43	-1,47	0	-	3,6
P-10	1,78	-0,56	0,415	-	4,3
P-10	1,69	0,07	0,865	-	4,3
P-10	1,62	0,57	-	0,602	4,1
P-10	1,62	0,86	-	0,384	4,1
P-10	1,78	1,26	-	0,215	4,35
P-11	1,76	1,74	-	0	4,1
P-11	1,46	-1,47	0	-	3,7
P-11	1,71	-0,80	0,290	-	4,0
P-11	1,82	-0,39	0,518	-	4,4
P-11	2,05	-0,05	0,763	-	4,9
P-11	1,95	0,38	-	0,840	4,7

TABELA 1-A : Continuação

PLACA	N	n	$\frac{\sigma_p}{\sigma_m}$	$\frac{\sigma_m}{\sigma_p}$	n_{max}
P-11	1,86	0,81	-	0,491	4,5
P-11	1,99	1,37	-	0,221	4,75
P-12	2,36	2,36	-	0	4,1
P-12	1,62	-1,64	0	-	2,8
P-12	1,79	-0,75	0,369	-	3,15
P-12	2,34	-0,24	0,734	-	3,9
P-12	1,92	-0,01	0,894	-	3,4
P-12	2,42	0,49	-	0,734	4,1
P-12	2,55	1,07	-	0,453	4,5
P-13	2,34	2,44	-	0	4,4
P-13	1,73	-1,80	0	-	3,3
P-13	1,72	-0,91	0,277	-	3,25
P-13	1,84	-0,31	0,630	-	3,4
P-13	2,11	0,00	0,900	-	3,95
P-13	2,24	0,52	-	0,784	4,2
P-13	2,48	0,72	-	0,621	4,5
P-13	2,55	1,19	-	0,505	4,8
P-14	2,15	2,20	-	0	4,0
P-14	1,71	-1,69	0	-	3,05
P-14	2,08	-0,76	0,419	-	3,6
P-14	2,45	-0,28	0,716	-	4,0
P-14	2,80	0,39	-	0,838	4,8
P-14	2,99	1,13	-	0,500	5,0
P-14	2,99	1,59	-	0,339	5,1

fig. 1-B : Valores de K_t para as placas P-6 a P-8
($D/d=1,50$) TRAÇÃO PURA

Fig. 2-B : Valores de K_t para as placas P-9 a P-11
($D/d=1,25$) TRAÇÃO PURA

fig. 5-B : Valores de K_t para as placas P-9 a P-11
($D/d=1,25$) FLEXÃO PURA

fig. 6-B : Valores de K_t para as placas P-12 a P-14
($D/d=1,10$) FLEXÃO PURA

fig. 3-B : Valores de K_t para as placas P-12 a P-14
($D/d=1.10$) TRAÇÃO PURA

fig. 4-B : Valores de K_t para as placas P-6 a P-8
($D/d=1.50$) FLEXÃO PURA

APENDICE C

fig. 1-C : Valor de η_y , eixo M-1, flexão pura

fig. 2-C : Valor de η_y , eixo M-1, flexão pura

fig. 3-C : Valor de n_x , e, eixo T-0, torção pura

fig. 4-C :

Valor de n_x , eixo T-0,
torção pura

fig. 5-C : Valor de $\eta_{x'e}$, eixo T-1, torção pura

fig. 6-C : Valor de η_x , eixo T-1, torção pura

fig. 7-C : Valor de n_{ye} , eixo MT-3

fig. 8-C : Valor de n_{xe} , eixo MT-3

fig. 9-C : Valores de n_y e n_x , eixo MT-3

fig. 10-C : Valor de n_{ye} , eixo MT-4

fig. 11-C : Valor de n_x , eixo MT-4

fig. 12-C : Valores de n_y e n_x , eixo MT-4

fig. 13-C : Valor de n_{ye} , eixo MT-5

fig. 14-C : Valor de n_{xe} , eixo MT-5

fig. 15-C : Valor de n_y , eixo MT-5

fig. 16-C : Valor de n_x , eixo MT-5

fig. 17-C : Valor de n_{ye} , eixo MT-6

fig. 18-C : Valor de n_{xe} , eixo MT-6

fig. 19-C : Valores de n_y e n_x , eixo MT-6

fig. 20-C : Valor de n_{ye} , eixo MT-7

fig. 21-C : Valor de $n_{x,e}$, eixo MT-7

fig. 22-C : Valor de n_y e $n_{x,e}$, eixo MT-7

fig. 23-C : Valor de n_x ,
eixo M-1

fig. 24-C : Valor de n_x ,
eixo MT-8

fig. 25-C : Valor de n_y , eixo MT-8

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - Gomide, H.A. - "Desenvolvimento de um material para Fotoelasticidade Tridimensional"; Tese de Mestrado, PUC/RJ, (1972).
- 2 - Neuber, H. and Hahn, H.G., "Stress Concentration in Scientific Research and Engineering", AMR, V 1,9, n3, 187, (1966).
- 3 - Peterson R. E., "Stress Concentration Design Factors", John Wiley and Sons, Inc., New York, (1953).
- 4 - Peterson, R.E., "Stress Concentration Factors", Wiley-Interscience, (1974).
- 5 - Neuber, H., "Theory of Notch Stressess", J. W. Edwards Co., Ann Arbor Mich., (1946).
- 6 - Fessler, H., Rogers, C.C., and Stanley, P., "Stresses at end-milled keyways in plain shafts subjected to tension, bending, and torsion", J. Strain Analysis, v 4, n3, 180, (1969).
- 7 - Fessler, H., Rogers, C.C., and Stanley, P., "Stresses at keyway ends near shoulders", J. Strain Analysis, v 4, n4, 267, (1969).
- 8 - Rylander, H.G., da Rocha, P.M.A., Kreisle, L.F., and Vaughn, G.J., "Stress concentration factors in shouldered shafts subjected to combinations of flexure and torsion", J. Eng. Industry, 301, may, (1968).
- 9 - Flynn, P.D., and Roll, A.A., "A re-examination of stresses in a tension bar with symmetrical U-shaped grooves", Exp. Mech., 94, february, (1966).

- 10 - Flynn, P.D., and Roll, A.A., "A comparison of stress concentration factors in hyperbolic and U - shaped grooves", Exp. Mech., 272, june, (1967).
- 11 - Wilson, I.H., and White, D.J., "Stress-concentration factors for shoulder fillets and grooves in plates", J. Strain Analysis, v8, n1, 43, (1973).
- 12 - Photolastic Inc, USA, "Instructions for making photoelastic models for 2 and 3 - Dimensional studies", bulletin IB-P-330.
- 13 - Odilson, C.F., "Uma contribuição ao estudo das tensões na raiz de dentes de engrenagens - Determinação da influência do raio do filete utilizando a técnica fotoelástica", Tese de Mestrado, E.E.S.C., (1971).
- 14 - Vilchez, C.M.M., "Distribuição de tensões próximo das extremidades de dois cilindros montados com interferência", Tese de Mestrado, PUC/RJ, (1972).
- 15 - Knijnik, A., Estudo da concentração de tensões introduzida por dois furos não centrais em discos cônicos sob rotação usando o método fotoelástico tridimensional", Tese de Mestrado, PUC/RJ, (1973)
- 16 - Rosa, C.A., "Estudo da distribuição de tensões no colo do fêmur humano usando o método fotoelástico tridimensional", Tese de Mestrado, PUC/RJ, (1973).
- 17 - Ferreira, L.O.B.S., "Concentração de tensões provocada por um furo na parede lateral de um cilindro oco", Tese de Mestrado, PUC/RJ, (1972).
- 18 - Cernosek, J., Gomide, H.A., e Vilchez, C.M.M., "Estudo experimental sobre a concentração de tensões provocada pela Canaleta e janela de inspeção do elevador Paulo de Frontin", PUC/RJ, (1972).

- 19 - Frocht, M.M., "Photoelasticity", Vol I e II, John Wiley and Sons, Inc., (1965).
- 20 - Durelli, A.J., and Riley, W.F., "Introduction to Photoelasticity", Prentice-Hall, (1965).
- 21 - Kuske, A., and Robertson, G., "Photoelastic Stress Analysis", Wiley-Interscience, (1974).
- 22 - Leven, M.M., "Quantitative three-dimensional photoelasticity", Exp. Stress. Analysis, v12, n2, 167, (1955).
- 23 - Allison, I.M., "The elastic stress concentration factors in shouldered shafts - Part I. Shafts subjected to torsion", The Aeronautical Q., 189, May (1961).
- 24 - Allison, I.M., "The elastic stress concentration factors in shouldered shafts - Part II : shafts subjected to bending", The Aeronautical Q., 219, August (1961).
- 25 - Allison, I.M., "The elastic stress concentration factors in shouldered shafts - Part III : shafts subjected to axial load", The Aeronautical Q., 129, May, (1962).
- 26 - Baratta, F.I., and Neal, D.M., "Stress-concentration factors in U - shaped and semi-elliptical edge notches", J. Strain Analysis, v5, n2, 121, (1970).
- 27 - Leven, M.M., "Stress gradients in grooved bars and shafts", v13, n1, 207, (1955).
- 28 - Ling, C.B., "On stress concentration at semi-circular notch", J. App. Mech., 522, June, (1967).

- 29 - Ling, C.B., "On stress-concentration factor in a notched strip", J. App. Mech., 833, December, (1968)
- 30 - Appl, F.J., and Koerner, D.R., "Numerical Analysis of plane elasticity problems", Proc. Am. Soc. Civil. Eng., v94, No-EM3, 743, (1968).
- 31 - Isida, M., "On the tension of the strip with semi-circular notches", Trans-Japan Soc. Mech. Eng., v 19 5, (1953).
- 32 - Frocht, M.M., "Factors of stress concentration photo elastically determined", J. APP. Mechanics, v57, A-67, (1935).
- 33 - Baratta, F.I., "Comparison of various formulae and experimental stress-concentration factors for symmetrical U - notched plates", J. Strain Analysis , v7, n2, 84, (1972).
- 34 - Frocht, M.M., and Landsberg, D., "Factors of stress concentration in bars with deep sharp grooves and fillets in tension"; v8, 149, (1951).
- 35 - Durelli, A.J., and Jacobson, R.H., "Factors of stress concentration in bars with deep sharp grooves and fillets in tension" - Discussion", v8, 163, (1951).
- 36 - Youngdahl, C.K., and Sternberg, E., Three - dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body", J. App. Mech., 855 December, (1966).
- 37 - Cole, A.G., and Brown, A.F.C., "Photoelastic Determination of stress concentration factors caused by a single U - notch on one side of a plate in tension", J. Royal Aeronautical Soc., 597, August, (1958).

- 38 - Liebowitz, H., Vanderveldt, H., and Sanford, R.J. ,
"Stress concentrations due to sharp notches", Exp .
Mech., 513, December, (1967).
- 39 - Rubayi, N.A., and Yadava, V., "Three-dimensional photoelastic analysis in axially loaded thick plate with hole", J. Strain Analysis, v8, n3, 220, (1973).
- 40 - Peterson, R.E., "Application of stress concentration factors in design", Exp. Stress Analysis, v1, n1, 118, (1943).
- 41 - Peterson, R.E., "Two-and Three-dimensional cases of stress concentration, and comparison with fatigue tests-Discussion, author's closure", J. App. Mech. , v58, A-149, (1936).
- 42 - Peterson, R.E., and Wahl', A.M., "Two - and three - dimensional cases of stress concentration, and comparison with fatigue tests". J. App. Mech., v57, A-15, (1936).
- 43 - Allison, I.M., "The prediction of three-dimensional, stress concentration factors", J. Royal Aeronautical. Soc., v63, 549, September, (1959).
- 44 - Cheng, Y.F., "Stress at notch root of shafts under axially symmetric loading", Exp. Mech., 536, December (1970).
- 45 - Rushton, K.R., "Stress concentrations arising in the torsion of grooved shafts", J. Mech. Sci, v9, 697 , (1967).
- 46 - Mathews, G.J., and Hooke, C.J., "Solution of axisymmetric torsion problems by point matching", J. Strain Analysis, v6, n2, 124, (1971).

- 47 - Hamada, M., and Kitagawa, H., "Elastic torsion of circumferentially grooved shafts", Bull - Japan Soc., Mech. Eng., v11, 605, (1968).
- 48 - Ōkubo, H., "Approximate approach for torsion problem of a shaft with a circumferential notch", J. App. Mech., 16, March, (1952).
- 49 - Ōkubo, H., "Determination of the surface stress by means of electroplating", J. App. Physics, v24, n 9 September, (1953).