EXPANSÕES ASSINTÓTICAS APLICADAS À CONVECÇÃO FORÇADA
EM UMA CUNHA INFINITA IMERSA NUM ESCOAMENTO COM
VORTICIDADE CONSTANTE E BAIXA VISCOSIDADE

por

Sidney Stuckenbruck

Julho de 1969

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

EXPANSÕES ASSINTÓTICAS APLICADAS À CONVECÇÃO FORÇADA
EM UMA CUNHA INFINITA IMERSA NUM ESCOAMENTO COM
VORTICIDADE CONSTANTE E BAIXA VISCOSIDADE

por

Sidney Stuckenbruck

Tese submetida como requisito parcial para
a obtenção do grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

EM

ENGENHARIA MECÂNICA

Rio de Janeiro, G.B., Julho de 1969

A meus pais

AGRADECIMENTOS

Desejo primeiramente expressar meu reconhecimento ao Professor Leonidas Serejo Pinto de Abreu pela dedicação com que orientou este trabalho e, sobretudo, pela amizade e compreensão que revelou ter para comigo.

Desejo, também, agradecer o apoio e incentivo recebido do antigo Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Professor Luis Fernando Candiota.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior e ao Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico pela ajuda financeira que tornou possível a realização de meu curso de Mestrado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

À Srta. Angela Maria Silva de Jesus agradeço o trabalho de datilografia desta tese.

CONTEÚDO

	<u>Página</u>
Introdução	iv
Introduction	vii
<u>Capítulos</u>	
1 - Apresentação do Problema.....	1
2 - Aplicação do Método das Expansões Assintóticas. Acopladas e Soluções dos Problemas Externos....	3
3 - Acoplamento das Expansões Externa e Interna....	10
4 - Solução do Primeiro Problema Interno.....	14
5 - Representação em Série da Temperatura na Super- fície da Cunha.....	21
6 - Solução do Segundo Problema Interno.....	24
7 - Solução Numérica das Equações Diferenciais dos Primeiro e Segundo Problemas Internos.....	27
8 - Região de Validade dos Resultados Obtidos.....	33
9 - Resultados e Conclusões.....	38
<u>Apêndices</u>	
I -	74
II -	76
III -	81
IV -	86
V -	91
Notação	107
Bibliografia.....	112

INTRODUÇÃO

Um problema que vem suscitando grande interesse por parte de muitos autores nos últimos quinze anos é o escoamento ilimitado, permanente, bi-dimensional, com vorticidade constante, em torno de um corpo sólido. Tais estudos visam, na sua maioria, de terminar de que modo a vorticidade existente no fluido em escoamento afeta a camada limite.

O primeiro problema estudado analiticamente na literatura, para o escoamento com as características descritas acima, foi o da placa plana semi-infinita. Embora na prática o problema apareça principalmente para escoamentos compressíveis, tem sido objeto de estudo o escoamento incompressível devido a sua maior simplicidade.

Murray (1961), foi o primeiro a empregar o processo das expansões assintóticas acopladas[†] na resolução do problema da placa plana semi-infinita imersa num escoamento incompressível com vorticidade constante. Murray encontrou um gradiente de pressão no contorno da camada limite. A existência desse gradiente de pressão constitui ainda um assunto controvertido.

Van Dyke (1962a), utilizando o método das expansões assintóticas acopladas, formulou uma teoria geral, até a aproximação de segunda ordem, para o escoamento viscoso sem separação em torno de um corpo analítico semi-infinito, para altos valores do número de Reynolds. Um dos efeitos considerados foi a vorticida-

[†] Neste trabalho serão adotados como traduções de "matched" e "matching" os termos "acoplado" e "acoplamento", respectivamente.

de externa.

O escoamento incompressível com vorticidade constante em torno da placa plana semi-infinita tem sido abordado por vários outros autores tais como Ting (1960), Mark (1962, 1966), Toomre e Rott (1964), Devan (1965), etc.

Abreu (1967), estudou o problema do escoamento bi-dimensional, viscoso, incompressível, com vorticidade constante, porém aplicado ao escoamento simétrico em torno de uma cunha infinita. A escolha da cunha se deu ao fato de existir um gradiente de pressão sobre a mesma ainda que o escoamento externo seja irrotacional (o que não ocorre no caso da placa plana). Abreu (1967), usando o método das expansões assintóticas, como apresentado em Van Dyke (1962a), encontrou os mesmos resultados de Murray (1961) para o caso particular do semi-ângulo da cunha igual a zero (placa plana).

No presente trabalho o problema de Abreu (1967) é estudado para o caso em que o fluido em escoamento acha-se a uma temperatura constante e a superfície da cunha é não-isotérmica. Nessas condições surge uma camada limite térmica. Alguns resultados numéricos foram obtidos para o caso particular da superfície isotérmica (V. Capítulo 9).

O método das expansões assintóticas acopladas, como apresentado em Van Dyke (1962a), foi aplicado na resolução deste problema. Como em Van Dyke (1962a), existem quatro problemas a serem resolvidos — dois externos e dois internos. A solução destes quatro problemas nos conduz à solução assintótica do nosso problema para altos valores do número de Reynolds (V. Capítulo 2).

Para resolvermos o problema, torna-se necessário resolver o sistema composto pelas equações de Navier-Stokes, continuidade e da energia. No presente trabalho utilizamos a solução das equações de Navier-Stokes e da continuidade obtida por Abreu (1967).

Embora neste trabalho uma solução geral tenha sido encontrada para semi-ângulos da cunha entre 0° e 90° , as equações foram integradas numericamente somente para os casos particulares de semi-ângulos da cunha iguais a 0° , 18° e 72° e para valores do número de Prandtl iguais a 0,7, 1 e 10.

INTRODUCTION

A problem that has stimulated much interest in the last fifteen years concerns the unbounded, steady, two-dimensional, constant vorticity flow past a solid body. The main purpose of these studies has been to determine in which way the existent vorticity in the flow affects the boundary layer.

The first problem studied analitically in the literature, for the flow with the characteristics described above, was that of the semi-infinite flat plate. Although in practice the problem appears mainly for compressible flow, the case of incompressible flow has been chosen as object of study due to its greater simplicity.

Murray (1961) was the first to apply the method of matched asymptotic expansions to the resolution of the incompressible, constant vorticity flow past a semi-infinite flat plate. Murray obtained a pressure gradient at the edge of the boundary layer. The existence of this pressure gradient is still object of controversy.

Van Dyke (1962a), utilizing the matched asymptotics expansions method, formulated a general theory, up to second order approximation, for the viscous flow without separation about an analytic semi-infinite body for large Reynolds numbers. One of the effects considered was outer vorticity.

The incompressible flow with constant vorticity about a semi-infinite flat plate has been studied by various authors such as Ting (1960), Mark (1962, 1966), Toomre and Rott (1964), Devan (1965), etc.

Abreu (1967) studied the two-dimensional, incompressible, constant vorticity flow past an infinite wedge. The wedge was chosen so as to deal with a case for which a pressure gradient would be present even in irrotational flow (in the flat plate case, no pressure gradient exists for irrotational flow). Abreu (1967) using the matched asymptotic expansions method, as presented in Van Dyke (1962a), found the same results as Murray (1961) for the particular case of the wedge half-angle equal to zero (flat plate).

In the present work the problem solved by Abreu (1967) is studied for the case where constant temperature fluid flows past an infinite wedge with non-isothermal surface, thus giving rise to a thermal boundary layer. Some numerical results were found for the particular case of an isothermal surface (See Chapter 9).

The matched asymptotic expansions method, as presented in Van Dyke (1962a), was applied to the resolution of this problem. As in Van Dyke (1962a), there are four problems to be solved - two outer and two inner. The solution of these four problems leads to the desired asymptotic solution of our problem for large Reynolds number (See Chapter 2).

In order to solve this problem, it is necessary to solve the system formed by the Navier-Stokes, continuity and energy equations. In the present work we utilize the solution of the Navier-Stokes and continuity equations obtained by Abreu (1967).

Although in this work a general solution is found for any wedge half-angle between 0° and 90° , the equations were numerically integrated only for the particular half-angle values of 0° , 18° and 72° and for Prandtl number values of 0.7, 1 and 10.

CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Figura 1

Seja uma cunha infinita de semi-ângulo α e uma distribuição de temperatura na superfície $t_s(x')$ imersa num fluido de massa específica ρ , viscosidade μ , coeficiente de condutividade térmica k e à temperatura constante t_∞ , num escoamento ilimitado, permanente, bi-dimensional e com vorticidade constante. O fluido é considerado incompressível e possuindo baixa viscosidade. A dissipação de energia é considerada desprezível neste trabalho.

As coordenadas estão representadas na figura 1 acima.

Os problemas externos terão como coordenadas $(x', y')^{\dagger}$ e os internos $(x', y'$ ou $Y')$.

As componentes das velocidades externa e interna serão (u', v') e (U', V') , respectivamente.

A vorticidade é aqui definida como:

$$(1.1) \quad \omega'(x', y') = \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}$$

tendo um valor constante $-\omega'_0$ no semi-plano superior e ω'_0 no semi-plano inferior. Como consequência desta simetria no escoamento externo será estudado somente o semi-plano superior.

A temperatura é representada por $t(x', y')$.

O escoamento sobre uma cunha infinita não nos permite determinar a priori um comprimento e uma velocidade de referência como no caso da placa plana finita imersa num escoamento uniforme. No capítulo 8 veremos que as soluções encontradas neste trabalho devem se restringir à região próxima ao vértice da cunha devido a necessidade de convergência de várias séries encontradas. Destas restrições poderemos escolher o comprimento e a velocidade de referência apropriados a cada problema específico.

[†] Daqui por diante todas as variáveis dimensionais serão representadas com uma ('), exceto a temperatura.

CAPÍTULO 2

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS EXPANSÕES ASSINTÓTICAS ACOPLADAS

E SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS EXTERNOS

Para resolver o problema apresentado no capítulo 1 temos que resolver um sistema de quatro equações, ou sejam: as equações de Navier-Stokes, de continuidade e a equação da energia; i.e. o sistema dimensional:

$$(2.1a) \quad u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$(2.1b) \quad u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$(2.1c) \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$$(2.2) \quad u' \frac{\partial t}{\partial x'} + v' \frac{\partial t}{\partial y'} = \frac{k}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y'^2} \right)$$

As equações (2.1) foram resolvidas por Abreu (1967) e seus resultados serão utilizados na integração da equação da energia (2.2).

As equações acima são normalmente tornadas adimensionais; para isso, definimos as variáveis adimensionais:

$$x = \frac{x'}{L'} ; \quad y = \frac{y'}{L'} ; \quad u = \frac{u'}{u'_0} ; \quad v' = \frac{v'}{u'_0} ; \quad p = \frac{p'}{\rho u'^2_0} ; \quad \omega = \frac{\omega' L'}{u'_0} ; \quad T = \frac{t}{t_r}$$

onde L' , u'_0 e t_r são valores de referência apropriados para os comprimentos, velocidades e temperaturas, respectivamente.

A equação da energia (2.2) escrita em variáveis adimensionais é:

$$(2.3) \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re \, Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

onde $Re = \frac{u_o' L'}{v}$ e $Pr = \frac{\mu C}{k}$ são os números de Reynolds e Prandtl, respectivamente.

Desde Prandtl é sabido que o estudo do escoamento viscoso em torno de um corpo sólido para altos valores de Re , pode ser subdividido em duas regiões "distintas": uma externa, longe do corpo, onde o fluido pode ser considerado não viscoso e, uma interna, próxima à superfície do corpo, onde o fluido é considerado viscoso.

Ao se estudar os problemas externos veremos que a equação da energia (2.3) perde as derivadas de maior ordem e, portanto, que a mesma, quando aplicada ao escoamento externo ($Re \rightarrow \infty$), falha na região interna visto que a condição de contorno na superfície não pode ser satisfeita. Estamos, portanto, diante de um problema singular[†].

A solução do primeiro problema interno é obtida pela teoria da camada limite de Prandtl, reconhecida desde algum tempo, como a primeira aproximação de um processo sistemático de aproximações sucessivas de uma solução assintótica para altos valores do número de Reynolds.

O processo de Prandtl consiste na análise da ordem dos termos que entram na equação de Navier-Stokes na região interna.

[†] Como observa Cole (1968 - p.7 - 14), a perda de uma condição inicial ou de contorno conduz, em geral, ao aparecimento de um problema singular.

Nesta região $x = O(1)$ [†] enquanto $y = O(Re^{-1/2})$, visto que, a es pes sura da camada limite é proporcional a $Re^{-1/2}$. Um dos conceitos fundamentais das expansões assintóticas em problemas de camada limite, i.e. problemas singulares, é o do alongamento de uma variável independente [Cole (1968) e Van Dyke (1964)]. A escolha dessa variável e de como devem ser ela e as variáveis dependentes alongadas, constitui o problema crucial das expansões assintóticas acopladas.

Para escoamentos com $Re \rightarrow \infty$, a variável independente a longa da é a coordenada interna Y , definida como:

$$(2.4) \quad Y = y \sqrt{Re} = \frac{Y}{\epsilon}$$

onde ϵ é aqui definido como:

$$(2.5) \quad \epsilon = \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad Re \rightarrow \infty$$

Agora, tanto x quanto Y são de $O(1)$ na região interna.

A cada função, em cada região externa e interna, corresponde uma determinada expansão assintótica obtida através do uso de um conjunto de funções padrão (sequência assintótica) que, no estudo de escoamentos com altos valores de número de Reynolds, é formada por potências inteiras de $Re^{-1/2}$.

Admite-se existir entre as duas regiões uma zona de transição, denominada zona de superposição, em que as duas expansões são válidas, e aí devem pois, ser acopladas; o acoplamento é obtido fazendo-se com que as duas expansões concordem nessa zona.

[†] Os conceitos de ordens "O" e "o", que aparecem neste trabalho, são os mesmos definidos em Cole (1968 - Cap.1).

2.1 - OS PROBLEMAS EXTERNOS

Como expôsto em Van Dyke (1962a), de uma forma geral, a expansão assintótica adimensional para a temperatura externa é:

$$(2.6) \quad T(x, y, \epsilon) = T_1(x, y) + \epsilon T_2(x, y) + \dots$$

onde $T_1(x, y)$ e $T_2(x, y)$ são, respectivamente, as primeira e segunda aproximações para a temperatura e ϵ o parâmetro de perturbação [V. eq. (2.5)].

A forma da expansão externa (2.6) é obtida de forma análoga à seguida por Van Dyke (1964 - Cap.7) ao estudar a placa plana.

Em nosso caso, como foi especificado que a temperatura externa é constante e igual a T_∞ , conclui-se imediatamente de ... (2.6):

$$(2.7) \quad T_1(x, y) = T_\infty$$

$$(2.8) \quad T_2(x, y) = 0$$

e, portanto, estas constituem as soluções dos primeiro e segundo problemas externos, respectivamente.

De uma forma geral, os primeiro e segundo problemas externos são obtidos levando-se a expansão (2.6) na equação da energia (2.3), de onde obtemos (V. Apêndice I):

2.1.1 - O Primeiro Problema Externo

$$(2.9) \quad u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0$$

$$T_1(x, y) = T_\infty \quad (y\sqrt{Re} \rightarrow \infty)$$

2.1.2 - O Segundo Problema Externo

$$(2.10) \quad u_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_2}{\partial y} + u_2 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0$$

$$T_2(x, y) = 0 \quad (y\sqrt{Re} \rightarrow \infty)$$

Tanto em (2.9) quanto em (2.10) a viscosidade não tem influência. O escoamento fora da camada limite é não-viscoso, pelo menos até a aproximação de segunda ordem.

2.2 - OS PROBLEMAS INTERNOS

Anteriormente vimos que a ordenada Y na região interna é alongada e definida como $Y = y \sqrt{Re}$. Nesta região, as expansões assintóticas para as componentes da velocidade e para a temperatura são [Van Dyke (1962a)]:

$$(2.11) \quad u(x, Y, \epsilon) = U_1(x, Y) + \epsilon U_2(x, Y) + \dots$$

$$(2.12) \quad v(x, Y, \epsilon) = \epsilon V_1(x, Y) + \epsilon^2 V_2(x, Y) + \dots$$

$$(2.13) \quad T(x, Y, \epsilon) = T_1(x, Y) + \epsilon T_2(x, Y) + \dots$$

As formas das expansões internas para as velocidades u e v são bastante conhecidas; a da temperatura, representada acima, poderá ser obtida sem dificuldade seguindo-se a mesma lógica que em Van Dyke (1964 - Cap.7).

Tendo em vista a variável interna Y , a equação da energia (2.3) na região interna será:

$$(2.14) \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{dY}{dy} = \frac{1}{Re \, Pr} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \left(\frac{dY}{dy} \right)^2 \right]$$

levando as expansões (2.11), (2.12) e (2.13) em (2.14) teremos:

$$\begin{aligned} & (U_1 + \varepsilon U_2 + \dots) \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial T_2}{\partial x} + \dots \right) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots) \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial T_2}{\partial y} + \dots \right) = \\ & = \frac{1}{Re \, Pr} \left[\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \dots \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (2.15a) \quad & U_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + \varepsilon (U_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} + U_2 \frac{\partial T_1}{\partial x}) + V_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} + \\ & + \varepsilon (V_1 \frac{\partial T_2}{\partial y} + V_2 \frac{\partial T_1}{\partial y}) + O(\varepsilon^2) = \\ & = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon}{Pr} \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

e a condição de contorno no corpo:

$$(2.15b) \quad T_1(x, 0) + \varepsilon T_2(x, 0) + \dots = T_s(x)$$

Igualando-se os fatores de expoentes iguais de ε em ambos os membros de (2.15) teremos:

2.2.1 - O Primeiro Problema Interno

$$(2.16) \quad U_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}$$

$$T_1(x, 0) = T_s(x)$$

2.2.2 - O Segundo Problema Interno

$$(2.17) \quad U_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} + V_1 \frac{\partial T_2}{\partial y} + U_2 \frac{\partial T_1}{\partial x} + V_2 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}$$

$$T_2(x, 0) = 0$$

Não se deve esquecer que, em geral, a condição de contorno longe do corpo não é satisfeita pela expansão interna. Tal condição será obtida formalmente (V. Capítulo 3) pelo princípio de acoplamento das expansões externa e interna.

CAPÍTULO 3

ACOPLAMENTO DAS EXPANSÕES INTERNA E EXTERNA

Neste trabalho foi adotado um método de resolução para problemas de perturbação singular. Este método, denominado método das expansões assintóticas acopladas, tem sido empregado em inúmeros problemas de matemática aplicada, especialmente na última década. Embora não esteja ainda bem compreendido matematicamente, resultados práticos têm sido obtidos com sucesso.

O método baseia-se na suposição da existência de uma região na qual as duas expansões, interna e externa, são válidas - região de superposição - e na qual as expansões estão em concordância.

O princípio do acoplamento é [Van Dyke (1964)]:

"A expansão interna até o termo de ordem i da expansão externa até o termo de ordem e deve ser igual à expansão externa até o termo de ordem e da expansão interna até o termo de ordem i ".

Aqui e e i podem ser dois números inteiros, iguais ou não, sendo em geral: $i = e$ ou $i = e-1$. Por definição, a expansão interna até o termo de ordem i da expansão externa até o termo de ordem e é obtida reescrevendo-se a expansão externa em variáveis internas, expandindo assintoticamente para pequenos valores de ϵ , e truncando o resultado até o termo de ordem i ; e vice-versa para a segunda parte do princípio acima.

Ao deduzirmos as condições de acoplamento obteremos as condições de contorno que faltam para os dois problemas internos.

Adotaremos no acoplamento as seguintes abreviações:

- E.E = Expansão Externa
 E.I = Expansão Interna
 R.V.E = Reescrito em Variáveis Externas
 R.V.I = Reescrito em Variáveis Internas
 E.ε.P = Expandido para valores de ε Pequenos ($Re \rightarrow \infty$)
 (em série de Taylor)
 Termo - j = Expansão até o termo de ordem j

Como tem sido empregado até aqui, as letras minúsculas correspondem às variáveis externas e as maiúsculas às internas (exceto para a temperatura).

1) Caso de $i=1, e=1$

$$\begin{array}{llll}
 \text{Termo - 1} & \text{E.E} & : & T_1(x, y) \\
 & \text{R.V.I} & & T_1(x, \epsilon Y) \\
 & \text{E.}\epsilon\text{.P} & & T_1(x, 0) + \epsilon Y \frac{\partial T_1}{\partial Y}(x, 0) + \dots \\
 (3.1) & \text{Termo - 1} & \text{E.I} & T_1(x, 0)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{Termo - 1} & \text{E.I} & : & T_1(x, Y) \\
 & \text{R.V.E} & & T_1(x, \frac{Y}{\epsilon}) \\
 & \text{E.}\epsilon\text{.P} & & T_1(x, \infty) + \dots \\
 (3.2) & \text{Termo - 1} & \text{E.E} & T_1(x, \infty) \\
 & \text{R.V.I} & & T_1(x, \infty)
 \end{array}$$

A condição de acoplamento exige a igualdade de (3.1) e (3.2), i.e.

$$(3.3) \quad T_1(x, \infty) = T_1(x, 0)$$

Esta é a clássica condição de que no contorno externo da camada limite térmica a temperatura se aproxima da temperatura do escoamento não viscoso. Em nosso caso, a temperatura é T_∞ e a segunda

condição de contorno para o primeiro problema interno (2.16) torna-se:

$$(3.4) \quad T_1(x, Y) = T_\infty \quad (Y \rightarrow \infty)$$

Prosseguindo a ordem de acoplamento [Van Dyke (1964) - Cap. 5] deveríamos ter agora o acoplamento com $i=1, e=2$ (expansão interna com um termo e a externa com dois) e que nos levaria, neste caso, à mesma condição (3.3).

2) Caso de $i=2, e=2$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Têrmo - 2 E.E} & : T_1(x, Y) + \varepsilon T_2(x, Y) \\
 \text{R.V.I} & T_1(x, \varepsilon Y) + \varepsilon T_2(x, \varepsilon Y) \\
 \text{E.}\varepsilon\text{.P} & T_1(x, 0) + \varepsilon Y \frac{\partial T_1}{\partial Y}(x, 0) + \dots + \varepsilon T_2(x, 0) + \dots \\
 (3.5) \text{ Têrmo - 2 E.I} & T_1(x, 0) + \varepsilon \left[Y \frac{\partial T_1}{\partial Y}(x, 0) + T_2(x, 0) \right] \\
 \\
 \text{Têrmo - 2 E.I} & : T_1(x, Y) + \varepsilon T_2(x, Y) \\
 \text{R.V.E} & T_1(x, \frac{Y}{\varepsilon}) + \varepsilon T_2(x, \frac{Y}{\varepsilon}) \\
 \text{E.}\varepsilon\text{.P} & T_1(x, \infty) + \dots + \varepsilon [T_2(x, \infty) + \dots] + \dots \\
 \text{Têrmo - 2 E.E} & T_1(x, \infty) + \varepsilon T_2(x, \infty) \\
 (3.6) \text{ R.V.I} & T_1(x, \infty) + \varepsilon T_2(x, \infty)
 \end{array}$$

A condição de acoplamento exige a igualdade de (3.5) e (3.6) que, tendo em vista (3.3), será:

$$(3.7) \quad T_2(x, \infty) = Y \frac{\partial T_1}{\partial Y}(x, 0) + T_2(x, 0)$$

Como em nosso caso $T_1(x,y) = T_\infty$ e $T_2(x,y) = 0$ conclui-se de (3.7) que:

$$(3.8) \quad T_2(x,Y) = 0 \quad (Y \rightarrow \infty)$$

Esta é portanto a segunda condição de contorno do segundo problema interno.

CAPÍTULO 4

SOLUÇÃO DO PRIMEIRO PROBLEMA INTERNO

O primeiro problema interno adimensional, de acordo com as equações (2.16) e (3.4), é:

$$(4.1) \quad \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_1}{\partial Y^2} - U_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - V_1 \frac{\partial T_1}{\partial Y} = 0$$

$$T_1(x, 0) = T_s(x)$$

$$T_1(x, Y) = T_\infty \quad (Y \rightarrow \infty)$$

Este, identifica-se com o clássico problema da camada limite térmica obtido seguindo-se a teoria de Prandtl da camada limite [Gebhart (1961) - Cap. 7]. E, portanto, justifica a afirmação de que a teoria de Prandtl é reconhecida como a primeira aproximação de uma expansão assintótica para altos valores do número de Reynolds. É fácil de se constatar que a solução de (4.1) depende da solução do clássico problema da camada limite de velocidade [Abreu (1967) - Cap. 6, equações (44) e (45)]:

$$(4.2) \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial Y^2} = u_1(x) \frac{du_1(x)}{dx} + \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial Y^3}$$

$$\phi_1 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} = 0 \quad \text{em} \quad Y = 0$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial Y} = u_1(x) \quad (Y \rightarrow \infty)$$

onde ϕ_1 é a função de corrente interna de ordem um e definida de tal forma que:

$$(4.3) \quad U_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} \quad e \quad V_1 = - \frac{\partial \phi_1}{\partial X}$$

$u_1(x)$ é a velocidade na superfície da cunha obtida do primeiro problema externo para o escoamento [Abreu (1967), eq. (46)]:

$$(4.4) \quad u_1(x) = ax^m + bx$$

onde a é obtido especificando-se o valor da velocidade a uma determinada distância a montante do vértice da cunha; b e m são dados por:

$$(4.4a) \quad b = \frac{\omega_0}{2} \operatorname{tg} \alpha \quad e \quad m = \frac{\alpha}{\pi - \alpha}$$

Soluções analíticas exatas para as equações (4.1) e ... (4.2) são conhecidas para alguns poucos casos particulares, especialmente para o caso em que a camada limite é similar; não é este o nosso caso tendo em vista a expressão da velocidade na cunha (4.4) - Schlichting (1960 - Cap.8) e Evans (1968 - Cap.3).

Alguns autores, dentre eles Görtler (1957) e Merk (1959), têm procurado desenvolver um método de análise da camada limite que possa ser aplicado em camadas limite não-similares.

Neste trabalho foi escolhido o método de Görtler para resolver a equação (4.1) pois, de acordo com Ames (1965) página 296, as séries de Görtler [Görtler (1957)] são "uma generalização de todas as expansões previamente conhecidas e suas séries são consideradas como a última palavra nesta área".

As variáveis de Görtler são:

$$(4.5) \quad \xi = \int_0^x u_1(x) dx$$

$$(4.6) \quad \eta = \frac{u_1(x)Y}{\left[2 \int_0^x u_1(x) dx\right]^{1/2}} = \frac{u_1(x)Y}{\sqrt{2\xi}}$$

$$(4.7) \quad F(\xi, \eta) = \frac{\phi_1(x, Y)}{\left[2 \int_0^x u_1(x) dx\right]^{1/2}} = \frac{\phi_1(x, Y)}{\sqrt{2\xi}}$$

$$(4.8) \quad \beta(\xi) = \frac{2 \frac{d}{dx} \left[u_1(x) \right] \int_0^x u_1(x) dx}{u_1^2(x)}$$

onde $u_1(x)$ é dado por (4.4), $F(\xi, \eta)$ é a nova função de corrente e $\beta(\xi)$ é a "função principal" de Görtler.

Para resolver a equação (4.2) Abreu (1967) determinou novas séries de Görtler tendo em vista a forma da equação (4.4), para as quais obteve:

1) Para $\beta(\xi)$

$$(4.9) \quad \beta(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \beta_2 \xi^{2\frac{1-m}{1+m}} + \dots$$

onde

$$(4.10) \quad \beta_0 = \frac{2m}{1+m}$$

$$(4.11) \quad \beta_1 = \frac{b}{a} \left(\frac{2}{1+m} + m - 2\beta_0 \right) \left(\frac{1+m}{a} \right)^{\frac{1-m}{1+m}}$$

.....

2) Para $F(\xi, \eta)$

$$(4.12) \quad F(\xi, \eta) = F_0(\eta) + F_1(\eta) \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + F_2(\eta) \xi^{2\frac{1-m}{1+m}} + \dots$$

onde $F_0(\eta)$, $F_1(\eta)$, ... são soluções das equações diferenciais:

$$(4.13) \quad F_0''' + F_0 F_0'' + \beta_0 (1 - F_0'^2) = 0$$

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0 \quad \text{e} \quad F_0'(\eta) = 1 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$(4.14a) \quad f_1''' + F_0 f_1'' - 2\left(\beta_0 + \frac{1-m}{1+m}\right) F_0' f_1' + \left(2 \frac{1-m}{1+m} + 1\right) F_0'' f_1 = (F_0'^2 - 1)$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = 0 \quad \text{e} \quad f_1'(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

com

$$(4.14b) \quad f_1 = \frac{F_1}{\beta_1}$$

.....

Sparrow (1958a,b) aplica a equação da energia (4.1) as mesmas variáveis de Görtler, equações (4.5) a (4.8), definindo ainda a temperatura adimensional:

$$(4.15) \quad \theta(\xi, \eta) = \frac{T_1 - T_\infty}{T_s(x) - T_\infty} = \frac{T_1 - T_\infty}{\Delta T_s(x)}$$

obtendo para a equação da energia (V. Apêndice II):

$$(4.16) \quad \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \left[F + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right] \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 2\xi \left[\theta \lambda(\xi) + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

$$\theta(\xi, 0) = 1$$

$$\theta(\xi, \eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

onde

$$(4.17) \quad \lambda(\xi) = \frac{\frac{d}{dx} [T_s(x)]}{\Delta T_s(x) u_1(x)}$$

é chamada por Sparrow de "função principal térmica", que surge na equação da energia de modo análogo ao aparecimento de $\beta(\xi)$ na equação da camada limite escrita em variáveis de Görtler.

Agora, o problema é descobrir séries apropriadas para $\lambda(\xi)$ e $\theta(\xi, \eta)$ tendo em vista a forma das séries (4.9) e (4.12), encontradas por Abreu (1967), que satisfaçam a equação (4.16).

As séries encontradas foram:

1) Para $\lambda(\xi)$

$$(4.18) \quad \lambda(\xi) = \lambda_0 \xi^{\frac{1-m}{1+m} - 1} + \lambda_1 \xi^{2\frac{1-m}{1+m} - 1} + \lambda_2 \xi^{3\frac{1-m}{1+m} - 1} + \dots$$

2) Para $\theta(\xi, \eta)$

$$(4.19) \quad \theta(\xi, \eta) = \theta_0(\eta) + \theta_1(\eta) \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \theta_2(\eta) \xi^{2\frac{1-m}{1+m}} + \theta_3(\eta) \xi^{3\frac{1-m}{1+m}} + \dots$$

Como vemos, a série encontrada para a temperatura $\theta(\xi, \eta)$ é a mesma obtida por Abreu (1967) para a função de corrente ... $F(\xi, \eta)$, tendo como única diferença os fatores $\theta_i(\eta)$ em lugar de $F_i(\eta)$ ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$). Aquêles como êstes são soluções de equações diferenciais ordinárias.

Das equações (4.17) e (4.18) podemos concluir que os coeficientes λ_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$) que aparecem em (4.18) estão relacionados com a distribuição da temperatura na superfície da cunha. Para uma dada distribuição de temperatura, λ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) possui valores determinados do mesmo modo que, para um dado ângulo e tipo de escoamento β_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) é constante.

Ao substituírmos (4.12), (4.18) e (4.19) em (4.16) obtemos a seguinte série de equações para θ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) (V. Apêndice III):

$$(4.20) \quad \frac{1}{Pr} \theta_0'' + F_0 \theta_0' = 0$$

$$\theta_0(0) = 1 \quad \text{e} \quad \theta_0(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$(4.21) \quad \frac{1}{Pr} \theta_1'' + F_0 \theta_1' - 2\gamma F_0' \theta_1 = -(2\gamma+1)F_1 \theta_0' + 2\lambda_0 F_0' \theta_0$$

$$\theta_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad \theta_1(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$(4.22) \quad \frac{1}{Pr} \theta_2'' + F_0 \theta_2' - 4\gamma F_0' \theta_2 = 2\gamma F_1' \theta_1 - (2\gamma+1)F_1 \theta_1' - \\ - (4\gamma+1)F_2 \theta_0' + 2\lambda_0 (F_1' \theta_0 + F_0' \theta_1) + 2\lambda_1 F_1' \theta_0$$

$$\theta_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad \theta_2(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$(4.23) \quad \frac{1}{Pr} \theta_3'' + F_0 \theta_3' - 6\gamma F_0' \theta_3 = 4\gamma F_1' \theta_2 - (2\gamma+1)F_1 \theta_2' + 2\gamma F_2' \theta_1 - \\ - (4\gamma+1)F_2 \theta_1' - (6\gamma+1)F_3 \theta_0' + 2\lambda_0 (F_2' \theta_0 + F_1' \theta_1 + F_0' \theta_2) + \\ + 2\lambda_1 (F_1' \theta_0 + F_0' \theta_1) + 2\lambda_2 F_0' \lambda_0$$

$$\theta_3(0) = 0 \quad \text{e} \quad \theta_3(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

etc. onde as (') significam derivadas em relação a η e γ é aqui definido como:

$$(4.24) \quad \gamma = \frac{1-m}{1+m}$$

Para o caso em que a diferença entre a temperatura da superfície do corpo e a do fluido é constante a equação (4.20) é reconhecida como a equação da energia para escoamentos similares,

da mesma forma que, em Abreu (1967), a primeira equação obtida foi a de Falkner-Skan [eq.(4.13)] (equação para camada limite de velocidade similar). Em Eckert & Drake (1959 - Cap.7) soluções de (4.20) são apresentadas em gráficos para diversos valores de Pr e β_0 (para o caso em que a distribuição de temperatura na superfície da cunha é a descrita acima).

As equações diferenciais acima e as obtidas por Sparrow (1958b) são muito parecidas; para o caso em que $\gamma = 1$ elas se tornam iguais.

A grande vantagem do método de Görtler (1957) é que o primeiro termo da série, sozinho, satisfaz a condição de contorno externa e, portanto, os outros termos introduzem correções somente na parte interna da camada limite; como consequência, o primeiro termo sozinho nos dá uma aproximação muito boa. Além disso, como nos restringimos à região próxima ao vértice da cunha ($\xi < 1$), a série (4.19) converge rapidamente; conseqüentemente é de se esperar que os dois primeiros termos de (4.19) nos dêem para $\theta(\xi, n)$ valores bastante precisos.

As equações de $\theta_0(n)$ e $\theta_1(n)$ foram integradas numericamente pelo autor para valores de β_0 iguais a 0, 0,2 e 0,8 e para Pr igual a 0,7, 1 e 10, utilizando o computador IBM-7044 do Rio Data-Centro da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O método de integração está descrito no capítulo 7 e os resultados estão apresentados nas tabelas 2 a 9 das páginas 54 a 69 [sendo θ_1 dado pela equação (7.12)].

CAPÍTULO 5

REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE DA TEMPERATURA NA

SUPERFÍCIE DA CUNHA

Ao escrevermos a equação da energia em variáveis de Görtler surgiu uma nova função $\lambda(\xi)$ dada pela expressão [V. equação (4.16)]:

$$(4.17) \quad \lambda(\xi) = \frac{\frac{d}{dx} [T_s(x)]}{\Delta T_s(x) u_1(x)}$$

denominada "função principal térmica".

Por outro lado encontramos em (4.18) para $\lambda(\xi)$ a série:

$$(4.18) \quad \lambda(\xi) = \lambda_0 \xi^{\frac{1-m}{1+m} - 1} + \lambda_1 \xi^{2\frac{1-m}{1+m} - 1} + \lambda_2 \xi^{3\frac{1-m}{1+m} - 1} + \dots$$

logo de (4.17) e (4.18) obtemos:

$$(5.1) \quad \frac{\frac{d}{dx} [T_s(x)]}{\Delta T_s(x) u_1(x)} = \lambda_0 \xi^{\frac{1-m}{1+m} - 1} + \lambda_1 \xi^{2\frac{1-m}{1+m} - 1} + \lambda_2 \xi^{3\frac{1-m}{1+m} - 1} + \dots$$

A equação (5.1) mostra que a distribuição de temperatura na superfície da cunha é representada por uma série cuja existência é devida ao emprego do método de Görtler na equação da energia para a camada limite.

Levando (4.4) e (4.5) em (5.1) e integrando, obtemos para a temperatura na superfície da cunha (V. Apêndice IV):

$$(5.2) \quad \frac{T_s(x) - T_\infty}{T_s(0) - T_\infty} = 1 + \tau_1 x^{1-m} + \tau_2 x^{2(1-m)} + \tau_3 x^{3(1-m)} + \dots$$

com

$$(5.3) \quad \tau_1 = \lambda_0 \left(\frac{1+m}{1-m}\right) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}}$$

$$(5.4) \quad \tau_2 = \frac{\lambda_0}{2} \frac{b}{a} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} + \left[\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_0^2 \left(\frac{1+m}{1-m}\right) \right] \left(\frac{1+m}{1-m}\right) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{2\frac{1-m}{1+m}}$$

.....

de onde obtemos:

$$(5.5) \quad \lambda_0 = \left(\frac{1-m}{1+m}\right) \left(\frac{1+m}{a}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} \tau_1$$

$$(5.6) \quad \lambda_1 = 2 \left\{ \tau_2 - \frac{\lambda_0}{2} \frac{b}{a} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} \right\} \left(\frac{1-m}{1+m}\right) \left(\frac{1+m}{a}\right)^{2\frac{1-m}{1+m}} - \lambda_0^2 \left(\frac{1+m}{1-m}\right) \}$$

.....

Para uma dada distribuição de temperatura $T_s(x)$, obtemos através da série (5.2) os valores de τ_i ($i=1,2,3,\dots$). Com esses valores, pelas equações (5.5), (5.6) ..., obtemos os valores de λ_i ($i=0,1,2,\dots$) que aparecem nas equações diferenciais de θ_i ($i=1,2,3,\dots$) - equações (4.21), (4.22), (4.23), etc.

De um modo geral, qualquer distribuição de temperatura na superfície da cunha poderá ser representada pela série (5.2), bastando para isso, usarmos tantos termos da série quantos forem necessários a fim de obtermos a distribuição desejada com a devida precisão. Todavia na prática a solução do problema só será viável se a temperatura na cunha for constante ($T_s(x) = T_0$) i.e. $\tau_i = 0$ ($i=1,2,3,\dots$), ou até mesmo quando a distribuição de temperatura for dada pelos dois primeiros termos da série (5.2), i.e.

$\tau_i = 0$ ($i = 2, 3, 4, \dots$), visto que, para êsses casos, os dois primeiros termos da série de $\theta(\xi, \eta)$ poderão representar com boa precisão a temperatura na camada limite. Caso contrário, a temperatura terá que ser representada por um maior número de termos de $\theta(\xi, \eta)$, o que exigirá a solução de equações diferenciais progressivamente mais complicadas [Veq.(4.18) e (4.19)].

No capítulo 9, e nas figuras 2 a 8 das páginas 47 a 53, são apresentadas resultados para diversas funções relacionadas à temperatura, supondo-se a cunha a uma temperatura constante e igual a T_0 .

CAPÍTULO 6

SOLUÇÃO DO SEGUNDO PROBLEMA INTERNO

O segundo problema interno nos fornece uma correção de segunda ordem $[O(R^{-1/2})]$ ao problema da camada limite.

O problema com a segunda condição de contorno (3.8) é dado pela equação (2.17), i.e.

$$(6.1) \quad \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_2}{\partial Y^2} - U_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} - V_1 \frac{\partial T_2}{\partial Y} = U_2 \frac{\partial T_1}{\partial x} + V_2 \frac{\partial T_1}{\partial Y}$$

$$T_2(x, 0) = 0$$

$$T_2(x, Y) = 0 \quad (Y \rightarrow \infty)$$

Como observamos, as componentes da velocidade de segunda ordem, respectivamente U_2 e V_2 , aparecem na equação acima e portanto a nossa solução depende, também, da solução do segundo problema interno da camada limite de velocidade. Abreu (1967) encontrou para a função de corrente de segunda ordem a série:

$$(6.2) \quad \phi_2(x, \eta) = \omega_0 \eta^2 \frac{\xi}{-u_1^2(x)} + H_1(\eta) x^{1-m} + H_2(\eta) x^{2(1-m)} + \dots$$

de onde poderemos obter U_2 e V_2 através das equações:

$$(6.2a) \quad U_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial Y} \quad \text{e} \quad V_2 = - \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

A equação diferencial obtida por Abreu (1967) para $H_1(\eta)$ foi [V. Abreu (1967) - Cap.9]:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} H_1''' + F_0 H_1'' - F_0' H_1' + 2 \frac{1-m}{1+m} F_0'' H_1 = \\ = - \left(\frac{a}{1+m} \right) \frac{\omega_0}{a} \left[F_0 - \eta F_0' + \frac{1-m}{1+m} \eta^2 F_0'' \right] + \\ + \left[\frac{2}{a(1+m)} \right]^{3/2} \left[\omega_0 E_0 - m a G_1 - a(\lambda_1 - 1) G_1 \right] \end{aligned}$$

$$H_1(0) = H_1'(0) = 0$$

$$H_1'(\eta) = \left[\frac{2}{a(1+m)} \right]^{1/2} G_1 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

onde λ_1 , E_0 e G_1 são constantes que aparecem na solução do segundo problema externo para a velocidade.

Com as formas conhecidas para $T_1(\xi, \eta)$, $\phi_1(\xi, \eta)$ e $\phi_2(\xi, \eta)$ foi encontrada para $T_2(x, \eta)$ a série:

$$(6.4) \quad T_2(x, \eta) = G_1(\eta) x^{\frac{3}{2}(1-m)-1} + G_2(\eta) x^{\frac{5}{2}(1-m)-1} + \dots$$

ou

$$(6.5) \quad T_2(x, \eta) = \frac{1}{x} \left[G_1(\eta) x^{\frac{3}{2}(1-m)} + G_2(\eta) x^{\frac{5}{2}(1-m)} + \dots \right]$$

Levando em (6.1) as séries obtidas para U_1 , V_1 , U_2 e V_2 e as séries para T_1 [de (4.15), (4.19) e (5.2)] e para T_2 [de (6.5)] obtemos a seguinte equação diferencial para $G_1(\eta)$ com as respectivas condições de contorno (V. Apêndice V):

$$(6.6) \quad \frac{1}{Pr} G_1'' + F_0 G_1' - \frac{1-3m}{1+m} F_0' G_1 =$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{a} \left(\frac{1-m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \left[\frac{\omega_0}{a} \eta^2 + (1+m) H_1 \right] \theta_0'$$

$$G_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad G_1(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

A vorticidade ω_0 aparece nesta equação de forma explícita o que não ocorre no primeiro problema interno, onde a mesma só aparece indiretamente, através de b , na equação de $u_1(x)$ [V. equação (4.4a)].

A equação (6.6) foi integrada numericamente para valores de β_0 iguais a 0 e 0,2 para Pr igual a 0,7, 1 e 10 e para $\omega_0 = 1$.

O método de integração está descrito no capítulo seguinte e os resultados encontram-se nas tabelas 10 e 11 das páginas 70 à 73.

CAPÍTULO 7

SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DOS PRIMEIRO E SEGUNDO PROBLEMAS INTERNOS

O método de Runge-Kutta foi escolhido para integração numérica das equações diferenciais dos problemas internos.

Tendo em vista que os nossos problemas são de contorno e que o método numérico de integração requer que o problema seja um problema de condição inicial, foi adotada a engenhosa técnica do Harvard Computation Laboratory, descrito resumidamente abaixo, a fim de transformar os problemas de contorno em problemas de condição inicial.

Seja a equação diferencial para $z(x)$ com as respectivas condições de contorno.

$$(7.1a) \quad z'' + Az' + Bz = C$$

$$(7.1b,c) \quad z(0) = z_0 \quad \text{e} \quad z(\infty) = z_\infty$$

Seja

$$(7.2) \quad z(x) = z_1(x) + z'(0)z_2(x)$$

de onde podemos concluir:

$$(7.3) \quad z(\infty) = z_1(\infty) + z'(0)z_2(\infty)$$

$$(7.4) \quad z'(0) = \frac{z(\infty) - z_1(\infty)}{z_2(\infty)} = \frac{z_\infty - z_1(\infty)}{z_2(\infty)}$$

$$(7.5) \quad z'(0) = z_1'(0) + z'(0)z_2'(0)$$

Como as funções $z_1(x)$ e $z_2(x)$ são totalmente arbitrárias, conclui-se de (7.5):

$$(7.6) \quad z_1'(0) = 0$$

$$(7.7) \quad z_2'(0) = 1$$

Levando (7.2) em (7.1a), tendo em vista (7.1b), (7.6) e (7.7), obtemos o sistema

$$(7.8) \quad \begin{aligned} z_1'' + Az_1' + Bz_1 &= C \\ z_1(0) &= z_0 \quad \text{e} \quad z_1'(0) = 0 \end{aligned}$$

e

$$(7.9) \quad \begin{aligned} z_2'' + Az_2' + Bz_2 &= 0 \\ z_2(0) &= 0 \quad \text{e} \quad z_2'(0) = 1 \end{aligned}$$

Agora, as duas equações (7.8) e (7.9) podem ser integradas numéricamente, visto que, cada uma constitui um problema de condição inicial. Os valores numéricos obtidos no infinito, $z_1(\infty)$ e $z_2(\infty)$, são levados em (7.4) de onde obteremos a segunda condição inicial $z'(0)$ que torna o problema (7.1) um problema de condição inicial, i.e.

$$(7.10) \quad \begin{aligned} z'' + Az' + Bz &= C \\ z(0) &= z_0 \\ z'(0) &= \frac{z_\infty - z_1(\infty)}{z_2(\infty)} \end{aligned}$$

O intervalo de integração utilizado foi $\Delta\eta = 0,05$.

As condições de contorno a infinito foram consideradas, em geral, satisfeitas até a terceira casa decimal (inclusive) para valores de $\eta = 5$. Para obtermos maior precisão, digamos, com a condição de contorno a infinito satisfeita até a quinta casa decimal, deveríamos estender a integração até $\eta = 10$ como é comum;

isso não foi possível por dependerem as nossas equações (exceto θ_0) dos resultados de Abreu (1967) os quais tiveram que ser truncados para aquele valor máximo de η devido a problemas surgidos com instabilidade de integração numérica. Os valores de $\theta'_0(0)$, apresentados na tabela 1 da página 32, concordam com os apresentados em Evans (1968) com erro inferior a $\pm 5.10^{-5}$.

As equações diferenciais integradas neste trabalho foram:

$$(4.20) \quad \frac{1}{Pr} \theta''_0 + F_0 \theta'_0 = 0$$

$$\theta_0(0) = 1 \quad e \quad \theta_0(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$(4.21) \quad \frac{1}{Pr} \theta''_1 + F_0 \theta'_1 - 2\gamma F'_0 \theta_1 = - (2\gamma+1) F_1 \theta'_0 + 2\lambda_0 F'_0 \theta_0$$

$$\theta_1(0) = 0 \quad e \quad \theta_1(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$(6.6) \quad \frac{1}{Pr} G''_1 + F_0 G'_1 - \frac{1-3m}{1+m} F'_0 G_1 =$$

$$= - \frac{\sqrt{2}}{a} \left(\frac{1-m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \left[\frac{\omega_0}{a} \eta^2 + (1+m) H_1 \right] \theta'_0$$

$$G_1(0) = 0 \quad e \quad G_1(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Tanto (4.20) quanto (6.6) são integráveis imediatamente para cada valor prefixado de Pr e β_0 [ω_0 também em (6.6)]. Assim, integramos (4.20) e (6.6) pelo processo de integração apresentado no início deste capítulo.

Por outro lado a equação (4.21) além de β_0 e Pr apresenta λ_0 e β_1 como parâmetros, visto que $F_1 = \beta_1 f_1$, onde f_1 é uma fun-

ção universal [V. equação (4.14)].

Adotando a sugestão de Görtler (1957), $\theta_1(\eta)$ pode ser expresso como uma combinação linear de "funções universais" no sentido de que essas funções independem da distribuição da temperatura na superfície do corpo e dependem somente de β_0 para um determinado problema.

Substituindo em (4.21) $F_1(\eta)$ por $\beta_1 f_1(\eta)$ vem:

$$(7.11) \quad \frac{1}{Pr} \theta_1'' + F_0 \theta_0' - 2\gamma F_0' \theta_1 = - (2\gamma + 1) \beta_1 f_1 \theta_0' + 2\lambda_0 F_0' \theta_0$$

$$\theta_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad \theta_1(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Definindo, como em Sparrow (1958b):

$$(7.12) \quad \theta_1(\eta) = \beta_1 B_1(\eta) + \lambda_0 L_0(\eta)$$

e levando em (7.11), teremos:

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} (\beta_1 B_1'' + \lambda_0 L_0'') + F_0 (\beta_1 B_1' + \lambda_0 L_0') - 2\gamma F_0' (\beta_1 B_1 + \lambda_0 L_0) = \\ = - (2\gamma + 1) f_1 \theta_0' \beta_1 + 2F_0' \theta_0 \lambda_0 \end{aligned}$$

$$\beta_1 B_1(0) + \lambda_0 L_0(0) = 0 \quad \text{e} \quad \beta_1 B_1(\eta) + \lambda_0 L_0(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

ou

$$(7.14) \quad \begin{aligned} \beta_1 \left[\frac{1}{Pr} B_1'' + F_0 B_1' - 2\gamma F_0' B_1 \right] + \lambda_0 \left[\frac{1}{Pr} L_0'' + F_0 L_0' - 2\gamma F_0' L_0 \right] = \\ = \beta_1 \left[- (2\gamma + 1) f_1 \theta_0' \right] + \lambda_0 \left[2F_0' \theta_0 \right] \end{aligned}$$

$$B_1(0) = L_0(0) = 0 \quad \text{e} \quad B_1(\eta) = L_0(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

ou, as duas equações diferenciais para as funções universais $B_1(\eta)$ e $L_0(\eta)$:

$$(7.15) \quad \frac{1}{Pr} B_1'' + F_0 B_1' - 2\gamma F_0' B_1 = - (2\gamma + 1) f_1 \theta_0'$$

$$B_1(0) = 0 \quad e \quad B_1(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

e

$$(7.16) \quad \frac{1}{Pr} L_0'' + F_0 L_0' - 2\gamma F_0' L_0 = 2F_0' \theta_0$$

$$L_0(0) = 0 \quad e \quad L_0(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Os valores de a e b que aparecem na equação diferencial de $G_1(\eta)$ são obtidos ao se especificar a velocidade a uma dada distância a montante do vértice da cunha [V. Abreu (1967) -Cap.5]. Assim temos:

Para $\alpha = 0^\circ$

$$(7.17) \quad a = 1 \quad e \quad b = 0$$

Para $\alpha = 18^\circ$

$$(7.18) \quad a = 0,83754 \quad e \quad b = 0,16246$$

Os resultados da integração das equações (4.20), (6.6), (7.15) e (7.16) encontram-se nas tabelas 2 a 11 das páginas 47 à 53.

A tabela - 1 abaixo apresenta os gradientes na superfície da cunha, com cinco casas decimais, de todas as funções integradas neste trabalho.

TABELA 1 - Gradientes na parede da cunha em função de β_0 e Pr.

Pr	β_0	$\theta'_0(0)$	$B'_1(0)$	$L'_0(0)$	$G'_1(0)$
0,7	0	-0,41396	-	-0,26565	-1,28600
	0,2	-0,44446	-0,12960	-0,31863	-0,94600
	0,8	-0,48732	-0,05249	-0,48050	-
1	0	-0,46961	-	-0,29780	-1,47900
	0,2	-0,50685	-0,15750	-0,35820	-1,06270
	0,8	-0,55985	-0,06504	-0,54345	-
10	0	-1,02976	-	-0,63318	-3,52680
	0,2	-1,14078	-0,46212	-0,76664	-2,31610
	0,8	-1,30448	-0,20373	-1,18116	-

CAPÍTULO 8

REGIÃO DE VALIDADE DOS RESULTADOS OBTIDOS

A solução encontrada neste trabalho para o sistema composto pelas equações de Navier-Stokes, continuidade e da energia, para o problema em estudo, está sujeita a certas restrições quanto à sua região de validade.

As restrições que aqui analisaremos são aquelas devidas exclusivamente ao método matemático utilizado neste trabalho e no trabalho de Abreu (1967) para resolver o sistema de equações acima citado (não nos referimos aqui às restrições de ordem geral, já bem conhecidas, das equações de camada limite, ao fato de desprezarmos a função dissipação na equação da energia, etc.)

Veremos a seguir que devido à necessidade de convergência de séries e desenvolvimentos binomiais que aparecem nestes trabalhos, assim como a necessidade de serem assintóticas as expansões utilizadas, a região para a qual são válidos os resultados obtidos neste trabalho fica restrita à região próxima ao vértice da cunha.

1) A convergência da série (4.19), solução do primeiro problema interno, requer:

$$(8.1) \quad \xi < 1$$

da definição de ξ em (4.5) e de (4.4) obtemos:

$$(8.2) \quad \xi = \int_0^x u_1(x) dx = \int_0^x (ax^m + bx) dx$$

ou

$$(8.3) \quad \xi = \frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2$$

logo, de (8.1) e (8.3), concluímos:

$$(8.4) \quad \frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2 < 1$$

Para um determinado problema, a , b e m são especificados [V. equações (4.4) e (4.4a)] e portanto, a nossa solução fica restrita à região em que x satisfaz a equação (8.4).

2) A convergência da série encontrada para a temperatura na superfície da cunha (5.2) e para a série (6.4), solução do segundo problema interno, requer:

$$(8.5) \quad x < 1$$

3) Na obtenção das séries e das equações diferenciais deste trabalho e do trabalho de Abreu (1967), foi utilizado muitas vezes o desenvolvimento binomial de ξ e $u_1(x)$ [V. Apêndices IV e V], para os quais impôs-se, respectivamente:

$$(8.6) \quad \left| \frac{a}{1+m} x^{1+m} \right| > \left| \frac{b}{2} x^2 \right|$$

e

$$(8.7) \quad |ax^m| > |bx|$$

de onde obtemos, respectivamente:

$$(8.8) \quad x < \left(\frac{2}{1+m} \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

$$(8.9) \quad x < \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

Como no presente trabalho $0 \leq m < 1$, conclui-se que a condição (8.9) é mais forte do que (8.8), prevalecendo pois, (8.9).

4) A convergência da série encontrada por Abreu (1967) como solução do segundo problema externo requer que o raio (adimensional) da coordenada radial (centro no vértice da cunha) seja menor do que um [V. Abreu (1967), cap.8] i.e.

$$(8.10) \quad r < 1$$

Logo, a região de validade dos resultados obtidos neste trabalho e no trabalho de Abreu (1967), jamais se estenderá à região fora do círculo de raio unitário com centro no vértice da cunha. Observe-se que a segunda condição (8.5) está contida nesta.

5) A condição de ser assintótica a expansão interna para a função de corrente [V. Abreu (1967), Cap.11], requer:

$$(8.11) \quad \frac{1}{Re} \phi_2(x, \eta) \ll \frac{1}{\sqrt{Re}} \phi_1(\xi, \eta)$$

ou, de (4.4), (4.5), (4.7), (4.12), (6.2), (8.3) e (8.11)

$$(8.12) \quad \frac{1}{\sqrt{Re}} \left[\omega_0 \eta^2 \left(\frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2 \right) / (ax^m + bx)^2 + \right. \\ \left. + H_1(\eta) x^{1-m} + \dots \right] \ll \sqrt{2} \left(\frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2 \right)^{1/2} . \\ \left[F_0(\eta) + F_1(\eta) \cdot \left(\frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2 \right)^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots \right]$$

onde $H_1(\eta)$, $F_0(\eta)$ e $F_1(\eta)$ são soluções das equações diferenciais

(6.3), (4.13) e (4.14), respectivamente, obtidas por Abreu (1967).

Para um problema específico, a , b e m são determinados. Uma vez especificada uma ordenada Y , naturalmente respeitando-se a condição (8.10), pode-se determinar, através de (8.12), a restrição à abscissa x imposta por (8.11). Evidentemente o valor máximo admissível para x só poderá ser determinado especificando-se um valor para Re .

6) A condição de ser assintótica a expansão interna para a temperatura requer $[\bar{V}$. equação (2.13)]:

$$(8.13) \quad \frac{1}{\sqrt{Re}} T_2(x, \eta) \ll T_1(\xi, \eta)$$

ou, de (4.15), (4.19), (6.4), (8.3) e (8.13)

$$(8.14) \quad \frac{1}{\sqrt{Re}} \left[G_1(\eta) x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \dots \right] \ll T_\infty + [T_s(x) - T_\infty] \left[\theta_0(\eta) + \theta_1(\eta) \cdot \left(\frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2 \right)^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots \right]$$

onde $G_1(\eta)$, $\theta_0(\eta)$ e $\theta_1(\eta)$ são soluções das equações diferenciais (6.6), (4.20) e (4.21), respectivamente.

Aqui, as mesmas considerações feitas na restrição anterior são válidas.

Determinamos portanto seis condições que restringem a região de aplicação dos resultados obtidos neste trabalho. De imediato constata-se que estas condições, por serem impostas a variáveis adimensionais, dependem dos valores de referência adotados. Assim, por exemplo, a quarta condição (8.10) depende exclusivamente do comprimento de referência adotado. Sendo r o valor da coordenada radial, tornada adimensional por L' , teremos de ... (8.10):

$$(8.15) \quad \frac{r'}{L'} < 1$$

ou

$$(8.16) \quad r' < L'$$

ou seja: a região de validade dos resultados obtidos neste trabalho jamais deverá se estender à região fora do círculo de raio r' (dimensional) igual ao comprimento de referência L' .

Entretanto a escolha dos valores de referência não pode ser totalmente arbitrária. Assim, da definição de ξ em (4.5), de x e de ω_0 obtemos:

$$(8.17) \quad \xi \propto \frac{1}{u'_0 L'}$$

$$(8.18) \quad x \propto \frac{1}{L'}$$

$$(8.19) \quad \omega_0 \propto \frac{L'^2}{u'_0}$$

Logo, ao se tornar as variáveis de um determinado problema adimensionais, a escolha da velocidade e do comprimento de referência deverá ser tal que uma vez escolhida uma determinada região a ser estudada, a escolha dos valores de referência não deve ocasionar restrição à região considerada. Assim, uma vez escolhido um valor para o comprimento de referência (L') de tal forma que a segunda, terceira e quarta condições são satisfeitas, o valor de referência para a velocidade (u'_0) deverá ser escolhido de forma que a primeira condição (8.1), tendo em vista (8.17), seja também satisfeita em toda a região. Normalmente a quinta e sexta condições são satisfeitas para $x < 1$ e altos valores de Re .

CAPÍTULO 9

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Neste capítulo são deduzidas algumas funções relacionadas com a temperatura.

A temperatura na cunha é aqui suposta constante igual a T_0 , e portanto, da série para a temperatura na superfície da cunha, concluímos (capítulo 5):

$$(9.1) \quad \lambda_i = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

logo, de (7.12) e (9.1), vem:

$$(9.2) \quad \theta_1(\eta) = \beta_1 B_1(\eta)$$

De capítulos anteriores temos:

$$(4.15) \quad \theta(\xi, \eta) = \frac{T_1(\xi, \eta) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

$$(4.19) \quad \theta(\xi, \eta) = \theta_0(\eta) + \theta_1(\eta) \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots$$

$$(2.13) \quad T(\xi, \eta) = T_1(\xi, \eta) + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} T_2(\xi, \eta) + \dots$$

$$(6.4) \quad T_2(\xi, \eta) = G_1(\eta) x^{\frac{3}{2}(1-m)-1} + \dots$$

E portanto, das quatro equações acima, obtemos para a temperatura dimensional (t):

$$(9.3) \quad t = \left[t_{\infty} + (t_0 - t_{\infty}) \theta \right] + \frac{1}{\sqrt{Re}} (t_0 - t_{\infty}) \left[G_1 x^{\frac{3}{2}(1-m)-1} + \dots \right] + \dots$$

9.1 - DISTRIBUIÇÃO DA TEMPERATURA NA CAMADA LIMITE

A temperatura de qualquer ponto do fluido pode ser dada, até a aproximação de segunda ordem, pela equação (9.3). Desprezando porém o termo de segunda ordem, a temperatura é dada por (4.15) e (4.19), ou seja (com temperaturas dimensionais):

$$(9.4) \quad \frac{t_1(\xi, \eta) - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = \theta_0(\eta) + \theta_1(\eta) \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots$$

Para $\alpha = 0^\circ$, placa plana semi-infinita $[\theta_1(\eta) = 0]$, obtemos a conhecida expressão para a temperatura na camada limite [Eckert & Drake (1959) - Cap.7]:

$$(9.5) \quad \frac{t_1(\eta) - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = \theta_0(\eta)$$

onde $\theta_0(\eta)$ é solução da equação (4.20). Conclui-se de imediato que a vorticidade externa, até primeira ordem, não afeta a distribuição da temperatura na camada limite de uma placa plana isotérmica imersa num fluido em escoamento com temperatura constante.

Para qualquer outro valor de α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), a distribuição da temperatura, dada por (9.4) até primeira ordem, é afetada pela vorticidade externa. A figura 2 da página 47 mostra a distribuição da temperatura na camada limite de uma cunha com $\alpha = 18^\circ$ (na secção $x = 0,4$) obtida através de (9.4).

9.2 - ESPESSURA DA CAMADA LIMITE TÉRMICA

A espessura da camada limite térmica é aqui definida como sendo a distância da superfície ao ponto para o qual a diferença entre sua temperatura e a da superfície corresponde a 0,99 da diferença entre a temperatura externa e a da superfície; i.e. de (9.2) e (9.4):

$$(9.6) \quad \theta_0(\eta) + \beta_1 B_1(\eta) \xi^{\frac{1-m}{1+m}} = 0,01$$

A cada ξ , e portanto a cada x , corresponderá um dado η_δ que satisfaz (9.6). Da definição de η (4.6) teremos portanto:

$$(9.7) \quad \eta_\delta = \frac{u_1(x) \sqrt{Re}}{\sqrt{2\xi}} \delta_t$$

obtendo para a espessura da camada limite térmica (δ_t):

$$(9.8) \quad \delta_t = \frac{\sqrt{2\xi}}{u_1(x) \sqrt{Re}} \eta_\delta$$

Para $\alpha=0^\circ$ (placa plana) e $Pr=1$ vem:

$$\beta_1 = 0 ; \quad u_1(x) = 1 ; \quad \xi = x \quad \text{e} \quad \eta_\delta = 3,45$$

e portanto:

$$(9.9) \quad \delta_t' = 3,45 \sqrt{\frac{2vx'}{u_0'}} \quad (\text{dimensional})$$

concluindo-se de (9.6) ($\beta_1=0$) e (4.20) que, a espessura da camada limite térmica para a placa plana, não é afetada pela vorticidade externa.

Para qualquer outro valor de α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), a espessura da camada limite térmica é determinada de forma empírica de (9.6) e (9.8). Nestes casos, a vorticidade externa afeta a camada limite tornando-a menos espessa, tal como para a camada limite de velocidade [V. Abreu (1967)]. As curvas de δ'_t para $\alpha=18^\circ$ encontram-se na figura 3 da página 48.

9.3 - FLUXO DE CALOR NA SUPERFÍCIE DA CUNHA

A lei de Fourier para o fluxo de calor por unidade de área (q) estabelece:

$$(9.10) \quad q = -k \left. \frac{\partial t}{\partial y'} \right|_{y'=0}$$

de (9.3), (9.10) e (4.6) vem:

$$(9.11) \quad q = -k \left. \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y'} \right|_{y'=0} = - \frac{k u_1(x)}{L' \sqrt{2\xi}} \sqrt{Re} \left. \frac{\partial t}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$$

De (9.11) e (9.3) podemos definir

$$(9.12) \quad q = q_1 + \frac{1}{\sqrt{Re}} q_2 + \dots$$

e portanto de (9.12), (9.11), (9.3), (4.15) e (4.19) obtemos

$$(9.13) \quad q_1 = -k(t_o - t_\infty) \frac{\sqrt{Re}}{L'} \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \left[\theta'_0(0) + \theta'_1(0) \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots \right]$$

e

$$(9.14) \quad q_2 = -k(t_o - t_\infty) \frac{\sqrt{Re}}{L'} \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \left[G'_1(0) x^{\frac{3}{2}(1-m)-1} + \dots \right]$$

Para $\alpha=0^\circ$ (placa plana) e $Pr = 1$, tendo em vista que $u_1(x) = 1$ e $\xi = x$, obtemos:

$$(9.15) \quad q_1 = 0,332k(t_0 - t_\infty) \sqrt{\frac{u_0'}{vx'}}$$

e

$$(9.16) \quad q_2 = 1,039k(t_0 - t_\infty) \sqrt{\frac{u_0'}{vL'}}$$

logo, para a placa plana e $Pr = 1$:

$$(9.17) \quad q = k(t_0 - t_\infty) \sqrt{\frac{u_0'}{vL'}} \left[0,332 \sqrt{\frac{L'}{x'}} + \frac{1,039}{\sqrt{Re}} + \dots \right]$$

Na secção $\frac{x'}{L'} = 0,5$ o termo de segunda ordem introduz uma correção de 2,2% para $Re = 10^4$ e de 0,7% para $Re=10^5$. Na figura 8 encontra-se a distribuição de $q_i L' / k(t_0 - t_\infty) \sqrt{Re}$ ($i=1$ e 2) sobre a placa plana.

Para $\alpha=18^\circ$, a figura 5 nos dá a distribuição de $q_i L' / k(t_0 - t_\infty) \sqrt{Re}$ sobre a cunha.

Ainda para o mesmo ângulo a distribuição do fluxo de calor (ordem 1) na cunha é apresentada na figura 6 admitindo-se, separadamente, o escoamento externo com e sem vorticidade. O gráfico mostra claramente que a presença da vorticidade externa aumenta sensivelmente o fluxo de calor na cunha; quanto maior a distância ao vértice, maior o efeito da vorticidade. Para $Pr=1$ e na secção $\frac{x'}{L'} = 0,5$ o aumento devido a presença da vorticidade é de 11%.

9.4 - O NÚMERO DE NUSSELT NA SUPERFÍCIE DA CUNHA

O fluxo de calor por unidade de área pode ser definido como:

$$(9.18) \quad q = h(t_o - t_\infty)$$

onde h é o coeficiente de convecção local.

De (9.11) e (9.18) obtemos:

$$(9.19) \quad h(t_o - t_\infty) = - \frac{k}{L'} \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \sqrt{\text{Re}} \left. \frac{\partial t}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$$

de onde vem:

$$(9.20) \quad \text{Nu}(x') = \frac{h(x') x'}{k} = \frac{1}{t_o - t_\infty} \frac{x'}{L'} \sqrt{\frac{u_o' L'}{v}} \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \left. \frac{\partial t}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$$

ou de (9.20), (9.3), (4.15) e (4.19)

$$(9.21) \quad \begin{aligned} \text{Nu}(x') = & - \sqrt{\frac{u_1'(x) x'}{v}} \sqrt{\frac{u_1(x) x}{2\xi}} \left\{ \theta_0'(0) + \theta_1'(0) \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \left[G_1'(0) x^{\frac{3}{2}(1-m)-1} + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

ou ainda:

$$(9.22) \quad \begin{aligned} \text{Nu}(x') = & - \sqrt{\text{Re}_{x'}} \sqrt{\frac{u_1(x) x}{2\xi}} \left\{ \theta_0'(0) + \theta_1'(0) \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \left[G_1'(0) x^{\frac{3}{2}(1-m)-1} + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

onde $Nu(x')$ e $Re_{x'}$ são respectivamente os números de Nusselt e Reynolds locais.

De (9.22) podemos definir:

$$(9.23) \quad Nu = Nu_1 + \frac{1}{\sqrt{Re}} Nu_2 + \dots$$

e portanto:

$$(9.24) \quad Nu_1 = - \sqrt{Re_{x'}} \sqrt{\frac{u_1(x)x}{2\xi}} \left[\theta'_0(0) + \theta'_1(0) \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots \right]$$

e

$$(9.25) \quad Nu_2 = - \sqrt{Re_{x'}} \sqrt{\frac{u_1(x)x}{2\xi}} \left[G'_1(0) x^{\frac{3}{2}(1-m)-1} + \dots \right]$$

Para $\alpha=0^\circ$ (placa plana) e $Pr=1$ vem:

$$(9.26) \quad Nu_1 = 0,332 \sqrt{\frac{u'_0 x'}{v}}$$

e

$$(9.27) \quad Nu_2 = 1,039 \sqrt{\frac{u'_0 x'}{v}} x^{1/2}$$

logo, para a placa plana e $Pr=1$:

$$(9.28) \quad Nu(x') = \sqrt{Re_{x'}} \left[0,332 + \frac{1,039}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{x'}{L'}} + \dots \right]$$

A correção percentual devida ao termo de segunda ordem é a mesma obtida para o fluxo de calor.

Na figura 7 encontra-se a distribuição de $Nu(x')/\sqrt{Re_{x'}}$ sobre a placa plana.

Para $\alpha=18^\circ$, a distribuição de $Nu(x')/\sqrt{Re_{x'}}$ encontra-se na figura 4 para as ordens um e dois para o escoamento externo com e sem vorticidade. O gráfico mostra que co-

mo para o fluxo de calor, a vorticidade externa aumenta o valor de $Nu(x')/\sqrt{Re_{x'}}$. Na secção $x'/L' = 0,5$ e para $Pr = 1$ o aumento em $Nu(x')/\sqrt{Re_{x'}}$ devido à vorticidade é de cerca de 8%. É interessante observar que, com vorticidade externa, a primeira ordem de $Nu(x')/\sqrt{Re_{x'}}$ cresce aproximadamente linearmente com x'/L' .

9.5 - COMPARAÇÃO DO RESULTADO OBTIDO PARA O FLUXO DE CALOR NA PLACA PLANA COM O OBTIDO POR VAN DYKE (1962b)

A fim de efetuar um teste de validade da solução geral obtida neste trabalho, aplicaremos esta solução ao caso particular do fluxo de calor na placa plana semi-infinita ($\alpha = 0^\circ$) com o objetivo de comparar quantitativamente o resultado, até a aproximação de segunda ordem, com o obtido por Van Dyke (1962b) para o mesmo problema.

Para o caso em que $Pr = 0,7$, Van Dyke [Van Dyke (1962b) eq. (4.29)] obteve para o fluxo de calor na placa plana a expressão:

$$(9.29) \quad \frac{q}{k} = \left(\frac{u_o'}{v_{x'}}\right)^{1/2} (t_o - t_\infty) \left[0,29268 - 0,91117 \left(\frac{v_{x'}}{u_o'}\right)^{1/2} \frac{\omega'}{u_o'} \right]$$

onde os símbolos utilizados para as variáveis estão adaptados à notação usada neste trabalho.

Efetuando pequenas transformações em (9.29) obtemos:

$$(9.30) \quad \frac{q}{k} = (t_o - t_\infty) \left(\frac{u_o'}{v_{L'}}\right)^{1/2} \left[0,29268 \left(\frac{L'}{x'}\right)^{1/2} - 0,91117 \frac{\omega' L'}{u_o'} \left(\frac{v}{u_o' L'}\right)^{1/2} \right]$$

ou

$$(9.31) \quad \frac{q}{k} = (t_o - t_\infty) \left(\frac{u_o'}{\nu L'} \right)^{1/2} \left[0,29268 \sqrt{\frac{L'}{x'}} - \frac{0,91117}{\sqrt{Re}} \omega \right]$$

que, para $\omega = -\omega_o = -1$ (valor utilizado para a vorticidade externa em todo este trabalho) nos leva à equação:

$$(9.32) \quad q = k(t_o - t_\infty) \left(\frac{u_o'}{\nu L'} \right)^{1/2} \left[0,29268 \sqrt{\frac{L'}{x'}} + \frac{0,91117}{\sqrt{Re}} \right]$$

Por outro lado, a expressão para o fluxo de calor obtido através do presente trabalho para o mesmo problema é obtido através das equações (9.12), (9.13) e (9.14) e que, tal como foi obtida a equação (9.17), tem por expressão

$$(9.33) \quad q = k(t_o - t_\infty) \left(\frac{u_o'}{\nu L'} \right)^{1/2} \left[0,29270 \sqrt{\frac{L'}{x'}} + \frac{0,90934}{\sqrt{Re}} \right]$$

Logo, da comparação das equações (9.32) e (9.33) conclui-se que a concordância dos resultados, até a aproximação de segunda ordem, pode ser considerada boa.

Fig.2 - Distribuição da temperatura na camada limite térmica da cunha ($\alpha = 18^\circ$) na secção $x'/L' = 0,4$. Escoamento ext_{er}no com vorticidade.

Fig.3 - Espessura da camada limite térmica na cunha.
Escoamento externo com e sem vorticidade.

Fig.4 - $Nu(x')/\sqrt{Re_x}$, na superfície da cunha. Ordens 1 e 2.
Escoamento externo com e sem vorticidade.

Fig.5 - Fluxo de calor na superfície da cunha.
Ordens 1 e 2.

Fig.6 - Fluxo de calor na superfície da cunha.
Escoamento externo com e sem vorticidade.

Fig.7 - $\text{Nu}(x')/\sqrt{\text{Re}_x}$, na superfície da placa plana.
Ordens 1 e 2.

Fig.8 - Fluxo de calor na superfície da placa plana.
Ordens 1 e 2.

Tabela - 2

$$\beta=0$$

Pr	0,7		1		10	
n	θ_o	θ_o'	θ_o	θ_o'	θ_o	θ_o'
0.0	1.000	-0.413	1.000	-0.469	1.000	-1.029
0.1	0.958	-0.413	0.953	-0.469	0.897	-1.028
0.2	0.917	-0.413	0.906	-0.469	0.794	-1.023
0.3	0.875	-0.413	0.859	-0.468	0.692	-1.008
0.4	0.834	-0.412	0.812	-0.467	0.593	-0.979
0.5	0.793	-0.411	0.765	-0.465	0.497	-0.933
0.6	0.752	-0.409	0.719	-0.461	0.407	-0.869
0.7	0.711	-0.406	0.673	-0.457	0.324	-0.787
0.8	0.671	-0.402	0.626	-0.451	0.250	-0.690
0.9	0.631	-0.397	0.583	-0.443	0.186	-0.582
1.0	0.591	-0.391	0.539	-0.434	0.133	-0.472
1.1	0.552	-0.384	0.496	-0.423	0.091	-0.365
1.2	0.514	-0.376	0.454	-0.410	0.060	-0.268
1.3	0.477	-0.367	0.414	-0.395	0.037	-0.187
1.4	0.441	-0.356	0.375	-0.379	0.022	-0.122
1.5	0.406	-0.344	0.338	-0.361	0.012	-0.075
1.6	0.372	-0.331	0.303	-0.342	0.006	-0.043
1.7	0.339	-0.317	0.270	-0.321	0.003	-0.023
1.8	0.308	-0.302	0.239	-0.300	0.001	-0.011
1.9	0.279	-0.286	0.210	-0.278	0.000	-0.005
2.0	0.251	-0.270	0.183	-0.255	0.000	-0.002
2.1	0.225	-0.253	0.159	-0.232	0.000	-0.000
2.2	0.200	-0.235	0.136	-0.210	0.000	-0.000
2.3	0.178	-0.218	0.116	-0.188	0.000	-0.000
2.4	0.157	-0.201	0.099	-0.167	0.000	-0.000
2.5	0.137	-0.183	0.083	-0.147	0.000	0.000
2.6	0.120	-0.167	0.069	-0.128	0.000	0.000
2.7	0.104	-0.150	0.057	-0.111	0.000	0.000
2.8	0.090	-0.135	0.047	-0.095	0.000	0.000
2.9	0.077	-0.120	0.038	-0.080	0.000	0.000
3.0	0.066	-0.106	0.031	-0.067	0.000	0.000
3.1	0.056	-0.093	0.024	-0.056	0.000	0.000
3.2	0.047	-0.081	0.019	-0.046	0.000	0.000
3.3	0.039	-0.070	0.015	-0.037	0.000	0.000
3.4	0.033	-0.061	0.012	-0.030	0.000	0.000

$$\beta=0$$

Pr	0,7		1		10	
η	θ_0	θ'_0	θ_0	θ'_0	θ_0	θ'_0
3.5	0.027	-0.052	0.009	-0.024	0.000	0.000
3.6	0.022	-0.044	0.007	-0.019	0.000	0.000
3.7	0.018	-0.037	0.005	-0.015	0.000	0.000
3.8	0.015	-0.031	0.004	-0.011	0.000	0.000
3.9	0.012	-0.025	0.003	-0.008	0.000	0.000
4.0	0.009	-0.021	0.002	-0.006	0.000	0.000
4.1	0.007	-0.017	0.001	-0.005	0.000	0.000
4.2	0.006	-0.014	0.001	-0.003	0.000	0.000
4.3	0.005	-0.011	0.001	-0.002	0.000	0.000
4.4	0.004	-0.009	0.000	-0.002	0.000	0.000
4.5	0.003	-0.007	0.000	-0.001	0.000	0.000
4.6	0.002	-0.005	0.000	-0.001	0.000	0.000
4.7	0.002	-0.004	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.8	0.001	-0.003	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.9	0.001	-0.002	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.0	0.001	-0.002	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.1	0.000	-0.001	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.2	0.000	-0.001	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.3	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.4	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.5	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.6	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabela - 3

 $\beta=0,2$

Pr	0,7		1		10	
n	θ_o	θ'_o	θ_o	θ'_o	θ_o	θ'_o
0.0	1.000	-0.444	1.000	-0.506	1.000	-1.140
0.1	0.955	-0.444	0.949	-0.506	0.885	-1.139
0.2	0.911	-0.444	0.898	-0.506	0.772	-1.130
0.3	0.866	-0.443	0.848	-0.505	0.660	-1.106
0.4	0.822	-0.442	0.797	-0.503	0.551	-1.062
0.5	0.778	-0.440	0.747	-0.499	0.448	-0.993
0.6	0.734	-0.437	0.697	-0.494	0.353	-0.900
0.7	0.690	-0.432	0.648	-0.488	0.269	-0.786
0.8	0.647	-0.427	0.600	-0.479	0.196	-0.657
0.9	0.605	-0.420	0.552	-0.468	0.137	-0.523
1.0	0.563	-0.412	0.506	-0.455	0.091	-0.395
1.1	0.523	-0.402	0.461	-0.440	0.058	-0.282
1.2	0.483	-0.391	0.418	-0.423	0.034	-0.189
1.3	0.444	-0.379	0.376	-0.404	0.019	-0.118
1.4	0.407	-0.365	0.337	-0.382	0.010	-0.069
1.5	0.371	-0.349	0.300	-0.360	0.005	-0.037
1.6	0.337	-0.333	0.265	-0.336	0.002	-0.018
1.7	0.305	-0.316	0.233	-0.311	0.001	-0.008
1.8	0.274	-0.297	0.203	-0.286	0.000	-0.003
1.9	0.245	-0.278	0.176	-0.260	0.000	-0.001
2.0	0.218	-0.259	0.151	-0.235	0.000	-0.000
2.1	0.193	-0.240	0.128	-0.210	0.000	-0.000
2.2	0.170	-0.220	0.109	-0.186	0.000	-0.000
2.3	0.149	-0.201	0.091	-0.163	0.000	-0.000
2.4	0.130	-0.182	0.076	-0.142	0.000	0.000
2.5	0.112	-0.164	0.063	-0.122	0.000	0.000
2.6	0.097	-0.147	0.051	-0.104	0.000	0.000
2.7	0.083	-0.131	0.042	-0.088	0.000	0.000
2.8	0.070	-0.115	0.033	-0.074	0.000	0.000
2.9	0.060	-0.101	0.027	-0.061	0.000	0.000
3.0	0.050	-0.088	0.021	-0.050	0.000	0.000
3.1	0.042	-0.076	0.016	-0.041	0.000	0.000
3.2	0.035	-0.065	0.013	-0.033	0.000	0.000
3.3	0.029	-0.056	0.010	-0.026	0.000	0.000
3.4	0.024	-0.047	0.007	-0.020	0.000	0.000

$$\beta=0,2$$

Pr	0,7		1		10	
n	θ_0	θ'_0	θ_0	θ'_0	θ_0	θ'_0
3.5	0.019	-0.039	0.006	-0.016	0.000	0.000
3.6	0.015	-0.033	0.004	-0.012	0.000	0.000
3.7	0.012	-0.027	0.003	-0.009	0.000	0.000
3.8	0.010	-0.022	0.002	-0.007	0.000	0.000
3.9	0.008	-0.018	0.002	-0.005	0.000	0.000
4.0	0.006	-0.015	0.001	-0.004	0.000	0.000
4.1	0.005	-0.012	0.001	-0.002	0.000	0.000
4.2	0.004	-0.009	0.001	-0.002	0.000	0.000
4.3	0.003	-0.007	0.000	-0.001	0.000	0.000
4.4	0.002	-0.006	0.000	-0.001	0.000	0.000
4.5	0.002	-0.004	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.6	0.001	-0.003	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.7	0.001	-0.002	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.8	0.001	-0.002	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.9	0.000	-0.001	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.0	0.000	-0.001	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.1	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.2	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
5.3	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000

Tabela - 4

 $\beta=0,8$

Pr	0,7		1		10	
n	θ_0	θ'_0	θ_0	θ'_0	θ_0	θ'_0
0.0	1.000	-0.487	1.000	-0.559	1.000	-1.304
0.1	0.951	-0.487	0.944	-0.559	0.869	-1.302
0.2	0.902	-0.486	0.888	-0.559	0.740	-1.285
0.3	0.853	-0.485	0.832	-0.557	0.613	-1.243
0.4	0.805	-0.483	0.776	-0.553	0.492	-1.167
0.5	0.757	-0.480	0.721	-0.548	0.381	-1.054
0.6	0.709	-0.475	0.667	-0.539	0.282	-0.909
0.7	0.662	-0.468	0.613	-0.529	0.199	-0.743
0.8	0.615	-0.460	0.561	-0.515	0.134	-0.573
0.9	0.570	-0.449	0.510	-0.499	0.084	-0.414
1.0	0.525	-0.437	0.461	-0.479	0.050	-0.278
1.1	0.482	-0.423	0.414	-0.457	0.027	-0.174
1.2	0.441	-0.407	0.370	-0.433	0.014	-0.100
1.3	0.401	-0.389	0.328	-0.406	0.006	-0.053
1.4	0.363	-0.370	0.288	-0.378	0.003	-0.026
1.5	0.327	-0.350	0.252	-0.349	0.001	-0.011
1.6	0.293	-0.329	0.219	-0.319	0.000	-0.004
1.7	0.261	-0.307	0.188	-0.289	0.000	-0.001
1.8	0.232	-0.284	0.161	-0.260	0.000	-0.000
1.9	0.204	-0.262	0.136	-0.231	0.000	-0.000
2.0	0.179	-0.240	0.114	-0.203	0.000	-0.000
2.1	0.156	-0.218	0.095	-0.177	0.000	0.000
2.2	0.135	-0.197	0.079	-0.153	0.000	0.000
2.3	0.117	-0.176	0.065	-0.131	0.000	0.000
2.4	0.100	-0.157	0.052	-0.111	0.000	0.000
2.5	0.085	-0.139	0.042	-0.093	0.000	0.000
2.6	0.072	-0.122	0.034	-0.077	0.000	0.000
2.7	0.061	-0.106	0.027	-0.063	0.000	0.000
2.8	0.051	-0.092	0.021	-0.051	0.000	0.000
2.9	0.042	-0.079	0.016	-0.041	0.000	0.000
3.0	0.035	-0.067	0.012	-0.033	0.000	0.000
3.1	0.029	-0.057	0.009	-0.026	0.000	0.000
3.2	0.023	-0.048	0.007	-0.020	0.000	0.000
3.3	0.019	-0.040	0.005	-0.015	0.000	0.000
3.4	0.015	-0.033	0.004	-0.012	0.000	0.000

$$\beta=0,8$$

Pr	0,7		1		10	
η	θ_o	θ'_o	θ_o	θ'_o	θ_o	θ'_o
3.5	0.012	-0.027	0.003	-0.009	0.000	0.000
3.6	0.010	-0.022	0.002	-0.006	0.000	0.000
3.7	0.008	-0.018	0.001	-0.005	0.000	0.000
3.8	0.006	-0.014	0.001	-0.003	0.000	0.000
3.9	0.005	-0.011	0.001	-0.002	0.000	0.000
4.0	0.004	-0.009	0.000	-0.001	0.000	0.000
4.1	0.003	-0.007	0.000	-0.001	0.000	0.000
4.2	0.002	-0.005	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.3	0.002	-0.004	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.4	0.001	-0.003	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.5	0.001	-0.002	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.6	0.001	-0.002	0.000	-0.000	0.000	0.000
4.7	0.000	-0.001	0.000	-0.000	0.000	0.000

Tabela - 5

 $\beta=0,2$

Pr	0,7		1		10	
η	B_1	B_1'	B_1	B_1'	B_1	B_1'
0.0	0.000	-0.129	0.000	-0.157	0.000	-0.462
0.1	-0.012	-0.129	-0.015	-0.157	-0.046	-0.459
0.2	-0.025	-0.128	-0.031	-0.156	-0.091	-0.441
0.3	-0.038	-0.127	-0.046	-0.154	-0.133	-0.396
0.4	-0.051	-0.124	-0.062	-0.149	-0.169	-0.317
0.5	-0.063	-0.120	-0.076	-0.143	-0.195	-0.205
0.6	-0.075	-0.115	-0.090	-0.134	-0.209	-0.071
0.7	-0.086	-0.107	-0.103	-0.122	-0.209	0.068
0.8	-0.096	-0.098	-0.115	-0.108	-0.196	0.193
0.9	-0.106	-0.087	-0.125	-0.092	-0.172	0.284
1.0	-0.114	-0.075	-0.133	-0.074	-0.141	0.329
1.1	-0.121	-0.062	-0.140	-0.054	-0.108	0.327
1.2	-0.126	-0.048	-0.144	-0.033	-0.076	0.289
1.3	-0.130	-0.033	-0.146	-0.013	-0.050	0.229
1.4	-0.133	-0.018	-0.147	0.007	-0.031	0.164
1.5	-0.134	-0.003	-0.145	0.026	-0.017	0.107
1.6	-0.134	0.010	-0.141	0.044	-0.009	0.063
1.7	-0.132	0.023	-0.136	0.060	-0.004	0.034
1.8	-0.129	0.035	-0.129	0.073	-0.001	0.016
1.9	-0.125	0.046	-0.121	0.083	-0.000	0.007
2.0	-0.120	0.056	-0.113	0.091	-0.000	0.002
2.1	-0.114	0.063	-0.103	0.095	-0.000	0.000
2.2	-0.107	0.069	-0.094	0.097	-0.000	0.000
2.3	-0.100	0.073	-0.084	0.097	-0.000	0.000
2.4	-0.092	0.076	-0.074	0.094	-0.000	-0.000
2.5	-0.085	0.077	-0.065	0.090	-0.000	-0.000
2.6	-0.077	0.076	-0.056	0.084	-0.000	-0.000
2.7	-0.069	0.074	-0.048	0.077	-0.000	-0.000
2.8	-0.062	0.072	-0.041	0.070	-0.000	-0.000
2.9	-0.055	0.068	-0.034	0.062	-0.000	-0.000
3.0	-0.048	0.064	-0.028	0.054	-0.000	-0.000
3.1	-0.042	0.059	-0.023	0.047	-0.000	-0.000
3.2	-0.036	0.054	-0.019	0.040	-0.000	-0.000
3.3	-0.031	0.049	-0.015	0.034	-0.000	-0.000
3.4	-0.027	0.043	-0.012	0.028	-0.000	-0.000

$$\beta=0,2$$

Pr	0,7		1		10	
η	B_1	B_1'	B_1	B_1'	B_1	B_1'
3.5	10.023	0.038	10.009	0.023	10.000	0.000
3.6	10.019	0.034	10.007	0.018	10.000	0.000
3.7	10.016	0.029	10.005	0.015	10.000	0.000
3.8	10.013	0.025	10.004	0.011	10.000	0.000
3.9	10.011	0.021	10.003	0.009	10.000	0.000
4.0	10.009	0.018	10.002	0.007	10.000	0.000
4.1	10.007	0.015	10.001	0.005	10.000	0.000
4.2	10.005	0.012	10.001	0.004	10.000	0.000
4.3	10.004	0.010	10.001	0.003	10.000	0.000
4.4	10.003	0.008	10.000	0.002	10.000	0.000
4.5	10.002	0.006	10.000	0.001	10.000	0.000
4.6	10.002	0.005	10.000	0.001	10.000	0.000
4.7	10.001	0.004	10.000	0.000	10.000	0.000
4.8	10.001	0.003	10.000	0.000	10.000	0.000
4.9	10.001	0.002	10.000	0.000	10.000	0.000
5.0	10.000	0.002	10.000	0.000	10.000	0.000
5.1	10.000	0.001	10.000	0.000	10.000	0.000
5.2	10.000	0.001	10.000	0.000	10.000	0.000
5.3	10.000	0.000	10.000	0.000	10.000	0.000

Tabela - 6

 $\beta=0,8$

Pr	0,7		1		10	
η	B_1	B_1'	B_1	B_1'	B_1	B_1'
0.0	0.000	-0.052	0.000	-0.065	0.000	-0.203
0.1	-0.005	-0.052	-0.006	-0.064	-0.020	-0.201
0.2	-0.010	-0.052	-0.012	-0.064	-0.040	-0.190
0.3	-0.015	-0.051	-0.019	-0.063	-0.057	-0.162
0.4	-0.020	-0.049	-0.025	-0.060	-0.071	-0.114
0.5	-0.025	-0.047	-0.031	-0.057	-0.080	-0.051
0.6	-0.030	-0.044	-0.036	-0.052	-0.081	0.017
0.7	-0.034	-0.041	-0.041	-0.046	-0.076	0.080
0.8	-0.038	-0.036	-0.046	-0.039	-0.066	0.123
0.9	-0.041	-0.031	-0.049	-0.031	-0.052	0.142
1.0	-0.044	-0.025	-0.052	-0.022	-0.038	0.137
1.1	-0.046	-0.019	-0.054	-0.013	-0.026	0.114
1.2	-0.048	-0.013	-0.055	-0.004	-0.016	0.084
1.3	-0.049	-0.007	-0.055	0.004	-0.009	0.055
1.4	-0.049	-0.000	-0.054	0.012	-0.004	0.032
1.5	-0.049	0.005	-0.052	0.019	-0.002	0.017
1.6	-0.048	0.010	-0.050	0.025	-0.001	0.008
1.7	-0.047	0.015	-0.047	0.030	-0.000	0.003
1.8	-0.045	0.019	-0.044	0.034	-0.000	0.001
1.9	-0.043	0.023	-0.040	0.036	-0.000	0.000
2.0	-0.041	0.025	-0.037	0.038	-0.000	0.000
2.1	-0.038	0.027	-0.033	0.038	-0.000	0.000
2.2	-0.035	0.028	-0.029	0.037	-0.000	-0.000
2.3	-0.032	0.029	-0.025	0.035	-0.000	-0.000
2.4	-0.029	0.029	-0.022	0.033	-0.000	-0.000
2.5	-0.026	0.028	-0.019	0.030	-0.000	-0.000
2.6	-0.024	0.027	-0.016	0.027	-0.000	-0.000
2.7	-0.021	0.026	-0.013	0.024	-0.000	-0.000
2.8	-0.018	0.024	-0.011	0.021	-0.000	-0.000
2.9	-0.016	0.023	-0.009	0.018	-0.000	-0.000
3.0	-0.014	0.021	-0.007	0.015	-0.000	-0.000
3.1	-0.012	0.019	-0.005	0.013	-0.000	-0.000
3.2	-0.010	0.017	-0.004	0.010	-0.000	-0.000
3.3	-0.008	0.015	-0.003	0.008	-0.000	-0.000
3.4	-0.007	0.013	-0.002	0.007	-0.000	-0.000

$$\beta=0,8$$

Pr	0,7		1		10	
η	B_1	B_1'	B_1	B_1'	B_1	B_1'
3.5	-0.005	0.011	-0.002	0.005	-0.000	-0.000
3.6	-0.004	0.009	-0.001	0.004	-0.000	-0.000
3.7	-0.003	0.008	-0.001	0.003	-0.000	-0.000
3.8	-0.003	0.007	-0.001	0.002	-0.000	-0.000
3.9	-0.002	0.005	-0.000	0.002	-0.000	-0.000
4.0	-0.002	0.004	-0.000	0.001	-0.000	-0.000
4.1	-0.001	0.004	-0.000	0.001	-0.000	-0.000
4.2	-0.001	0.003	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
4.3	-0.000	0.002	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
4.4	-0.000	0.002	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
4.5	-0.000	0.001	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
4.6	-0.000	0.001	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
4.7	-0.000	0.001	-0.000	0.000	-0.000	-0.000

Tabela - 7

 $\beta=0$

Pr	0,7		1		10	
η	L_0	L'_0	L_0	L'_0	L_0	L'_0
0.0	0.000	-0.265	0.000	-0.297	0.000	-0.633
0.1	-0.026	-0.262	-0.029	-0.293	-0.061	-0.590
0.2	-0.052	-0.253	-0.058	-0.280	-0.115	-0.482
0.3	-0.076	-0.239	-0.085	-0.261	-0.157	-0.335
0.4	-0.100	-0.221	-0.110	-0.236	-0.182	-0.174
0.5	-0.121	-0.200	-0.132	-0.207	-0.192	-0.020
0.6	-0.139	-0.176	-0.151	-0.175	-0.187	0.109
0.7	-0.156	-0.150	-0.167	-0.140	-0.171	0.204
0.8	-0.169	-0.123	-0.179	-0.106	-0.147	0.260
0.9	-0.180	-0.095	-0.188	-0.071	-0.120	0.279
1.0	-0.189	-0.068	-0.194	-0.037	-0.093	0.267
1.1	-0.194	-0.041	-0.196	-0.006	-0.067	0.233
1.2	-0.197	-0.016	-0.195	0.022	-0.046	0.187
1.3	-0.197	0.007	-0.191	0.048	-0.030	0.140
1.4	-0.195	0.029	-0.185	0.070	-0.018	0.097
1.5	-0.192	0.048	-0.177	0.089	-0.010	0.062
1.6	-0.186	0.065	-0.166	0.104	-0.005	0.037
1.7	-0.179	0.079	-0.157	0.115	-0.002	0.020
1.8	-0.170	0.090	-0.145	0.122	-0.001	0.010
1.9	-0.160	0.099	-0.132	0.125	-0.000	0.004
2.0	-0.150	0.105	-0.120	0.126	-0.000	0.002
2.1	-0.139	0.109	-0.107	0.124	-0.000	0.000
2.2	-0.128	0.111	-0.095	0.119	-0.000	0.000
2.3	-0.117	0.110	-0.083	0.113	-0.000	0.000
2.4	-0.106	0.108	-0.072	0.105	-0.000	0.000
2.5	-0.095	0.104	-0.062	0.097	-0.000	0.000
2.6	-0.085	0.099	-0.053	0.087	0.000	0.000
2.7	-0.076	0.094	-0.044	0.078	0.000	0.000
2.8	-0.066	0.087	-0.037	0.069	0.000	0.000
2.9	-0.058	0.080	-0.031	0.060	0.000	0.000
3.0	-0.050	0.073	-0.025	0.051	0.000	0.000
3.1	-0.043	0.066	-0.020	0.043	0.000	0.000
3.2	-0.037	0.059	-0.016	0.036	0.000	0.000
3.3	-0.031	0.052	-0.013	0.030	0.000	0.000
3.4	-0.026	0.046	-0.010	0.024	0.000	0.000

$$\beta=0$$

Pr	0,7		1		10	
η	L_o	L'_o	L_o	L'_o	L_o	L'_o
3.5	-0.022	0.040	-0.008	0.020	0.000	0.000
3.6	-0.018	0.034	-0.006	0.016	0.000	0.000
3.7	-0.015	0.029	-0.005	0.012	0.000	0.000
3.8	-0.012	0.025	-0.003	0.010	0.000	0.000
3.9	-0.010	0.021	-0.003	0.007	0.000	0.000
4.0	-0.008	0.017	-0.002	0.005	0.000	0.000
4.1	-0.006	0.014	-0.001	0.004	0.000	0.000
4.2	-0.005	0.012	-0.001	0.003	0.000	0.000
4.3	-0.004	0.009	-0.001	0.002	0.000	0.000
4.4	-0.003	0.008	-0.000	0.001	0.000	0.000
4.5	-0.002	0.006	-0.000	0.001	0.000	0.000
4.6	-0.002	0.005	-0.000	0.000	0.000	0.000
4.7	-0.001	0.004	-0.000	0.000	0.000	0.000
4.8	-0.001	0.003	-0.000	0.000	0.000	0.000
4.9	-0.001	0.002	-0.000	0.000	0.000	0.000
5.0	-0.000	0.002	-0.000	0.000	0.000	0.000
5.1	-0.000	0.001	-0.000	0.000	0.000	0.000
5.2	-0.000	0.001	-0.000	0.000	0.000	0.000
5.3	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000
5.4	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000
5.5	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000
5.6	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000

Tabela - 8

 $\beta=0,2$

Pr	0,7		1		10	
η	L_o	L'_o	L_o	L'_o	L_o	L'_o
0.0	0.000	-0.318	0.000	-0.358	0.000	-0.766
0.1	-0.031	-0.314	-0.035	-0.351	-0.074	-0.705
0.2	-0.062	-0.301	-0.069	-0.333	-0.138	-0.553
0.3	-0.091	-0.281	-0.102	-0.306	-0.183	-0.351
0.4	-0.118	-0.256	-0.131	-0.272	-0.207	-0.139
0.5	-0.142	-0.227	-0.156	-0.232	-0.212	0.052
0.6	-0.164	-0.195	-0.177	-0.189	-0.198	0.201
0.7	-0.181	-0.161	-0.194	-0.145	-0.173	0.295
0.8	-0.196	-0.126	-0.206	-0.101	-0.141	0.334
0.9	-0.207	-0.092	-0.214	-0.058	-0.108	0.325
1.0	-0.214	-0.058	-0.218	-0.017	-0.077	0.283
1.1	-0.218	-0.026	-0.218	0.019	-0.052	0.224
1.2	-0.220	0.003	-0.214	0.052	-0.032	0.163
1.3	-0.218	0.030	-0.207	0.080	-0.019	0.108
1.4	-0.214	0.054	-0.198	0.103	-0.010	0.066
1.5	-0.207	0.074	-0.187	0.121	-0.005	0.037
1.6	-0.199	0.091	-0.174	0.134	-0.002	0.019
1.7	-0.189	0.105	-0.160	0.142	-0.001	0.009
1.8	-0.178	0.115	-0.145	0.146	-0.000	0.003
1.9	-0.166	0.122	-0.131	0.146	-0.000	0.001
2.0	-0.153	0.126	-0.116	0.142	-0.000	0.000
2.1	-0.140	0.127	-0.102	0.136	-0.000	-0.000
2.2	-0.128	0.126	-0.089	0.128	-0.000	-0.000
2.3	-0.115	0.123	-0.077	0.118	-0.000	-0.000
2.4	-0.103	0.118	-0.065	0.107	-0.000	-0.000
2.5	-0.091	0.112	-0.055	0.096	-0.000	-0.000
2.6	-0.081	0.105	-0.046	0.085	-0.000	-0.000
2.7	-0.070	0.097	-0.038	0.074	-0.000	-0.000
2.8	-0.061	0.088	-0.031	0.064	-0.000	-0.000
2.9	-0.053	0.080	-0.025	0.054	-0.000	-0.000
3.0	-0.045	0.072	-0.020	0.045	-0.000	-0.000
3.1	-0.038	0.063	-0.016	0.037	-0.000	-0.000
3.2	-0.032	0.056	-0.013	0.031	-0.000	-0.000
3.3	-0.027	0.049	-0.010	0.025	-0.000	-0.000
3.4	-0.022	0.042	-0.008	0.020	-0.000	-0.000

$$\beta=0,2$$

Pr	0,7		1		10	
η	L_o	L'_o	L_o	L'_o	L_o	L'_o
3.5	-0.018	0.036	-0.006	0.015	-0.000	-0.000
3.6	-0.015	0.030	-0.004	0.012	-0.000	-0.000
3.7	-0.012	0.025	-0.003	0.009	-0.000	-0.000
3.8	-0.010	0.021	-0.002	0.007	-0.000	-0.000
3.9	-0.008	0.018	-0.002	0.005	-0.000	-0.000
4.0	-0.006	0.014	-0.001	0.004	-0.000	-0.000
4.1	-0.005	0.012	-0.001	0.003	-0.000	-0.000
4.2	-0.004	0.009	-0.001	0.002	-0.000	-0.000
4.3	-0.003	0.007	-0.000	0.001	-0.000	-0.000
4.4	-0.002	0.006	-0.000	0.001	-0.000	-0.000
4.5	-0.002	0.004	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
4.6	-0.001	0.003	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
4.7	-0.001	0.003	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
4.8	-0.001	0.002	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
4.9	-0.000	0.001	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
5.0	-0.000	0.001	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
5.1	-0.000	0.001	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
5.2	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
5.3	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000

Tabela - 9

 $\beta=0,8$

Pr	0,7		1		10	
η	L_o	L'_o	L_o	L'_o	L_o	L'_o
0.0	0.000	-0.480	0.000	-0.543	0.000	-1.181
0.1	-0.047	-0.473	-0.053	-0.532	-0.114	-1.080
0.2	-0.094	-0.452	-0.105	-0.503	-0.211	-0.826
0.3	-0.137	-0.420	-0.154	-0.459	-0.277	-0.487
0.4	-0.178	-0.380	-0.197	-0.404	-0.308	-0.132
0.5	-0.213	-0.334	-0.234	-0.340	-0.305	0.179
0.6	-0.244	-0.283	-0.265	-0.272	-0.275	0.403
0.7	-0.270	-0.229	-0.289	-0.201	-0.227	0.521
0.8	-0.290	-0.175	-0.305	-0.131	-0.174	0.536
0.9	-0.305	-0.121	-0.315	-0.064	-0.123	0.476
1.0	-0.314	-0.069	-0.318	-0.001	-0.080	0.374
1.1	-0.319	-0.020	-0.316	0.054	-0.048	0.264
1.2	-0.319	0.023	-0.308	0.102	-0.026	0.168
1.3	-0.314	0.063	-0.295	0.143	-0.013	0.097
1.4	-0.306	0.098	-0.279	0.174	-0.006	0.050
1.5	-0.295	0.127	-0.261	0.198	-0.003	0.024
1.6	-0.281	0.150	-0.240	0.213	-0.001	0.010
1.7	-0.265	0.168	-0.218	0.220	-0.000	0.004
1.8	-0.247	0.180	-0.196	0.222	-0.000	0.001
1.9	-0.229	0.188	-0.174	0.217	-0.000	0.000
2.0	-0.210	0.191	-0.153	0.208	-0.000	0.000
2.1	-0.191	0.190	-0.132	0.195	-0.000	0.000
2.2	-0.172	0.186	-0.114	0.180	-0.000	0.000
2.3	-0.153	0.179	-0.096	0.163	-0.000	0.000
2.4	-0.136	0.169	-0.081	0.145	-0.000	0.000
2.5	-0.120	0.158	-0.067	0.128	-0.000	0.000
2.6	-0.104	0.146	-0.055	0.111	-0.000	0.000
2.7	-0.090	0.134	-0.045	0.095	-0.000	0.000
2.8	-0.077	0.121	-0.036	0.080	-0.000	0.000
2.9	-0.066	0.108	-0.029	0.067	-0.000	0.000
3.0	-0.056	0.096	-0.023	0.055	-0.000	0.000
3.1	-0.047	0.084	-0.018	0.044	-0.000	0.000
3.2	-0.039	0.073	-0.014	0.036	-0.000	0.000
3.3	-0.032	0.063	-0.010	0.028	-0.000	0.000
3.4	-0.026	0.053	-0.008	0.022	-0.000	0.000

$$\beta=0,8$$

Pr	0,7		1		10	
η	L_o	L'_o	L_o	L'_o	L_o	L'_o
3.5	-0.021	0.045	-0.006	0.017	-0.000	0.000
3.6	-0.017	0.038	-0.004	0.013	-0.000	0.000
3.7	-0.013	0.031	-0.003	0.010	-0.000	0.000
3.8	-0.010	0.026	-0.002	0.007	-0.000	0.000
3.9	-0.008	0.021	-0.001	0.005	-0.000	0.000
4.0	-0.006	0.017	-0.001	0.004	-0.000	0.000
4.1	-0.004	0.014	-0.000	0.003	-0.000	0.000
4.2	-0.003	0.011	-0.000	0.002	-0.000	0.000
4.3	-0.002	0.009	-0.000	0.001	-0.000	0.000
4.4	-0.001	0.007	-0.000	0.001	-0.000	0.000
4.5	-0.001	0.005	-0.000	0.000	-0.000	0.000
4.6	-0.000	0.004	-0.000	0.000	-0.000	0.000
4.7	-0.000	0.003	-0.000	0.000	-0.000	0.000

Tabela - 10

 $\beta=0$

Pr	0,7		1		10	
n	G ₁	G ₁ '	G ₁	G ₁ '	G ₁	G ₁ '
0.0	0.000	-1.286	0.000	-1.479	0.000	-3.526
0.1	-0.128	-1.285	-0.147	-1.478	-0.352	-3.514
0.2	-0.257	-1.283	-0.295	-1.474	-0.700	-3.430
0.3	-0.385	-1.276	-0.442	-1.463	-1.033	-3.209
0.4	-0.512	-1.264	-0.588	-1.443	-1.336	-2.801
0.5	-0.637	-1.244	-0.730	-1.411	-1.587	-2.184
0.6	-0.760	-1.215	-0.869	-1.364	-1.766	-1.372
0.7	-0.880	-1.175	-1.003	-1.301	-1.856	-0.422
0.8	-0.995	-1.124	-1.129	-1.220	-1.849	0.567
0.9	-1.104	-1.061	-1.246	-1.121	-1.746	1.476
1.0	-1.207	-0.985	-1.353	-1.003	-1.560	2.184
1.1	-1.301	-0.897	-1.446	-0.867	-1.318	2.605
1.2	-1.386	-0.797	-1.526	-0.716	-1.050	2.707
1.3	-1.460	-0.686	-1.589	-0.551	-0.786	2.524
1.4	-1.523	-0.566	-1.636	-0.376	-0.552	2.137
1.5	-1.573	-0.437	-1.664	-0.195	-0.362	1.652
1.6	-1.610	-0.303	-1.675	-0.012	-0.221	1.170
1.7	-1.633	-0.163	-1.667	0.167	-0.126	0.759
1.8	-1.643	-0.027	-1.641	0.340	-0.066	0.451
1.9	-1.639	0.108	-1.599	0.501	-0.032	0.245
2.0	-1.622	0.240	-1.542	0.645	-0.014	0.122
2.1	-1.591	0.364	-1.471	0.770	-0.005	0.055
2.2	-1.549	0.478	-1.388	0.873	-0.002	0.022
2.3	-1.496	0.581	-1.297	0.952	-0.000	0.008
2.4	-1.433	0.670	-1.199	1.006	-0.000	0.002
2.5	-1.362	0.744	-1.096	1.035	0.000	0.000
2.6	-1.285	0.802	-0.992	1.041	0.000	0.000
2.7	-1.202	0.845	-0.889	1.026	0.000	0.000
2.8	-1.116	0.871	-0.788	0.992	0.000	0.000
2.9	-1.029	0.883	-0.691	0.943	0.000	0.000
3.0	-0.940	0.881	-0.599	0.881	0.000	0.000
3.1	-0.853	0.865	-0.514	0.811	0.000	0.000
3.2	-0.767	0.839	-0.437	0.735	0.000	0.000
3.3	-0.685	0.803	-0.367	0.657	0.000	0.000
3.4	-0.607	0.760	-0.306	0.579	0.000	0.000

$$\beta=0$$

Pr	0,7		1		10	
η	G_1	G_1'	G_1	G_1'	G_1	G_1'
3.5	-0.533	0.711	-0.251	0.503	0.000	0.000
3.6	-0.465	0.658	-0.205	0.432	0.000	0.000
3.7	-0.402	0.602	-0.165	0.366	0.000	0.000
3.8	-0.344	0.546	-0.131	0.306	0.000	0.000
3.9	-0.292	0.490	-0.103	0.253	0.000	0.000
4.0	-0.246	0.436	-0.080	0.206	0.000	0.000
4.1	-0.205	0.384	-0.062	0.166	0.000	0.000
4.2	-0.169	0.336	-0.047	0.132	0.000	0.000
4.3	-0.137	0.291	-0.035	0.104	0.000	0.000
4.4	-0.110	0.249	-0.026	0.081	0.000	0.000
4.5	-0.087	0.212	-0.018	0.062	0.000	0.000
4.6	-0.068	0.179	-0.013	0.047	0.000	0.000
4.7	-0.051	0.150	-0.009	0.035	0.000	0.000
4.8	-0.037	0.125	-0.006	0.026	0.000	0.000
4.9	-0.026	0.103	-0.003	0.019	0.000	0.000

Tabela - 11

 $\beta=0,2$

Pr	0,7		1		10	
n	G ₁	G ₁ '	G ₁	G ₁ '	G ₁	G ₁ '
0.0	0.000	-0.946	0.000	-1.062	0.000	-2.316
0.1	-0.094	-0.945	-0.106	-1.062	-0.231	-2.305
0.2	-0.189	-0.943	-0.212	-1.059	-0.459	-2.233
0.3	-0.283	-0.938	-0.317	-1.050	-0.674	-2.045
0.4	-0.376	-0.928	-0.422	-1.033	-0.862	-1.702
0.5	-0.468	-0.911	-0.524	-1.007	-1.009	-1.196
0.6	-0.558	-0.888	-0.623	-0.968	-1.097	-0.556
0.7	-0.645	-0.855	-0.717	-0.916	-1.118	0.147
0.8	-0.729	-0.814	-0.806	-0.850	-1.069	0.817
0.9	-0.808	-0.762	-0.887	-0.769	-0.959	1.350
1.0	-0.881	-0.701	-0.959	-0.674	-0.806	1.670
1.1	-0.948	-0.630	-1.021	-0.566	-0.633	1.748
1.2	-1.007	-0.550	-1.072	-0.447	-0.463	1.611
1.3	-1.058	-0.462	-1.110	-0.319	-0.315	1.331
1.4	-1.099	-0.367	-1.136	-0.185	-0.199	0.993
1.5	-1.131	-0.267	-1.147	-0.049	-0.116	0.672
1.6	-1.153	-0.164	-1.145	0.085	-0.062	0.412
1.7	-1.164	-0.060	-1.130	0.214	-0.031	0.230
1.8	-1.165	0.042	-1.103	0.334	-0.014	0.116
1.9	-1.155	0.142	-1.064	0.442	-0.006	0.053
2.0	-1.136	0.237	-1.015	0.535	-0.002	0.022
2.1	-1.108	0.324	-0.957	0.611	-0.001	0.008
2.2	-1.072	0.402	-0.893	0.668	-0.000	0.002
2.3	-1.028	0.471	-0.824	0.707	-0.000	0.000
2.4	-0.978	0.527	-0.752	0.728	-0.000	-0.000
2.5	-0.923	0.573	-0.679	0.731	-0.000	-0.000
2.6	-0.864	0.605	-0.606	0.719	-0.000	-0.000
2.7	-0.802	0.626	-0.536	0.694	-0.000	-0.000
2.8	-0.739	0.636	-0.468	0.657	-0.000	-0.000
2.9	-0.675	0.635	-0.404	0.612	-0.000	-0.000
3.0	-0.612	0.624	-0.346	0.561	-0.000	-0.000
3.1	-0.550	0.605	-0.292	0.506	-0.000	-0.000
3.2	-0.491	0.579	-0.244	0.450	-0.000	-0.000
3.3	-0.434	0.547	-0.202	0.394	-0.000	-0.000
3.4	-0.381	0.511	-0.165	0.341	-0.000	-0.000

$$\beta=0,2$$

Pr	0,7		1		10	
η	G_1	G_1'	G_2	G_1'	G_1	G_1'
3.5	-0.332	0.472	-0.134	0.291	-0.000	-0.000
3.6	-0.287	0.432	-0.107	0.245	-0.000	-0.000
3.7	-0.246	0.391	-0.085	0.203	-0.000	-0.000
3.8	-0.208	0.350	-0.066	0.167	-0.000	-0.000
3.9	-0.175	0.310	-0.051	0.133	-0.000	-0.000
4.0	-0.146	0.272	-0.039	0.103	-0.000	-0.000
4.1	-0.121	0.237	-0.029	0.085	-0.000	-0.000
4.2	-0.099	0.204	-0.021	0.067	-0.000	-0.000
4.3	-0.080	0.174	-0.015	0.051	-0.000	-0.000
4.4	-0.064	0.148	-0.011	0.039	-0.000	-0.000
4.5	-0.050	0.124	-0.007	0.029	-0.000	-0.000
4.6	-0.039	0.103	-0.005	0.022	-0.000	-0.000
4.7	-0.029	0.085	-0.003	0.016	-0.000	-0.000

APÊNDICE I

Neste apêndice são deduzidas as equações diferenciais dos dois primeiros problemas externos.

A equação da energia e as expansões externas da temperatura e das componentes da velocidade externa são [V. Van Dyke (1962a)]:

$$(2.3) \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re \, Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$T(x, 0) = T_s(x)$$

$$T(x, y) = T_\infty \quad (y\sqrt{Re} \rightarrow \infty)$$

$$(2.6) \quad T(x, y, \epsilon) = T_1(x, y) + \epsilon T_2(x, y) + \dots$$

$$(I-1) \quad u(x, y, \epsilon) = u_1(x, y) + \epsilon u_2(x, y) + \dots$$

$$(I-2) \quad v(x, y, \epsilon) = v_1(x, y) + \epsilon v_2(x, y) + \dots$$

Levando (2.6), (I-1) e (I-2) em (2.3) teremos:

$$\begin{aligned} & (u_1 + \epsilon u_2 + \dots) \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial T_2}{\partial x} + \dots \right) + (v_1 + \epsilon v_2 + \dots) \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial T_2}{\partial y} + \dots \right) = \\ & \frac{1}{Re \, Pr} \left[\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \dots \right) + \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \epsilon \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

$$T_1 + \epsilon T_2 + \dots = T_\infty \quad (y\sqrt{Re} \rightarrow \infty)$$

ou

$$(I-3) \quad u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} + \epsilon \left[u_2 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial T_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right] + O(\epsilon^2) = \frac{\epsilon^2}{Pr} \left[\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) + \epsilon \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) + \dots \right]$$

$$T_1 + \epsilon T_2 + \dots = T_\infty \quad (y\sqrt{Re} \rightarrow \infty)$$

Igualando os fatores de expoentes iguais de ϵ , ou tomando primeiramente o limite $Re \rightarrow \infty$ ($\epsilon \rightarrow 0$) e a seguir dividindo ambos os membros de (I-3) por ϵ e tomando de novo $Re \rightarrow \infty$ teremos:

Primeiro Problema Externo

$$(I-4) \quad u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0$$

$$T_1(x, y) = T_\infty \quad (y\sqrt{Re} \rightarrow \infty)$$

Segundo Problema Externo

$$(I-5) \quad u_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_2}{\partial y} = -u_2 \frac{\partial T_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial T_1}{\partial y}$$

$$T_2(x, y) = 0 \quad (y\sqrt{Re} \rightarrow \infty)$$

APÊNDICE II

Neste apêndice é deduzida a equação da energia (4.16) expressa em variáveis de Görtler.

A equação da energia para o primeiro problema interno é:

$$(4.1) \quad U_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}$$

$$T_1(x, 0) = T_s(x) \quad \text{e} \quad T_1(x, Y) = T_\infty \quad (Y \rightarrow \infty)$$

As variáveis de Görtler são:

$$(II-1) \quad \xi = \int_0^x u_1(x) dx$$

$$(II-2) \quad \eta = \frac{u_1(x) Y}{\sqrt{2\xi}}$$

$$(II-3) \quad F_1(\xi, \eta) = \frac{\phi_1(x, Y)}{\sqrt{2\xi}}$$

$$(II-4) \quad \beta(\xi) = \frac{2 \frac{d}{dx} [u_1(x)] \int_0^x u_1(x) dx}{u_1^2(x)}$$

De (II-1) e (II-4) obtem-se de imediato:

$$(II-5) \quad \frac{d\xi}{dx} = u_1(x)$$

$$(II-6) \quad \beta(\xi) = \frac{2\xi}{u_1(x)} \frac{u_1'(x)}{u_1(x)} = \frac{2\xi}{u_1(x)} \frac{du_1(x)}{d\xi}$$

De (II-2) obtemos:

$$(II-7) \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}}$$

$$\begin{aligned} (II-8) \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{y}{\sqrt{2\xi}} \frac{d}{dx} [u_1(x)] + u_1(x) y \left[-\frac{1}{2} (2\xi)^{-3/2} 2 \frac{d\xi}{dx} \right] = \\ &= \frac{y}{\sqrt{2\xi}} u_1'(x) + \frac{y u_1^2(x)}{2\xi \sqrt{2\xi}} = \\ &= \frac{y u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \frac{u_1'(x)}{u_1(x)} - \frac{y u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \frac{u_1(x)}{2\xi} = \\ &= \eta \left(\frac{u_1'(x)}{u_1(x)} - \frac{u_1(x)}{2\xi} \right) \end{aligned}$$

Levando (II-6) em (II-8) teremos:

$$(II-9) \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta \frac{u_1(x)}{2\xi} (\beta - 1)$$

De (II-3) vem:

$$\begin{aligned}
 \text{(II-10)} \quad U_1 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[\sqrt{2\xi} F(\xi, \eta) \right] = \\
 &= \sqrt{2\xi} \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \sqrt{2\xi} \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial F}{\partial \eta} = u_1(x) \frac{\partial F}{\partial \eta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II-11)} \quad V_1 &= - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{2\xi} F(\xi, \eta) \right] = \\
 &= - \frac{1}{2} (2\xi)^{-1/2} 2 \frac{d\xi}{dx} F - \sqrt{2\xi} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\
 &= - \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} F - \sqrt{2\xi} \left[u_1(x) \frac{\partial F}{\partial \xi} + (\beta-1) \eta \frac{u_1(x)}{2\xi} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right] = \\
 &= - \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \left[F + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + (\beta-1) \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right]
 \end{aligned}$$

Da equação (4.15) obtemos:

$$T_1(\xi, \eta) = T_\infty + \Delta T_S(x) \theta(\xi, \eta)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 \text{(II-12)} \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} &= \frac{d}{dx} \left[\Delta T_S(x) \right] \theta + \Delta T_S(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\
 &= T'_S(x) \theta + \Delta T_S(x) \left[u_1(x) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + (\beta-1) \frac{u_1(x)}{2\xi} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]
 \end{aligned}$$

$$(II-13) \quad \frac{\partial T_1}{\partial Y} = \Delta T_S(x) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \Delta T_S(x) \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$(II-14) \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial Y^2} = \Delta T_S(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y} \right)^2 = \Delta T_S(x) \frac{u_1^2(x)}{2\xi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Levando (II-11 a 14) em (4.1) vem:

$$\begin{aligned} & u_1(x) \frac{\partial F}{\partial \eta} \left[T'_S(x) \theta + u_1(x) \Delta T_S(x) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + (\beta-1) \frac{u_1(x)}{2\xi} \eta \Delta T_S(x) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] - \\ & - \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \left[F + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + (\beta-1) \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right] \Delta T_S(x) \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \\ & = \frac{1}{Pr} \frac{u_1^2(x)}{2\xi} \Delta T_S(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por $\frac{u_1^2(x) \Delta T_S(x)}{2\xi}$ teremos:

$$\begin{aligned} (II-15) \quad & 2\xi \frac{T'_S(x)}{\Delta T_S(x) u_1(x)} \frac{\partial F}{\partial \eta} + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + (\beta-1) \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - F \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \\ & - 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - (\beta-1) \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

e finalmente

$$(II-16) \quad 2\xi \left[\frac{T'_s(x)}{\Delta T_s(x) u_1(x)} \theta + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] \frac{\partial F}{\partial \eta} - \left[F + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right] \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

$$\theta(\xi, 0) = 1 \quad \text{e} \quad \theta(\xi, \eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

APÊNDICE III

Neste apêndice são deduzidas as equações diferenciais do primeiro problema interno.

A equação a ser integrada é (II-16) [deduzida no apêndice II]. Nesta secção será utilizada a constante γ definida em (4.24), ou seja:

$$(4.24) \quad \gamma = \frac{1-m}{1+m}$$

A equação (II-16) e as séries para $F(\xi, \eta)$, $\theta(\xi, \eta)$ e $\lambda(\xi)$ são:

$$(III-1) \quad \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + (F + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi}) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 2\xi \frac{\partial F}{\partial \eta} \left[\theta \lambda + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right]$$

$$(III-2) \quad F(\xi, \eta) = F_0 + F_1 \xi^\gamma + F_2 \xi^{2\gamma} + F_3 \xi^{3\gamma} + \dots$$

$$(III-3) \quad \theta(\xi, \eta) = \theta_0 + \theta_1 \xi^\gamma + \theta_2 \xi^{2\gamma} + \theta_3 \xi^{3\gamma} + \dots$$

$$(III-4) \quad \lambda(\xi) = \lambda_0 \xi^{\gamma-1} + \lambda_1 \xi^{2\gamma-1} + \lambda_2 \xi^{3\gamma-1} + \dots$$

De onde se pode deduzir:

$$(III-5) \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = \lambda F_1 \xi^{\gamma-1} + 2\gamma F_2 \xi^{2\gamma-1} + 3\gamma F_3 \xi^{3\gamma-1} + \dots$$

$$(III-6) \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = F'_0 + F'_1 \xi^\gamma + F'_2 \xi^{2\gamma} + F'_3 \xi^{3\gamma} + \dots$$

$$(III-7) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \gamma \theta_1 \xi^{\gamma-1} + 2\gamma \theta_2 \xi^{2\gamma-1} + 3\gamma \theta_3 \xi^{3\gamma-1} + \dots$$

$$(III-8) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \theta'_0 + \theta'_1 \xi^\gamma + \theta'_2 \xi^{2\gamma} + \theta'_3 \xi^{3\gamma} + \dots$$

$$(III-9) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \theta''_0 + \theta''_1 \xi^\gamma + \theta''_2 \xi^{2\gamma} + \theta''_3 \xi^{3\gamma} + \dots$$

Levando (II-2 a 9) em (III-1) teremos para o lado esquerdo (L.E):

$$\begin{aligned} L.E = & \frac{1}{Pr} (\theta''_0 + \theta''_1 \xi^\gamma + \theta''_2 \xi^{2\gamma} + \theta''_3 \xi^{3\gamma} + \dots) + (F'_0 + \\ & F'_1 \xi^\gamma + F'_2 \xi^{2\gamma} + F'_3 \xi^{3\gamma} + \dots + 2\gamma F'_1 \xi^\gamma + 4\gamma F'_2 \xi^{2\gamma} + \\ & + 6\gamma F'_3 \xi^{3\gamma} + \dots) (\theta'_0 + \theta'_1 \xi^\gamma + \theta'_2 \xi^{2\gamma} + \theta'_3 \xi^{3\gamma} + \dots) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (III-10) \quad L.E = & \frac{1}{Pr} (\theta''_0 + \theta''_1 \xi^\gamma + \theta''_2 \xi^{2\gamma} + \theta''_3 \xi^{3\gamma} + \dots) + (\theta'_0 F'_0 + \\ & + \theta'_0 F'_1 \xi^\gamma + \theta'_0 F'_2 \xi^{2\gamma} + \theta'_0 F'_3 \xi^{3\gamma} + \dots + 2\gamma \theta'_0 F'_1 \xi^\gamma + \\ & + 4\gamma \theta'_0 F'_2 \xi^{2\gamma} + 6\gamma \theta'_0 F'_3 \xi^{3\gamma} + \dots + \theta'_1 F'_0 \xi^\gamma + \theta'_1 F'_1 \xi^{2\gamma} + \\ & + \theta'_1 F'_2 \xi^{3\gamma} + \dots + 2\gamma \theta'_1 F'_1 \xi^{2\gamma} + 4\gamma \theta'_1 F'_2 \xi^{3\gamma} + \dots + \\ & + \theta'_2 F'_0 \xi^{2\gamma} + \theta'_2 F'_1 \xi^{3\gamma} + \dots + 2\gamma \theta'_2 F'_1 \xi^{3\gamma} + \dots + \theta'_3 F'_0 \xi^{3\gamma} + \dots) \end{aligned}$$

Separando os fatores de iguais potências de ξ em (III-10) teremos:

$$\begin{aligned}
 \text{(III-11)} \quad L.E = & \left(\frac{1}{Pr} \theta_0'' + \theta_0' F_0 \right) + \left(\frac{1}{Pr} \theta_1'' + \theta_0' F_1 + 2\gamma \theta_0' F_1 + \theta_1' F_0 \right) \xi^\gamma + \\
 & + \left(\frac{1}{Pr} \theta_2'' + \theta_0' F_2 + 4\gamma \theta_0' F_2 + \theta_1' F_1 + 2\gamma \theta_1' F_1 + \theta_2' F_0 \right) \xi^{2\gamma} + \\
 & + \left(\frac{1}{Pr} \theta_3'' + \theta_0' F_3 + 6\gamma \theta_0' F_3 + \theta_1' F_2 + 4\gamma \theta_1' F_2 + \theta_2' F_1 + 2\gamma \theta_2' F_1 + \right. \\
 & \left. + \theta_3' F_0 \right) \xi^{3\gamma} + \dots
 \end{aligned}$$

Para o lado direito (L.D) de (III-1) teremos:

$$\begin{aligned}
 L.D = & 2\xi (F_0' + F_1' \xi^\gamma + F_2' \xi^{2\gamma} + F_3' \xi^{3\gamma} + \dots) \left[(\theta_0 + \theta_1 \xi^\gamma + \right. \\
 & + \theta_2 \xi^{2\gamma} + \theta_3 \xi^{3\gamma} + \dots) (\lambda_0 \xi^{\gamma-1} + \lambda_1 \xi^{2\gamma-1} + \lambda_2 \xi^{3\gamma-1} + \dots) + \\
 & \left. + \gamma \theta_1 \xi^{\gamma-1} + 2\gamma \theta_2 \xi^{2\gamma-1} + 3\gamma \theta_3 \xi^{3\gamma-1} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \text{(III-12)} \quad L.D = & 2 \left[(F_0' + F_1' \xi^\gamma + F_2' \xi^{2\gamma} + F_3' \xi^{3\gamma} + \dots) (\theta_0 \lambda_0 \xi^\gamma + \right. \\
 & + \theta_0 \lambda_1 \xi^{2\gamma} + \theta_0 \lambda_2 \xi^{3\gamma} + \dots + \theta_1 \lambda_0 \xi^{2\gamma} + \theta_1 \lambda_1 \xi^{3\gamma} + \dots +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \theta_2 \lambda_0 \xi^{3Y} + \dots + \gamma \theta_1 \xi^Y + 2\gamma \theta_2 \xi^{2Y} + 3\gamma \theta_3 \xi^{3Y} + \dots) \Big] = \\
& = 2(F'_0 \theta_0 \lambda_0 \xi^Y + F'_0 \theta_0 \lambda_1 \xi^{2Y} + F'_0 \theta_0 \lambda_2 \xi^{3Y} + F'_0 \theta_1 \lambda_0 \xi^{2Y} + \\
& + F'_0 \theta_1 \lambda_1 \xi^{3Y} + F'_0 \theta_2 \lambda_0 \xi^{3Y} + F'_0 \gamma \theta_1 \xi^Y + 2F'_0 \gamma \theta_2 \xi^{2Y} + \\
& + 3F'_0 \gamma \theta_3 \xi^{3Y} + \dots + F'_1 \theta_0 \lambda_0 \xi^{2Y} + F'_1 \theta_0 \lambda_1 \xi^{3Y} + F'_1 \theta_1 \lambda_0 \xi^{3Y} + \\
& + F'_1 \gamma \theta_1 \xi^{2Y} + 2F'_1 \gamma \theta_2 \xi^{3Y} + \dots + F'_2 \theta_0 \lambda_0 \xi^{3Y} + F'_2 \gamma \theta_1 \xi^{3Y} + \dots)
\end{aligned}$$

Separando os fatores de iguais potências de ξ em (III-12) teremos:

$$\begin{aligned}
\text{(III-13)} \quad L.D = & 2(F'_0 \theta_0 \lambda_0 + \gamma F'_0 \theta_1) \xi^Y + 2(F'_0 \theta_0 \lambda_1 + F'_0 \theta_1 \lambda_0 + 2\gamma F'_0 \theta_2 + \\
& + F'_1 \theta_0 \lambda_0 + \gamma F'_1 \theta_1) \xi^{2Y} + 2(F'_0 \theta_0 \lambda_2 + F'_0 \theta_1 \lambda_1 + F'_0 \theta_2 \lambda_2 + \\
& + 3\gamma F'_0 \theta_3 + F'_1 \theta_0 \lambda_1 + F'_1 \theta_1 \lambda_0 + 2\gamma F'_1 \theta_2 + F'_2 \theta_0 \lambda_0 + \gamma F'_2 \theta_1) \xi^{3Y} + \dots
\end{aligned}$$

Da igualdade de (III-11) e (III-13) requer-se a igualdade dos fatores de iguais expoentes de ξ . Da série para $\theta(\xi, n)$, dada em (III-3), e das condições de contorno (II-16) de (III-1), obtemos as equações diferenciais do primeiro problema interno com as respectivas condições de contorno:

$$\text{(III-14)} \quad \frac{1}{Pr} \theta''_0 + F'_0 \theta'_0 = 0$$

$$\theta_0(0) = 1 \quad e \quad \theta_0(n) = 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(III-15) \quad \frac{1}{Pr} \theta_1'' + F_0 \theta_1' - 2\gamma F_0' \theta_1 = -(2\gamma+1)F_1 \theta_0' + 2\lambda_0 F_0' \theta_0$$

$$\theta_1(0) = 0 \quad e \quad \theta_1(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$(III-16) \quad \frac{1}{Pr} \theta_2'' + F_0 \theta_2' - 4\gamma F_0' \theta_2 = 2\gamma F_1' \theta_1 - (2\gamma+1)F_1 \theta_1' -$$

$$- (4\gamma+1)F_2 \theta_0' + 2\lambda_0 (F_1' \theta_0 + F_0' \theta_1) + 2\lambda_1 F_0' \theta_0$$

$$\theta_2(0) = 0 \quad e \quad \theta_2(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$(III-17) \quad \frac{1}{Pr} \theta_3'' + F_0 \theta_3' - 6\gamma F_0' \theta_3 = 4\gamma F_1' \theta_2 - (2\gamma+1)F_1 \theta_2' + 2\gamma F_2' \theta_1 -$$

$$- (4\gamma+1)F_2 \theta_1' - (6\gamma+1)F_3 \theta_0' + 2\lambda_0 (F_2' \theta_0 + F_1' \theta_1 + F_0' \theta_2) +$$

$$+ 2\lambda_1 (F_1' \theta_0 + F_0' \theta_1) + 2\lambda_2 F_0' \theta_0$$

$$\theta_3(0) = 0 \quad e \quad \theta_3(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

.....

APÊNDICE IV

Neste apêndice é deduzida a série para a distribuição da temperatura na superfície da cunha.

De (4.4) e (4.5) temos:

$$(5.5) \quad \xi = \int_0^x u_1(x) dx =$$

$$= \int_0^x (ax^m + dx) dx$$

ou

$$(IV-1) \quad \xi = \frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2$$

Por outro lado de (5.1) temos

$$(5.1) \quad \frac{\frac{d}{dx} [T_s(x)]}{(T_s(x) - T_\infty) u_1(x)} = \lambda_0 \xi^{\frac{1-m}{1+m} - 1} + \lambda_1 \xi^{2\frac{1-m}{1+m} - 1} + \lambda_2 \xi^{3\frac{1-m}{1+m} - 1} + \dots$$

ou

$$(IV-2) \quad \frac{\frac{d}{dx} [T_s(x)]}{T_s(x) - T_\infty} = u_1(x) \left[\lambda_0 \xi^{-\frac{2m}{1+m}} + \lambda_1 \xi^{\frac{1-3m}{1+m}} + \lambda_2 \xi^{\frac{2-4m}{1+m}} + \dots \right]$$

De (5.5), (IV-1) e (IV-2) vem:

$$(IV-3) \quad \frac{\frac{d}{dx} [T_s(x)]}{T_s(x) - T_\infty} = (ax^m + bx) \left[\lambda_0 \left(\frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2 \right)^{-\frac{2m}{1+m}} + \right.$$

$$+ \lambda_1 \left(\frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2 \right)^{\frac{1-3m}{1+m}} + \lambda_2 \left(\frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2 \right)^{\frac{2-4m}{1+m}} + \dots \Bigg]$$

Desenvolvendo em série binomial os termos do colchete acima para [Hudson (1961), pag.10]:

$$(IV-4) \quad \left| \frac{a}{1+m} x^{1+m} \right| > \left| \frac{b}{2} x^2 \right|$$

vem:

$$(IV-5) \quad \frac{\frac{d}{dx} [T_s(x)]}{T_s(x) - T_\infty} = (ax^m + bx) \left\{ \lambda_0 \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{-2m} - \right. \right. \\ - \frac{2m}{1+m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{1+3m}{1+m}} x^{-(1+3m)} \frac{b}{2} x^2 + \dots \Bigg] + \lambda_1 \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-3m}{1+m}} x^{1-3m} + \right. \\ + \frac{1-3m}{1+m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{4m}{1+m}} x^{-4m} \frac{b}{2} x^2 + \dots \Bigg] + \lambda_2 \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{2-4m}{1+m}} x^{2-4m} + \right. \\ \left. + \frac{2-4m}{1+m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-5m}{1+m}} x^{1-5m} \frac{b}{2} x^2 + \dots \Bigg] + \dots \right\}$$

Efetuando o produto da direita de (IV-5) e tomando-se a integral de ambos os membros vem:

$$(IV-6) \quad \int_0^x \frac{dT_s(x)}{T_s(x) - T_\infty} = \int_0^x \left\{ \lambda_0 \left[a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{-m} - \right. \right. \\ - \frac{ab}{2} \left(\frac{2m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{1+3m}{1+m}} x^{1-2m} + \dots \right. \\ \left. \left. + \lambda_1 \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-3m}{1+m}} x^{1-3m} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-3m}{1+m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{4m}{1+m}} x^{-4m} \frac{b}{2} x^2 + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_2 \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{2-4m}{1+m}} x^{2-4m} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2-4m}{1+m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-5m}{1+m}} x^{1-5m} \frac{b}{2} x^2 + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right\} dx \right.$$

$$\begin{aligned}
& + b \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-2m} - \frac{b^2}{2} \left(\frac{2m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{1+3m}{1+m}} x^{2-3m} + \dots \Big] + \\
& + \lambda_1 \left[a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-3m}{1+m}} x^{1-2m} + \frac{ab}{2} \left(\frac{1-3m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{4m}{1+m}} x^{2-3m} + \dots + \right. \\
& + b \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-3m}{1+m}} x^{2-3m} + \frac{b^2}{2} \left(\frac{1-3m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{4m}{1+m}} x^{3-4m} + \dots \Big] + \\
& + \lambda_2 \left[a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{2-4m}{1+m}} x^{2-3m} + \frac{ab}{2} \left(\frac{2-4m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-5m}{1+m}} x^{3-4m} + \dots + \right. \\
& + b \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{2-4m}{1+m}} x^{3-4m} + \frac{b^2}{2} \left(\frac{2-4m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-5m}{1+m}} x^{4-5m} + \dots \Big] + \dots \} dx
\end{aligned}$$

Integrando (IV-6) obtenemos:

$$\begin{aligned}
(IV-7) \quad \ln \frac{T_s(x) - T_\infty}{T_s(0) - T_\infty} &= \lambda_0 \left[\frac{a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-m} - \right. \\
&- \frac{ab}{2(2-2m)} \left(\frac{2m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{1+3m}{1+m}} x^{2-2m} + \\
&+ \dots + \frac{b}{2-2m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{2-2m} - \frac{b^2}{2(3-3m)} \left(\frac{2m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{1+3m}{1+m}} x^{3-3m} + \dots \Big] + \\
&+ \lambda_1 \left[\frac{a}{2-2m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-3m}{1+m}} x^{2-2m} + \frac{ab}{2(3-3m)} \left(\frac{1-3m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{4m}{1+m}} x^{3-3m} + \right. \\
&+ \dots + \frac{b}{3-3m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-3m}{1+m}} x^{3-3m} + \frac{b^2}{2(4-4m)} \left(\frac{1-3m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{4m}{1+m}} x^{4-4m} + \dots \Big] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_2 \left[\frac{a}{3-3m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{2-4m}{1+m}} x^{3-3m} + \frac{ab}{2(4-4m)} \left(\frac{2-4m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-5m}{1+m}} x^{4-4m} + \right. \\
& + \dots + \frac{b}{4-4m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{2-4m}{1+m}} x^{4-4m} + \frac{b^2}{2(5-5m)} \left(\frac{2-4m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-5m}{1+m}} x^{5-5m} + \\
& \left. + \dots \right] + \dots = F(x)
\end{aligned}$$

De (IV-7) obtemos:

$$(IV-8) \quad \frac{T_S(x) - T_\infty}{T_S(0) - T_\infty} = e^{F(x)} = 1 + F(x) + \frac{1}{2}F^2(x) + \dots$$

Tendo em vista a forma de $F(x)$, dada em (IV-7), obtemos de (IV-8):

$$\begin{aligned}
\frac{T_S(x) - T_\infty}{T_S(0) - T_\infty} &= 1 + \left\{ \frac{\lambda_0 a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-m} + \right. \\
&+ \left[\frac{\lambda_0 ab}{4(1-m)} \left(\frac{-2m}{1+m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{1+3m}{1+m}} + \frac{\lambda_0 b}{2(1-m)} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} + \right. \\
&+ \left. \frac{\lambda_1 a}{2(1-m)} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-3m}{1+m}} \right] x^{2-2m} + \dots \Big\} + \\
&+ \lambda_0^2 \left[\left(\frac{a}{1-m} \right)^2 \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{4m}{1+m}} x^{2(1-m)} + o \left[x^{3(1-m)} \right] \right]
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \text{(IV-9)} \quad \frac{T_S(x) - T_\infty}{T_S(0) - T_\infty} &= 1 + \frac{\lambda_0 a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-m} + \\
 &+ \left[-\frac{\lambda_0 b m}{2(1-m)} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{-\frac{2m}{1+m}} + \frac{\lambda_0 b}{2(1-m)} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{-\frac{2m}{1+m}} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\lambda_1 a}{2(1-m)} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-3m}{1+m}} + \lambda_0^2 \left(\frac{a}{1+m}\right)^2 \left(\frac{a}{1+m}\right)^{-\frac{4m}{1+m}} \right] x^{2(1-m)} + \\
 &+ o \left[x^{3(1-m)} \right]
 \end{aligned}$$

Finalmente temos:

$$\text{(IV-10)} \quad \frac{T_S(x) - T_\infty}{T_S(0) - T_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n x^{n(1-m)}$$

onde

$$\text{(IV-11)} \quad \tau_0 = 1$$

$$\text{(IV-12)} \quad \tau_1 = \lambda_0 \left(\frac{1+m}{1-m}\right) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}}$$

$$\text{(IV-13)} \quad \tau_2 = \frac{\lambda_0}{2} \frac{b}{a} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} + \left[\frac{\lambda_1}{2} \frac{1+m}{1-m} + \lambda_0^2 \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^2 \right] \left(\frac{a}{1+m}\right)^{2\frac{1-m}{1+m}}$$

.....

APÊNDICE V

Neste apêndice é deduzida a equação diferencial para $G_1(\eta)$ do segundo problema interno.

A equação da energia para o segundo problema interno com as respectivas condições de contorno é dada pela equação (6.1) i.e.

$$(6.1) \quad \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_2}{\partial Y^2} - U_1 \frac{\partial T_2}{\partial X} - V_1 \frac{\partial T_2}{\partial Y} = U_2 \frac{\partial T_1}{\partial X} + V_2 \frac{\partial T_1}{\partial Y}$$

$$T_2(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad T_2(x, Y) = 0 \quad (Y \rightarrow \infty)$$

As expressões para as velocidades U_1 , V_1 , U_2 e V_2 não serão aqui deduzidas visto que podem ser obtidas de Abreu (1967) através das equações (7F), (6F), (10F) e (14F), respectivamente. Estas, são apresentadas abaixo sob formas ligeiramente modificadas.

Assim temos [V. Abreu (1967) - Apêndice F)]

$$(V-1) \quad U_1(x, \eta) = a F'_0 x^m + \left[a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} F'_1 + b F'_0 \right] x + \dots$$

$$(V-2) \quad V_1(x, \eta) = - \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \left[(1+m) F_0 - \eta (1-m) F'_0 \right] \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} x^{-\frac{1}{2}(1-m)} + \right. \\ \left. + \left\{ \left[(3-m)(1+m) F_0 + (1-m)(5-3m) \eta F'_0 \right] \frac{b}{4a} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} + \right. \right.$$

$$+ \left[(3-m)F_1 - (1-m)\eta F_1' \right] \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1-m}{1+m}} x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots \}$$

$$(V-3) \quad U_2(x, \eta) = \left[\sqrt{2} \frac{\omega_0}{a} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \eta + \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-1/2} H_1' \right] x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots$$

$$(V-4) \quad V_2(x, \eta) = \left[(m-1)H_1 + \frac{1}{2} \eta (1-m)H_1' \right] x^{-m} + \dots$$

De (II-12) e (II-6) obtemos:

$$(V-5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} &= T_S'(x) \theta(\xi, \eta) + \Delta T_S(x) \left[u_1(x) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{2\xi}{u_1^2(x)} \frac{du_1(x)}{dx} - 1 \right) \frac{u_1(x)}{2\xi} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] = \\ &= T_S'(x) \left[\theta_0 + \theta_1 \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots \right] + 2\Delta T_S(x) \frac{u_1(x)}{2\xi} \frac{1-m}{1+m} \left[\theta_1 \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots \right] + \\ &+ \Delta T_S(x) \eta \left[\frac{du_1(x)/dx}{u_1(x)} - \frac{u_1(x)}{2\xi} \right] \left[\theta_0' + \theta_1' \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots \right] \end{aligned}$$

Faremos, em seguida, os desenvolvimentos binomiais de todos os fatores que entram em (V-5) separadamente.

Assim teremos, tendo em vista (IV-9) e que $T_S(x)$ e $\dots$ $\Delta T_S(x)$ são aqui tornados adimensionais por $(t_s(0) - t_\infty)$:

$$(V-6) \quad \frac{dT_s(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[1 + \frac{\lambda_0 a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] =$$

$$= \lambda_0 a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{-m} + \dots$$

$$(V-7) \quad \theta_0 + \theta_1 \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots = \theta_0 + \theta_1 \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] + \dots$$

$$(V-8) \quad \Delta T_s(x) = 1 + \frac{\lambda_0 a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-m} + \dots$$

$$(V-9) \quad \begin{aligned} \frac{u_1(x)}{2\xi} &= \frac{1}{2} (ax^m + bx) \left(\frac{a}{1+m} x^m + \frac{b}{2} x^2 \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} (ax^m + bx) \left[\frac{1+m}{a} x^{-1-m} - \frac{b}{2} x^2 \left(\frac{1+m}{a} \right)^2 x^{-2-2m} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(1+m) x^{-1} - \frac{b}{2a} (1+m)^2 x^{-m} + \frac{b}{a} (1+m) x^{-m} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(1+m) x^{-1} + \frac{b}{2a} (1+m) (1-m) x^{-m} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{2} (1+m) x^{-1} + \frac{b}{4a} (1-m^2) x^{-m} + \dots \end{aligned}$$

$$(V-10) \quad \theta_1 \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots = \theta_1 \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] + \dots$$

$$(V-11) \quad \frac{du_1(x)/dx}{u_1(x)} - \frac{u_1(x)}{2\xi} = (amx^{m-1} + b) (ax^m + bx)^{-1} - \frac{u_1(x)}{2\xi}$$

De (V-11) e (V-9) obtemos:

$$\begin{aligned}
 (V-12) \quad & \frac{du_1(x)/dx}{u_1(x)} - \frac{u_1(x)}{2\xi} = (amx^{m-1} + b)(a^{-1}x^{-m} - ba^{-2}x^{1-2m} + \dots) - \\
 & - \frac{1}{2}(1+m)x^{-1} - \frac{b}{4a}(1-m^2)x^{-m} - \dots = \\
 & = mx^{-1} - \frac{bm}{a}x^{-m} + \frac{b}{a}x^{-m} - \frac{1}{2}(1+m)x^{-1} - \frac{b}{4a}(1-m^2)x^{-m} = \\
 & = -\frac{1}{2}(1-m)x^{-1} + \frac{b}{4a}(1-m)(3-m)x^{-m} + \dots
 \end{aligned}$$

$$(V-13) \quad \theta'_0 + \theta'_1 \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots = \theta'_0 + \theta'_0 \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] + \dots$$

Levando (V-6) a (V-13) em (V-5) vem:

$$\begin{aligned}
 (V-14) \quad & \frac{\partial T_1}{\partial x} = \left[\lambda_0 a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{-m} + \dots \right] \left[\theta_0 + \theta_1 \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] + \\
 & + 2 \frac{1-m}{1+m} \left[1 + \frac{\lambda_0 a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] \left[\frac{1}{2}(1+m)x^{-1} + \right. \\
 & \left. + \frac{b}{4a}(1-m^2)x^{-m} + \dots \right] \cdot \left[\theta_1 \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ \eta \left[1 + \frac{\lambda_0 a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] \cdot \left[-\frac{1}{2}(1-m)x^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{4a}(1-m)(3-m) + \dots \right] \left[\theta'_0 + \theta'_1 \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] =$$

$$= \lambda_0 \theta_0 a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{-m} + \dots + 2 \frac{1-m}{1+m} \left[\frac{1}{2}(1+m)x^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{4a}(1-m)^2 x^{-m} + \frac{1}{2} \lambda_0 a \left(\frac{1+m}{1-m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{-m} + \dots \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\theta_1 \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] - \eta \left\{ \left[\frac{1}{2}(1-m) \theta'_0 x^{-1} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(1-m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} \theta'_1 x^{-m} - \frac{b}{4a}(1-m)(3-m) \theta'_0 x^{-m} + \dots \right] \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \lambda_0 \left(\frac{a}{1-m} \right) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] \} =$$

$$= \lambda_0 \theta_0 a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{-m} + \dots + \frac{1-m}{1+m} \left[(1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} \theta_1 x^{-m} + \dots \right] -$$

$$\begin{aligned}
&= \eta \left[\frac{1}{2}(1-m) \theta'_0 x^{-1} + \frac{1}{2}(1-m) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} \theta'_1 x^{-m} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{b}{4a}(1-m)(3-m) \theta'_0 x^{-m} + \frac{1}{2} \lambda_0 a \left(\frac{a}{1+m}\right)^{-\frac{2m}{1+m}} \theta'_0 x^{-m} + \dots \right]
\end{aligned}$$

e finalmente, após algumas simplificações em (V-14), vem:

$$\begin{aligned}
(V-15) \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} &= \left[\lambda_0 (1+m) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} (\theta'_0 - \frac{1}{2} \eta \theta'_0) + (1-m) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} \times \right. \\
&\quad \times (\theta'_1 - \frac{1}{2} \eta \theta'_1) + \eta (1-m)(3-m) \frac{b}{4a} \theta'_0 \left. \right] x^{-m} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \eta (1-m) \theta'_0 x^{-1} + \dots
\end{aligned}$$

De (II-13), (V-8) e (V-13) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial Y} &= \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \Delta T_S(x) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \\
&= \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \Delta T_S(x) (\theta'_0 + \theta'_1 \xi^{\frac{1-m}{1+m}} + \dots) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (ax^m + bx) \left(\frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2\right)^{-1/2} \cdot \left[1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_0 a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{-\frac{2m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] \cdot \left[\theta'_0 + \theta'_1 \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} x^{1-m} + \dots \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (ax^m + bx) \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{-1/2} x^{-\frac{1}{2}(1+m)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-3/2} x^{-\frac{3}{2}(1+m)} \frac{b}{2} x^2 + \dots \right] \cdot \left[\theta'_0 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_0 a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} \theta'_0 x^{1-m} + \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} \theta'_1 x^{1-m} + \dots \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-1/2} x^{-\frac{1}{2}(1-m)} - \dots \right] \cdot \left[\theta'_0 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_0 a}{1-m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{2m}{1+m}} \theta'_0 x^{1-m} + \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} \theta'_1 x^{1-m} + \dots \right]
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
(V-16) \quad \frac{\partial T_1}{\partial Y} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-1/2} \theta'_0 x^{-\frac{1}{2}(1-m)} + \right. \\
&\quad + \frac{\lambda_0 a^2}{1-m} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-\frac{1+5m}{1+m}} \theta'_0 x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \\
&\quad \left. + a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1}{2} \left(\frac{1-3m}{1+m} \right)} \theta'_1 x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots \right]
\end{aligned}$$

A expansão para a temperatura interna de segunda ordem é dada por (6.4), i.e.

$$(6.4) \quad T_2(x, \eta) = G_1(\eta) x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + G_2(\eta) x^{\frac{1}{2}(3-5m)} + \dots$$

Logo de (6.4) e (II-8) teremos:

$$(V-17) \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \eta \left(\frac{du_1(x)/dx}{u_1(x)} - \frac{u_1(x)}{2\xi} \right) \frac{\partial T_2}{\partial \eta}$$

De (6.4) e (V-12) vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial x} &= \frac{1}{2}(1-3m) G_1 x^{-\frac{1}{2}(1+3m)} + \frac{1}{2}(3-5m) G_2 x^{\frac{1}{2}(1-5m)} + \dots + \\ &+ \eta \left[-\frac{1}{2}(1-m) x^{-1} + \frac{b}{4a}(1-m)(3-m) x^{-m} + \dots \right] \cdot \\ &\cdot \left[G_1' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + G_2' x^{\frac{1}{2}(3-5m)} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{2}(1-3m) G_1' x^{-\frac{1}{2}(1+3m)} + \frac{1}{2}(3-5m) G_2' x^{\frac{1}{2}(1-5m)} - \\ &- \frac{1}{2} \eta (1-m) G_1' x^{-\frac{1}{2}(1+3m)} - \frac{1}{2} \eta (1-m) G_2' x^{\frac{1}{2}(1-5m)} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{b}{4a} \eta(1-m)(3-m) G_1' x^{\frac{1}{2}(1-5m)} + \dots$$

ou seja

$$(V-18) \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[(1-3m) G_1 - (1-m) \eta G_1' \right] x^{-\frac{1}{2}(1+3m)} + O \left[x^{\frac{1}{2}(1-5m)} \right]$$

De (7.4) e (II-7) obtemos:

$$(V-19) \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_1(x)}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial T_2}{\partial y}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (ax^m + bx) \left(\frac{a}{1+m} x^{1+m} + \frac{b}{2} x^2 \right)^{-1/2} \left[G_1' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \right. \\ &+ G_2' x^{\frac{1}{2}(3-5m)} + \dots \left. \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} (ax^m + bx) \left[\left(\frac{a}{1+m} \right)^{-1/2} x^{-\frac{1}{2}(1+m)} - \right. \\ &- \frac{b}{4} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-3/2} x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \dots \left. \right] \cdot \left[G_1' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \right. \\ &+ G_2' x^{\frac{1}{2}(3-5m)} + \dots \left. \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} x^{-\frac{1}{2}(1-m)} + \right. \\ &+ (1+m)(3-m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \frac{b}{4a} x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots \left. \right] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[G_1' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + G_2' x^{\frac{1}{2}(3-5m)} + \dots \right] = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \left[x^{-\frac{1}{2}(1-m)} + (3-m) \frac{b}{4a} x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots \right] \cdot \\
& \cdot \left[G_1' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + G_2' x^{\frac{1}{2}(3-5m)} + \dots \right]
\end{aligned}$$

ou

$$(V-20) \quad \frac{\partial T_2}{\partial Y} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \left[G_1' x^{-m} + G_1' (3-m) \frac{b}{4a} x^{1-2m} + \dots \right]$$

De (6.4), (II-7) e (V-9) obtemos:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y} \right)^2 = u_1(x) \frac{u_1(x)}{2\xi} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \eta^2}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T_2}{\partial Y^2} &= \frac{1}{2} (ax^m + bx) \left[\frac{1}{2} (1+m) x^{-1} + \frac{b}{4a} (1-m^2) x^{-m} - \right. \\
&- \left. \frac{b^2}{2a^2} (1+m)^2 x^{1-2m} + \dots \right] \cdot \left[G_1'' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + G_2'' x^{\frac{1}{2}(3-5m)} + \dots \right] = \\
&= \left[\frac{1}{2} a (1+m) x^{-(1-m)} + (1+m) (3-m) \frac{b}{4} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (1+m)(1+3m) \frac{b^2}{4a} x^{1-m} + \dots \Big] \cdot \left[G_1'' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \right. \\
& \left. + G_2'' x^{\frac{1}{2}(3-5m)} + \dots \right]
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
(V-21) \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} &= (1+m) \left[(3-m) \frac{b}{4} G_1'' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \frac{a}{2} G_1'' x^{-\frac{1}{2}(1+m)} + \right. \\
&\left. + C \left[x^{\frac{1}{2}(3-5m)} \right] \right]
\end{aligned}$$

Levando em (6.1) as equações (V-21), (V-1 e 2) e (V-18 e 19) obteremos para o lado esquerdo (L.E):

$$\begin{aligned}
(V-22) \quad L.E &= \frac{1}{Pr}(1+m) \left[(3-m) \frac{b}{4} G_1'' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \frac{a}{2} G_1'' x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots \right] - \\
&- \left\{ a F_O' x^m + \left[a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} F_1' + b F_O' \right] x + \dots \right\} \left\{ \frac{1}{2} \left[(1-3m) G_1 - \right. \right. \\
&- \left. \left. (1-m) \eta G_1' \right] x^{-\frac{1}{2}(1+3m)} + \dots \right\} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \left[(1+m) F_O - \eta (1-m) F_O' \right] \cdot \right. \\
&\left. \cdot \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} x^{-\frac{1}{2}(1-m)} + \left[(3-m)(1+m) F_O + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-m)(5-3m) \eta F'_O \left] \frac{b}{4a} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} + \left[(3-m) F_1 - (1-m) \eta F'_1 \right] \circ \\
& \circ \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1-m}{1+m}} \left] x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots \} \circ \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \left[G'_1 x^{-m} + \right. \right. \\
& \left. \left. + G'_1 (3-m) \frac{b}{4a} x^{1-2m} + \dots \right] \right\}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
(V-23) \quad L.E = & \frac{1}{Pr} (1+m) \left[(3-m) \frac{b}{4a} G''_1 x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \frac{a}{2} G''_1 x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots \right] \\
& - \left\{ \frac{1}{2} \left[(1-3m) G_1 - \eta (1-m) G'_1 \right] a F'_O x^{-\frac{1}{2}(1+m)} + \right. \\
& + \left[\eta (1-m) (3-m) \frac{b}{4} F'_O G'_1 + \dots \right] x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \frac{1}{2} \left[b F'_O + \right. \\
& + a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{1+m}} F'_1 \left] \left[(1-3m) G_1 - \eta (1-m) G'_1 \right] x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \dots \} + \\
& + \frac{1}{2} (1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \left\{ \left[(1+m) F_O - \eta (1-m) F'_O \right] \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} G'_1 x^{-\frac{1}{2}(1+m)} + \right. \\
& + \left. \left[(3-m) (1+m) F_O + (1-m) (5-3m) \eta F'_O \right] \circ \right.
\end{aligned}$$

$$\circ \frac{b}{4a} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} G_1' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \left[(3-m) F_1 - (1-m) \eta F_1' \right] \circ$$

$$\circ \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1-m}{1+m} G_1' x x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \left[(1+m) F_0 - \right.$$

$$\left. - \eta(1-m) F_0' \right] \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} (3-m) \frac{b}{4a} G_1' x^{\frac{1}{2}(1-3m)} + \dots \}$$

Levando em (6.1) as equações (V-3 e 4) e (V-15 e 16) obteremos para o lado direito (L.D):

$$L.D = \left\{ \left[\sqrt{2} \frac{w_0}{a} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} \eta + \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{-1/2} H_1' \right] x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots \right\} \circ$$

$$\circ \left\{ \left[\lambda_0 (1+m) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} (\theta_0 - \frac{1}{2} \eta \theta_0') + (1-m) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1-m}{1+m}} (\theta_1 - \frac{1}{2} \eta \theta_1') + \right. \right.$$

$$\left. + \eta(1-m) (3-m) \frac{b}{4a} \theta_0' \right] x^{-m} - \frac{1}{2} \eta(1-m) \theta_0' x^{-1} + \dots \} +$$

$$+ \left\{ \left[(m-1) H_1 + \frac{1}{2} \eta(1-m) H_j' \right] x^{-m} + \dots \right\} \circ$$

$$\circ \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \left[a \left(\frac{a}{1+m}\right)^{-1/2} \theta_0' x^{-\frac{1}{2}(1-m)} + \frac{\lambda_0 a^2}{1-m} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{-\frac{1+5m}{1+m}} \theta_0' x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \right. \right.$$

$$\left. + a \left(\frac{a}{1+m}\right)^{\frac{1}{2} \left(\frac{1-3m}{1+m}\right)} \theta_1' x^{\frac{1}{2}(1-m)} + \dots \right] \}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 (V-24) \quad L.D = & \left\{ -\frac{1}{2} \eta(1-m) \theta'_0 \left[\sqrt{2} \frac{\omega_0}{a} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \eta + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{\sqrt{2}}{2} a \left(\frac{a}{1+m} \right)^{-1/2} H'_1 \right] x^{-\frac{1}{2}(1+m)} + O \left[x^{\frac{1}{2}(1-3m)} \right] \right\} + \\
 & + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \left[(m-1) H_1 + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{1}{2} (1-m) \eta H'_1 \right] \theta'_0 x^{-\frac{1}{2}(1+m)} + O \left[x^{\frac{1}{2}(1-3m)} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Comparando os termos de (V-23) e (V-24) concluímos que os fatores de $x^{-\frac{1}{2}(1+m)}$ devem ser iguais e portanto temos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Pr} (1+m) \frac{a}{2} G''_1 - \frac{1}{2} \left[(1-3m) G_1 - \eta(1-m) G'_1 \right] a F'_0 + \\
 & + \frac{1}{2} (1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \left[(1+m) F_0 - \eta(1-m) F'_0 \right] \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} G'_1 = \\
 & = -\frac{1}{2} \eta(1-m) \theta'_0 \left[\sqrt{2} \frac{\omega_0}{a} \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \eta + \right. \\
 & + \left. \frac{\sqrt{2}}{2} (1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} H'_1 \right] + \frac{\sqrt{2}}{2} (1+m) \left(\frac{a}{1+m} \right)^{1/2} \theta'_0 \left[-(1-m) (H_1 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \eta H'_1) \right]
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} (1+m) a G_1'' - (1-3m) a F_O' G_1 + \eta (1-m) a F_O' G_1' + a (1+m) F_O G_1' - \\ & - \eta (1-m) a F_O' G_1' = - (1-m) \eta^2 \theta_o' \sqrt{2} \frac{\omega_o}{a} \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2} (1-m) \eta \theta_o' (1+m) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} H_1' - \sqrt{2} (1+m) (1-m) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} \theta_o' H_1 + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} (1+m) (1-m) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} \eta \theta_o' H_1' \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} G_1'' + F_O G_1' - \frac{1-3m}{1+m} F_O' G_1 = - \sqrt{2} \left(\frac{1-m}{1+m}\right) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} \frac{\omega_o}{a^2} \eta^2 \theta_o' - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{a} (1-m) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} \theta_o' H_1 \end{aligned}$$

e finalmente a equação para $G_1(\eta)$ com as respectivas condições de contorno obtidas de (6.4) e (6.1):

$$\begin{aligned} (V-25) \quad & \frac{1}{Pr} G_1'' + F_O G_1' - \frac{1-3m}{1+m} F_O' G_1 = \\ & = - \frac{\sqrt{2}}{a} \left(\frac{1-m}{1+m}\right) \left(\frac{a}{1+m}\right)^{1/2} \left[\frac{\omega_o}{a} \eta^2 + (1+m) H_1 \right] \theta_o' \end{aligned}$$

$$G_1(0) = 0 \quad e \quad G_1(\eta) = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Observação: Expandindo-se todos os termos que aparecem na equação (6.1), até ordens superiores àquelas que aparecem na dedução acima, tanto o lado esquerdo quanto o lado direito de (6.1) podem ser expressos por:

$$(V-26) \quad L.E = L.D = \frac{1}{x} \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n x^{\frac{n}{2}(1-m)}$$

A equação diferencial para $G_1(n)$ — (V-25) — aparece no primeiro termo de (V-26). No segundo termo, aparecerá a equação para $G_2(n)$, e assim sucessivamente para $G_3, G_4 \dots$.

NOTAÇÃO

a	= constante adimensional - V.(4.4)
b	= $\frac{\omega_0}{2} \operatorname{tg} \alpha$
$B_1(\eta)$	= solução de (7.15)
c	= calor específico à pressão constante
e	= termo de ordem <u>e</u> de uma expansão externa
$F(\xi, \eta)$	= $\frac{\phi_1(x, Y)}{\sqrt{2\xi}}$
$F_0(\eta)$	= solução da equação de Falkner - Skan - V.(4.13)
$F_1(\eta)$	= solução de (4.14)
$f_1(\eta)$	= $\frac{F_1(\eta)}{\beta_1}$
$G_1(\eta)$	= solução de (6.6)
h	= coeficiente de convecção
$H_1(\eta)$	= solução de (6.3)
i	= termo de ordem <u>i</u> de uma expansão interna
k	= coeficiente de condutividade térmica.
L'	= comprimento de referência - dimensional
$L_0(\eta)$	= solução de (7.16)
L.D	= lado direito de uma igualdade

L.E = lado esquerdo de uma igualdade

$$m = \frac{\alpha}{\pi - \alpha}$$

Nu = número de Nusselt

$$Nu(x') = \frac{h(x')x'}{k} - \text{número de Nusselt local}$$

Nu_1, Nu_2 = primeira e segunda aproximação para Nu

p' = pressão — dimensional

$$Pr = \frac{\mu C}{k} - \text{número de Prandtl}$$

q = fluxo de calor por unidade de área na cunha

q_1, q_2 = primeira e segunda aproximação para q

r = coordenada polar radial - adimensional

$$Re = \frac{u'_0 L'}{v} - \text{número de Reynolds}$$

$$Re_{x'} = \frac{u'_1(x)x'}{v} - \text{número de Reynolds local}$$

t = temperatura — dimensional

$$t_1(\xi, \eta) = t_r T_1(\xi, \eta)$$

$t_1(\eta)$ = solução de (9.5)

$t_s(x'), t_o$ = temperatura na superfície da cunha - dimensional

t_∞ = temperatura do fluido, longe da cunha - dimensional

t_r = temperatura de referência

$$T = \frac{t}{t_r}$$

$$T_s(x), T_o = \frac{t_s(x')}{t_r}, \frac{t_o}{t_r}$$

T_{∞}	$= \frac{t_{\infty}}{t_r}$
T_1, T_2	= primeira e segunda aproximação para a temperatura externa
$\Delta T_s(x)$	$= T_s(x) - T_{\infty}$
u	= componente-x da velocidade — adimensional
u'	$= u'_0 u$
u'_0	= velocidade de referência — dimensional
$u_1(x)$	$= ax^m + bx$
$u'_1(x)$	$= u'_0 u_1(x)$
u_1, u_2	= primeira e segunda aproximação da componente-x da velocidade externa
U_1, U_2	= primeira e segunda aproximação da componente-x da velocidade interna
v	= componente-y da velocidade — adimensional
v'	$= u'_0 v$
v_1, v_2	= primeira e segunda aproximação da componente-y da velocidade externa
V_1, V_2	= primeira e segunda aproximação da componente-y da velocidade interna
x', y'	= coordenadas cartesianas — dimensionais — V.fig.1
x, y	$= \frac{x'}{L}, \frac{y'}{L}$

γ = $\frac{Y}{\epsilon}$ - coordenada interna

$z(x)$ = solução de (7.1a)

α = semi-ângulo da cunha

$\beta(\xi)$ = função principal de Görtler — V.(4.8)

$\beta_0, \beta_1, \dots$ = coeficientes adimensionais da série para $\beta(\xi)$ — V.(4.10), (4.11)...

γ = $\frac{1-m}{1+m}$

δ_t = espessura da camada limite térmica — adimensional

δ'_t = $L' \delta_t$

ϵ = $\frac{1}{\sqrt{Re}}$
 η = $\frac{u_1(x) \gamma}{\sqrt{2\xi}}$

η_δ = solução de (9.7)

$\theta(\xi, \eta)$ = $\frac{T_1(\xi, \eta) - T_\infty}{T_s(x) - T_\infty}$

$\theta_0, \theta_1, \dots$ = solução de (4.20), (4.21)...

T_1, T_2 = primeira e segunda aproximação para a temperatura interna

$\lambda(\xi)$ = função principal térmica - V.(4.17)

$\lambda_0, \lambda_1, \dots$ = coeficientes adimensionais da série para $\lambda(\xi)$ — V.(5.5), (5.6), ...

μ = viscosidade absoluta

ν = $\frac{\mu}{\rho}$ - viscosidade cinemática

ξ = $\int_0^x u_1(x) dx$

ρ = massa específica

$\tau_1, \tau_2, \dots$ = coeficientes adimensionais — V.(5.2), (5.3), (5.4),...

$\phi_1(\xi, \eta)$ = primeira aproximação para a função de corrente interna — adimensional

$\phi_2(x, \eta)$ = segunda aproximação para a função de corrente interna adimensional

ω' = vorticidade — dimensional

ω_o' = vorticidade constante — dimensional

ω = $\frac{\omega' L'}{u_o'}$

ω_o = $\frac{\omega_o' L'}{u_o'}$

BIBLIOGRAFIA

Abreu, L.S.P., *Asymptotic Expansions at Vanishingly Small Viscosity for the Constant Vorticity Flow over an Infinite Wedge*, Ph.D. thesis, Cornell University (1967).

Ames, W.F., *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press (1965).

Cole, J.D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell (1968).

Devan, L., *Phys.Fluids*, 8, 2211 (1965).

Eckert, E.R.G. & Drake, R.M., *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, (1959).

Evans, H.L., *Laminar Boundary Layer Theory*, Addison-Wesley (1968).

Gebhart, B., *Heat Transfer*, McGraw-Hill (1961).

Görtler, H., *J.Math.Mech.* 7, 1 (1957).

Hudson, R.G., *Manual do Engenheiro, Ao Livro Técnico* (1961).

Mark, R.M., *J.Fluid Mech.* 14, 452 (1962).

Mark, R.M., *J.Fluid Mech.* 25, 457 (1966).

Merk, H.J., *J.Fluid Mech.* 5, 460 (1959).

Murray, J.D., *J.Fluid Mech.* 11, 309 (1961).

Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill (1960).

Sparrow, E.M., *J.Aero Sci.* 25, 71 (1958a).

Sparrow, E.M., *J.Fluid Mech.* 4, 321 (1958b).

Ting, Lu., *Phys.Fluids* 3, 78 (1960).

Toomre, A., *J.Fluid Mech.* 19, 1 (1964).

Van Dyke, M., *J.Fluid Mech.* 14, 161 (1962a).

Van Dyke, M., *J.Fluid Mech.* 14, 481 (1962b).

Van Dyke, M., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press (1964).

Tese apresentada aos Srs:

Visto e permitida a impressão

Rio de Janeiro, ____ / ____ / ____

Coordenador dos Programas de Pós-Graduação e
Pesquisas do Centro Técnico Científico