

6

Processos Estocásticos

Um processo estocástico $X = \{ X(t), t \in T \}$ é uma coleção de variáveis aleatórias. Ou seja, para cada t no conjunto de índices T , $X(t)$ é uma variável aleatória. Geralmente t é interpretado como tempo e $X(t)$ é chamado de **estado do processo** no tempo t . Uma realização de $X(t)$ num intervalo de tempo é chamada de amostra de caminho (*sample path*).

Quando o conjunto de índices T é um conjunto contável, temos um processo estocástico em tempo discreto. Se esse conjunto for contínuo, o processo será um processo estocástico contínuo.

Os processos estocásticos podem ser classificados da seguinte maneira:

- Processos estacionários: as propriedades estatísticas; média e variância, da variável são constantes; e
- Processos não estacionários: o valor esperado da variável aleatória pode crescer sem limite e sua variância, T anos à frente, aumenta com T .

Uma definição mais formal poderia ser dada da seguinte forma: um processo estocástico é definido por uma lei de probabilidade de evolução da variável $X(t)$, a variável X a cada tempo t . Ou seja, para os tempos $t_1 < t_2 < t_3$, etc., é possível calcular a probabilidade correspondente aos valores x_1, x_2, x_3 , etc., estarem em um intervalo específico, por exemplo:

$$\text{prob} (a_1 < x_1 \leq b_1, a_2 < x_2 \leq x_2, \dots)$$

Sendo assim, quando o tempo t_1 chegar e o atual valor de X_1 for observado, é possível ter a condição de probabilidade de futuros eventos com essa informação.

Pode-se ver um processo estocástico $X(t)$ como uma previsão de $E[X(t)]$ mais um erro dessa previsão, ou seja:

$$X(t) = E[X(t)] + \text{erro}(t) \quad \text{eq. (1)}$$

Com isso faz-se necessário calcular para cada processo estocástico sua tendência e sua volatilidade.

6.1.

Principais Processos Estocásticos

A seguir serão apresentados os principais processos estocásticos utilizados para simular os preços, dentre eles estão o Movimento Geométrico Browniano e o Movimento de Reversão a Média.

6.1.1.

Processo de Markov

Este é um tipo de processo estocástico onde somente o valor corrente de uma variável é relevante para prever o futuro, a propriedade de Markov nos diz que a distribuição de probabilidades dos preços em qualquer tempo no futuro depende única e exclusivamente do preço atual. Sua vantagem é que ele simplifica a análise de processos estocásticos.

Uma definição mais formal: considere um processo em tempo discreto $\{X_1, X_2, \dots, X_t\}$ com distribuição de probabilidade conjunta $F(x_1, x_2, \dots, x_t)$. Este processo é considerado de Markov se as suas probabilidades condicionais satisfazem as seguintes propriedades:

$$P(X_{t+S} \leq x_{t+S} / x_t, \dots, x_1) = P(X_{t+S} \leq x_{t+S} / x_t)$$

Onde, $P(. / I_t)$, representa a probabilidade condicional ao conjunto de informações I_t .

Esse processo é considerado importante para o mercado financeiro, pois neste ambiente considera-se que todas as informações passadas sobre o preço de um determinado ativo estão contidas no valor atual do mesmo. Sendo assim

qualquer previsão do futuro será baseada somente no valor corrente do ativo, desconsiderando os valores anteriores.

Será visto que o Random Walk, o AR (1) e o Processo de Wiener são chamados de processo de Markov, pois satisfazem sua propriedade.

6.1.2.

Random Walk

Este é um processo em tempo discreto e estado discreto, nesse tipo de processo X_t é uma variável aleatória e X_0 é conhecida em $t=0$.

O comportamento se X_t pode ser descrito da seguinte forma: X_t assume saltos de tamanho 1 para cima ou para baixo, sempre com probabilidade $1/2$, e estes são independentes entre si.

Como os saltos são independentes pode-se descrever a dinâmica de X_t da seguinte forma:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{eq. (2)}$$

Onde ε_t é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\text{prob}(\varepsilon_t = 1) = \text{prob}(\varepsilon_t = -1) = \frac{1}{2}$$

A distribuição de probabilidade de X_t pode ser encontrada na distribuição binomial. Onde para t passos a probabilidade de se terem n saltos negativos e, consequentemente, $t-n$ saltos positivos é:

$$\binom{t}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{t-n} = \binom{t}{n} 2^{-t}$$

Se $x_0 = 0$ então o valor esperado de X_t é igual à zero, pois a probabilidade de subida e descida é a mesma:

$$E_0(x_t) = 0$$

Podemos verificar pela equação (2) que esse processo satisfaz a propriedade de Markov, pois a distribuição de probabilidade de X_{t+1} depende somente da

distribuição de X no tempo t . Por exemplo, se $X_t = 6$, então X_{t+1} só poderá ser 5 ou 7, tendo cada possibilidade iguais chances de ocorrer. Os valores X_{t-1} , X_{t-2} , etc. são irrelevantes uma vez que sabemos X_t .

Uma possível generalização desse processo poderia ser feita alterando os valores de p e q , onde $q = 1 - p$. Caso $p > q$, ter-se-ia um *random walk* com *drift*, e $E_0(x_t) > 0$.

Outra generalização seria fazer com que o tamanho do salto em cada t fosse uma variável aleatória contínua. Caso esse salto tenha uma distribuição normal com média zero e desvio padrão σ , o processo é conhecido como processo estocástico em tempo contínuo e estado discreto, e um exemplo desse tipo de processo será visto a seguir.

6.1.3.

Processo Autoregressivo de Primeira Ordem (AR 1)

Esse tipo de processo estocástico é em tempo discreto e variável contínua, e é um processo de Reversão à Média, pois X no longo prazo tende a um valor constante.

A dinâmica de X_t pode ser escrita da seguinte forma:

$$x_t = \delta + \rho x_{t-1} + \xi_t \quad \text{eq. (3)}$$

Onde:

- ρ e ξ são constantes,
- $-1 < \rho < 1$,
- $\xi \sim N(0,1)$.

Pela equação (3) podemos verificar que esse processo satisfaz a propriedade de Markov de maneira similar a que foi vista no processo Random Walk.

O valor esperado de X_t de longo prazo será:

$$E_0(X_n) = \frac{\delta}{1 - \rho}$$

6.1.4.

Processo de Wiener

O Processo de Wiener, também conhecido como Movimento Browniano, é um processo de tempo contínuo e possui três propriedades importantes:

- É um processo de Markov (mais adiante será visto o porquê dessa afirmação), assim tudo o que se precisa saber para fazer uma boa previsão do valor futuro da variável é a sua distribuição de probabilidade e o seu valor atual;
- Possui incrementos independentes; e
- Mudanças sobre qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídas, com uma **variância que aumenta linearmente** com o intervalo de tempo, ou seja, é um processo estocástico não estacionário.

Mais formalmente, seja uma variável aleatória Z que segue um processo de Wiener, então ela possui as seguintes propriedades:

- A relação entre ΔZ e Δt é dada por: $\Delta Z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, onde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$; e
- A variável aleatória ε_t não possui correlação serial, ou seja, $E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, para $t \neq s$. Dessa forma, os valores de ΔZ para quaisquer intervalos diferentes são independentes, de forma que $Z(t)$ segue um processo de Markov.

Dessa propriedade segue que, ΔZ tem distribuição normal com média 0 e variância igual a Δt , ou seja, pode-se concluir que os incrementos seguem uma distribuição normal com os parâmetros, $\Delta Z \sim N(0, \Delta t)$.

Se considerarmos um intervalo de tempo $\Delta t \rightarrow 0$, o incremento do processo de Wiener pode ser representado em tempo contínuo:

$$\begin{aligned} dz &= \varepsilon_t \sqrt{dt} \\ E(dz) &= 0 \\ \text{Var}(dz) &= dt \quad \Leftrightarrow \quad dz \sim N(0, dt) \\ \sigma(dz) &= \sqrt{dt} \end{aligned} \quad \text{eq. (4)}$$

Uma observação importante é o fato desse processo não possuir derivada em relação ao tempo no sentido convencional; ou seja:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta t} = dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} = \varepsilon_t (dt)^{-1/2} \rightarrow \text{que tende ao infinito quando } \Delta t \text{ se}$$

aproxima de 0.

6.1.5.

Movimento Browniano com Drift ou Movimento de Wiener generalizado (Movimento Aritmético Browniano)

O processo de Wiener Generalizado, também conhecido como Movimento Browniano com drift para uma variável x pode ser definido em termos de dz pela seguinte expressão:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad \text{eq. (5)}$$

Onde:

- dz : é o incremento de Wiener, definido acima;
- α : é a tendência do processo, que representa a certeza, pois surge do produto de dois valores conhecidos (que nesse caso é constante); e
- σ : é a volatilidade do parâmetro, que representa a incerteza, pois resulta da multiplicação de um valor conhecido por um valor aleatório (que também é constante).

A mudança em X , denotada por dx , no intervalo de tempo Δt , é normalmente distribuída e tem $E(\Delta x) = \alpha \Delta t$, e a variância é $V(\Delta x) = \sigma^2 \Delta t$.

Assim:

$$\Delta x \sim N(\alpha \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$$

6.1.6.

Movimento Browniano Generalizado - o Processo de Ito

No Movimento Browniano estudado acima, o α e o σ eram constantes. Porém o que ocorreria caso esses parâmetros não fossem constantes? Como ficaria a média e a variância desse processo?

A generalização do Movimento Browniano é dada pela equação abaixo:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad \text{eq. (6)}$$

Onde:

- dz : incremento de Wiener,
- $a(x, t)$ e $b(x, t)$: funções (não-aleatórias) conhecidas.
- a e b : são respectivamente do *drift* e a variância, porém agora são funções do tempo e do estado atuais.

A média e a variância de dx são calculadas a seguir:

$$E(dx) = a(x, t)$$

$$\text{Var}(dx) = [b(x, t)]^2 dt$$

Os parâmetros $a(x, t)$ e $b(x, t)$ são respectivamente, a taxa instantânea de crescimento esperada e a taxa instantânea de variância esperada.

6.1.7.

Movimento Geométrico Browniano (MGB)

É um caso particular de Processo de Ito, geralmente é o processo utilizado para modelar preço de ações, taxas de juros, preços de produtos e outras variáveis financeiras e econômicas.

Uma importante generalização da equação (6) é vista a seguir:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad \text{eq. (7)}$$

Onde são α e σ constantes.

Foi visto no processo de Wiener Generalizado que as mudanças percentuais em x , dx/x tem distribuição Normal com parâmetros (α, σ) .

Se $x(t)$ tem distribuição log-normal, então $F(x) = \ln x$ terá uma distribuição normal. Expandindo F por Taylor:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 \quad (9)$$

Onde :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \text{eq. (10)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{eq. (11)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \text{eq. (12)}$$

Substituindo (10), (11) e (12) em (9) teremos :

$$dF = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2x^2} (dx)^2 \quad \text{eq. (13)}$$

$$\text{Onde : } dx = (\alpha x dt + \sigma x dz) \quad \text{eq. (14)}$$

Substituindo (14) em (13) :

$$dF = \frac{1}{x} (\alpha x dt + \sigma x dz) - \frac{1}{2x^2} (\alpha x dt + \sigma x dz)^2$$

$$dF = \alpha dt + \sigma dz - \frac{1}{2x^2} (\alpha^2 x^2 dt^2 + 2\alpha\sigma dt dz + \sigma^2 x^2 dz^2)$$

$$dF = \alpha dt + \sigma dz - \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

$$dF = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

Lembrando que :

$$(dz)^2 = (\varepsilon \sqrt{dt})^2 = \varepsilon^2 dt$$

$$\text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - E^2(\varepsilon) = 1$$

$$\text{Pois } \varepsilon \sim N(0,1)$$

$$E(\varepsilon^2 dt) = dt E(\varepsilon^2) = dt$$

$$\text{Var}(\varepsilon^2 dt) = dt^2 \text{Var}(\varepsilon^2) = 0$$

Considerando o seguinte intervalo de tempo $(0, T)$, fazendo:

- $x(T) = x_T$
- $x(0) = x_0$

Em seguida substituindo no valor de $F(x)$, encontra-se:

$$F(x_t) - F(x_0) \sim N \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right]$$

$$F(x_t) \sim N \left[F(x_0) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right]$$

Como: $F(x_t) = \ln x$,

$$\ln x_t \sim N \left[\ln x_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right]$$

Após algumas substituições de variáveis chega-se ao valor esperado de X_T e a sua variância:

$$E(x_T) = x_0 e^{\alpha T}$$

$$\text{Var}(x_T) = x_0^2 e^{2\alpha T} \left(e^{\sigma^2 T} - 1 \right)$$

Uma observação importante é que a variância cresce (sem limites) com o horizonte temporal, ou seja, se $T \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Var}(x_T) \rightarrow \infty$. E a tendência é exponencial de crescimento ou de queda.

- α : é a tendência do processo (que nesse caso é constante); e
- σ : é a volatilidade do parâmetro (que também é constante).

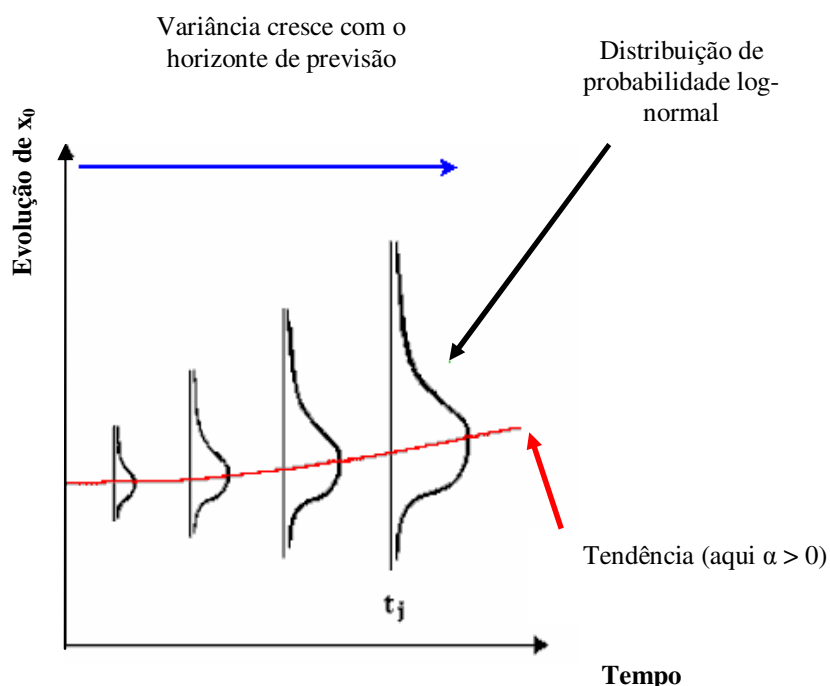


Figura 6.1: Gráfico da variância no Movimento Geométrico Browniano
 Fonte: <http://www.puc-rio.br/marco.ind/>

6.1.8. Processo de Reversão à Média

Pelo MGB visto acima o valor previsto tende a divergir do seu valor original, dado que o processo apresenta uma tendência exponencial de crescimento ou de queda. Existem processos que podem ser modelados por esse movimento, um deles é o preço de ativos especulativos.

A equação que define esse processo é dada por:

$$dx = \eta \left(\bar{x} - x \right) dt + \sigma dz \quad \text{eq. (15)}$$

Onde:

- dz : incremento de Wiener;
- η : velocidade de reversão à média, este parâmetro indica a velocidade com que o processo tende a voltar para o valor médio; e
- $\bar{x}$: nível normal de x (o nível para o qual x tende a reverter).

Este processo também é um processo de Markov, porém não possui incrementos de Wiener (dado que a variância de x depende da diferença entre $\bar{x}$ e x).

O valor esperado de x é:

$$E(x_t) = \bar{x} - (x_0 - \bar{x})e^{-\eta(t-t_0)} \quad \text{eq. (16)}$$

A variância é dada pela seguinte equação:

$$\text{Var}(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta} \left(1 - e^{-2\eta(t_0-t)} \right) \quad \text{eq. (17)}$$

O próximo passo é verificar o que ocorre com o valor esperado de x quando $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim E(x_T) &= \lim \left[\bar{x} - (x_0 - \bar{x}) \frac{1}{e^{\eta T}} \right] \\ &= \bar{x} - (x_0 - \bar{x}) \lim \left[\frac{1}{e^{\eta T}} \right] \end{aligned}$$

Quando $T \rightarrow \infty$, $e^{\eta T} \rightarrow \infty$ e $(x_0 - \bar{x}) \frac{1}{e^{\eta T}} \rightarrow 0$.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E(x_T) = \bar{x} \quad \text{eq. (18)}$$

Ou seja, diferente do que ocorre no MGB, no MRM o valor esperado tende para a média de longo prazo e a variância tende para $(\sigma^2/2\eta)$.

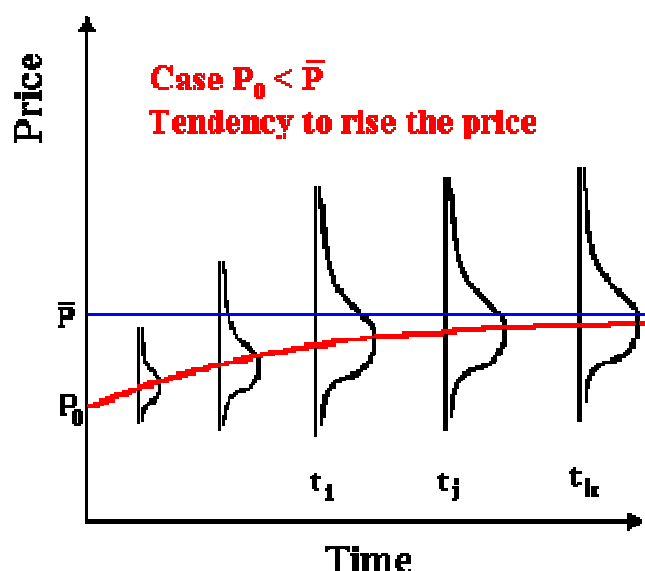


Figura 6.2: Gráfico da variância no Movimento de Reversão à Média
 Fonte: <http://www.puc-rio.br/marco.ind/>

6.2.

Simulação de Monte Carlo do preço do petróleo

O método de Monte Carlo é uma expressão muito geral, onde as formas de investigação estão baseadas no uso de números fortuitos e estatística de probabilidade. Pode-se verificar a utilização de tal método em diversas áreas, como economia, física, química, medicina entre outras. Para que uma Simulação de Monte Carlo esteja presente em um estudo basta que este faça uso de números aleatórios na verificação de algum problema.

O método leva este nome devido à famosa roleta de Monte Carlo, no Principado de Mônaco. Seu nome bem como o desenvolvimento sistemático do método data de 1944, quando da Segunda Grande Guerra, época em que foi usado como ferramenta de pesquisa para o desenvolvimento da bomba atômica. Porém, existem alguns registros isolados de sua utilização em datas bem anteriores; por exemplo: pela segunda metade do século XIX várias pessoas executaram experiências nas quais lançavam setas, de uma maneira fortuita, sobre uma tábua onde havia um conjunto de linhas paralelas e deduziram o valor de $Pi = 3,14...$, observando o número de interseções entre as setas e linhas. Os primeiros estudos envolvendo Simulação de Monte Carlo e avaliação de investimentos de capital foram feitos por David B. Hertz e publicados em um artigo na revista Harvard Business Review em 1964.

Para a construção de um modelo do fluxo de caixa, fazendo uso da Simulação de Monte Carlo, segue-se uma sequência lógica, conforme abaixo:

- Construir um modelo básico das variações dos fluxos de caixa futuros, provocados pela variação dos preços dos insumos e produtos finais.
- Para toda a variável que puder assumir diversos valores elaborar sua distribuição de probabilidade acumulativa correspondente.
- Especificar a relação entre as variáveis de entrada a fim de se calcular o VPL do investimento.
- Selecionar, ao acaso, os valores das variáveis, conforme sua probabilidade de ocorrência, para assim, calcular o valor presente líquido.
- Repetir esta operação muitas vezes, até que se obtenha uma distribuição de probabilidade do VPL.

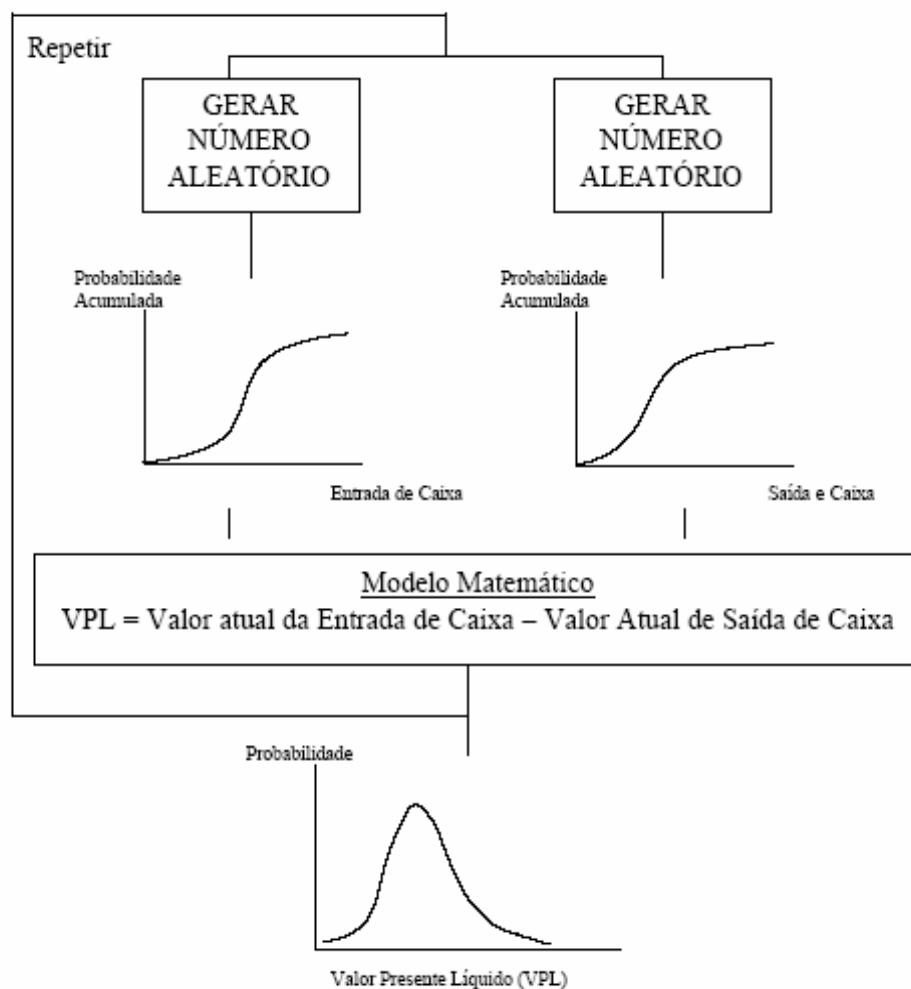


Figura 6.3: Ilustração da SMC

Para simular o preço do petróleo será usado o MRM. A equação de simulação é apresentada a seguir:

$$P(t) = \exp \left\{ [\ln(P_{(t-1)})] \exp[-\eta \Delta t] + [\ln(\bar{P}) (1 - \exp[-\eta \Delta t])] - [(1 - \exp[-2\eta \Delta t]) \frac{\sigma^2}{4\eta} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp[-2\eta \Delta t]}{2\eta}} N(0,1)] \right\}$$

eq. (19) (Fonte: <http://www.puc-rio.br/marco.ind>).

Onde:

- $\bar{P}$: média de longo prazo
- η : velocidade de reversão
- σ : volatilidade

Os termos da equação 19 possuem e a seguinte interpretação: os dois primeiros representam o *drift* cujos pesos são o valor inicial e a média de longo prazo, e o quarto termo representa o termo estocástico (Fonte: <http://www.puc-rio.br/marco.ind>).

A simulação do preço real usando a equação acima será feita por amostragem de um modelo de distribuição normal $N(0,1)$. A partir daí obtêm-se os valores correspondentes de P_t .

Para calcular os parâmetros primeiro calculam-se os parâmetros da regressão: $\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = a + b \ln(P_{t-1}) + e_t$. Em seguida calcula-se cada um

deles conforme as equações: $\bar{P} = -\frac{\hat{a}}{\hat{b}}$, $\hat{\eta} = -\log(1 + \hat{b})$ e $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{\log(1 + \hat{b})}{(1 + \hat{b})^2 - 1}}$, onde

$\hat{\sigma}_e$ é o desvio-padrão da regressão.

O primeiro cálculo dos parâmetros foi feito utilizando uma série anual do preço do Brent, em US\$/barril, do período compreendido entre o ano de 1982 e 2009 (ao todo 28 anos).

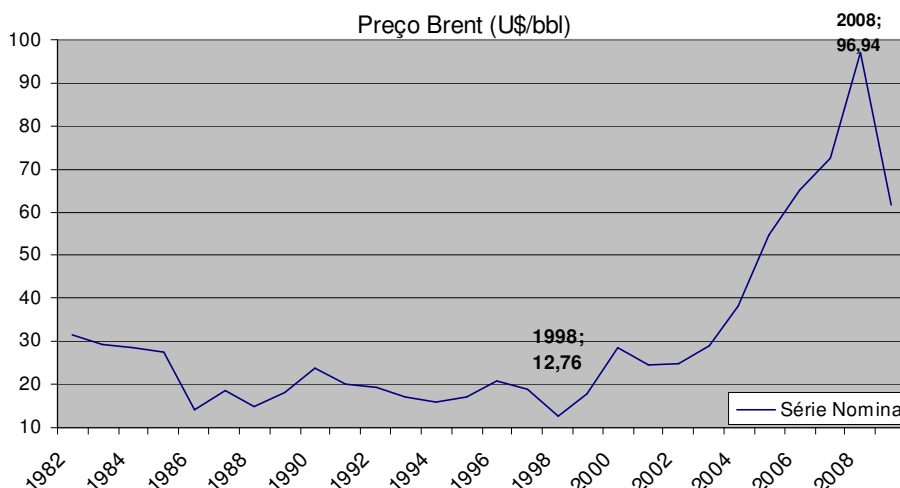


Figura 6.4: Preço do Brent (US\$/bbl) _ 1982/2009

Fonte: <http://www.ipeadata.gov.br/>

Pela análise do gráfico pode-se verificar que o maior preço do petróleo ocorreu no ano de 2008, chegando a atingir o valor de US\$ 96,94/ bbl, tendo o menor valor, US\$ 12,76/ bbl, ocorrido no ano de 1998.

Foi feita uma análise do tamanho e da frequência dos *jumps* que ocorreram no período considerado. O maior *jump* ocorreu do ano de 1999 para o ano de 2000, onde o preço aumentou cerca de 38%, e o menor *jump* ocorreu do ano de 1985 para o ano de 1986, onde o preço caiu cerca de 93%. A probabilidade de um *jump* maior ou igual a 10% ocorrer, no período em estudo, é de 44%, e a probabilidade de um *jump* maior ou igual a -10% ocorrer é de 26%.

Para que os parâmetros não reflitam o efeito da inflação (no caso a série pode apresentar uma tendência de crescimento devida à inflação) esta foi deflacionada com o *Producer Price Indice* (PPI). A Figura 6.5 contém a série nominal e a série real do Brent, para o período de 1982/2009.

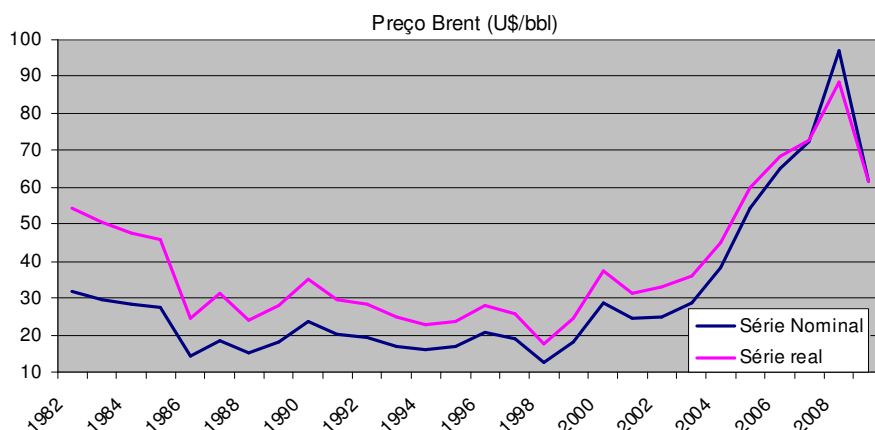


Figura 6.5: Série real e nominal do Brent _ 1982/2009

Fonte: elaboração própria

Através da análise da série real o maior valor que o Brent atingiu foi U\$ 88,41/bbl no ano de 2008, e o menor valor foi U\$ 17,31/bbl no ano de 1998. Em relação aos *jumps* o maior ocorreu mais uma vez do ano 1999 para o ano 2000, o mudando somente a sua intensidade, que agora foi de 34%, e o menor *jump* foi 87%, mais uma vez do ano de 1985 para o ano de 1986.

A taxa de desconto utilizada para cálculo do valor presente líquido do projeto é de 9,18 % ao ano, é a taxa que reflete o risco das indústrias de petróleo (Fonte: <http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>).

Primeiro os dados foram calculados utilizando a série real do período compreendido entre 1982/2009 (28 anos), os parâmetros dos processos estocásticos obtidos foram:

MGB		MRM	
Drift	3,31%	Media de longo prazo	U\$ 38,02/bbl
Volatilidade	23,88%	Velocidade de reversão	17,27 %
		Volatilidade	17,35 %
		Meia vida	Em torno de 4 anos.

Tabela 6.1: Parâmetros dos processos estocásticos (Série Brent: 1982/2009)

Fonte: Elaboração própria

Em seguida os parâmetros foram calculados novamente, porém com uma série menor, agora a série usada compreende o período que vai de 1990 até 2009 (19 anos).

MGB		MRM	
<i>Drift</i>	5,33%	Media de longo prazo	U\$ 54,36 /bbl
Volatilidade	21,87%	Velocidade de reversão	8,3 %
		Volatilidade	15,48 %
		Meia vida	Em torno de 8 anos.

Tabela 6.2: Parâmetros dos processos estocásticos (Série Brent: 1900/2009)

Fonte: Elaboração própria

Em relação aos parâmetros de MGB pode-se verificar uma mudança significativa no *drift* que de 3,31% vai para 5,33 % quando se considera uma série do Brent de 1990/2009. No caso no MRM todos os parâmetros sofrem grandes mudanças, a média de longo-prazo vai de U\$ 38,02/bbl para U\$ 54,36 /bbl e a meia vida dobra, passa para cerca de oito anos.

Neste trabalho optou-se por usar os dados obtidos através da série real do Brent compreendida entre 1990 e 2009, pois representam de forma mais significativa o preço do petróleo e sua volatilidade nos últimos anos.

Como o foco do trabalho é calcular o VPL do projeto, os riscos dos agentes nos dois regimes e como a renda é distribuída, optou-se por fazer uma análise de sensibilidade em relação ao impacto que a variação no valor da média de longo prazo tem sobre essas variáveis (será que em um cenário de preço do petróleo mais alto os riscos mudam?). Para a escolha deste valor utilizou-se o preço de negociação do Petróleo Brent no mercado futuro. Este é negociado em duas bolsas, a *New York Mercantile Exchange* (NYMEX) e na *Intercontinental Exchange* (ICE). Os preços de negociação nessas bolsas encontram-se nas tabelas abaixo.

Contract	Open	High	Low	Last
Mar 2011 (E)	84.76	84.76	84.76	93.49
Jun 2011 (E)	89.51	89.51	89.51	94.04
Jul 2011 (E)	89.76	89.76	89.76	94.18
Oct 2012 (E)	88.51	88.51	88.51	93.85
Nov 2012 (E)	91.66	91.66	91.66	93.77
Dec 2012 (E)	91.80	91.80	91.80	93.69
Oct 2013 (E)	92.12	92.12	92.12	93.13
Nov 2013 (E)	93.44	93.44	93.44	93.06

Dec 2013 (E)	90.58	90.58	90.58	92.99
Dec 2014 (E)	94.26	94.26	94.26	92.75
Dec 2015 (E)	93.19	93.19	93.19	93.10
Dec 2017 (E)	102.62	102.62	102.62	94.20

Tabela 6.3: Valores de negociação do Brent no mercado Futuro na NYMEX

Fonte: http://quotes.ino.com/exchanges/contracts.html?r=NYMEX_BB

O valor de negociação no mês de fevereiro de 2011 foi de U\$ 93,53 bbl e como pode ser analisado na tabela 6.3 o valor de fechamento não varia muito, ficando próximo de U\$ 93,00 bbl.

A tabela 6.4 contém os valores de negociação do Brent no mercado futuro na ICE.

Month	Price (U\$/bbl)
Dec 2011	95,51
Dec 2012	94,65
Dec 2013	93,81

Tabela 6.4: Valores de negociação do Brent no mercado Futuro na ICE

Fonte: <https://www.theice.com/productguide/ProductDetails.shtml?specId=219>

Uma análise dos valores de negociação de Brent no mercado futuro indica que os preços não variam muito de uma bolsa para outra.

Todas as variáveis estudadas são calculadas considerando-se dois cenários para a média de longo. No primeiro cenário o cálculo é feito com a média obtida através do modelo (U\$ 54,36 /bbl), no segundo cenário a média de longo prazo escolhida é U\$ 95,00 bbl (que representa uma média dos valores de negociação do Brent no mercado futuro).

É importante destacar que o valor da média de longo prazo usada no segundo cenário, em uma análise mais rigorosa, deve considerar um prêmio de risco sobre esse valor. Uma vez que as negociações feitas no mercado futuro são livres de risco, pois os valores são previamente definidos.