

3.

Formulações para Simulação de Fluxo Bifásico e Bifásico-acoplado em Meios Porosos via Métodos Numéricos

3.1.

Considerações Gerais

Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão das formulações numéricas normalmente consideradas na simulação de fluxo multifásico em meios porosos, partindo-se dos princípios da formulação de meio contínuo, a modelagem matemática do fenômeno, e o tratamento utilizando métodos numéricos,

Primeiramente, parte-se de uma formulação numérica para fluxo bifásico desacoplado, fluxo bifásico acoplado, empregando-se o método de MEF, chamado de clássico ou de Galerkin, acompanhando o trabalho apresentado por Muller (2007) para o caso de formulação das equações do tipo parabólica. Em seguida é apresentada uma formulação utilizando o métodos dos volumes finitos MVF proposto por Geiger et al (2004) e por fim uma formulação para a equação da saturação empregando métodos dos elementos finitos descontínuos MEFD como proposto em Hoteit et al (2008), em ambos os casos, para formulação das equações do tipo hiperbólica.

Os diferentes métodos de discretização das equações governantes do problema pode levar a diversas instabilidades, numéricas e efeitos difusivos, na solução das equações, Helmig (1997). Assim este trabalho buscou avaliar alguns métodos que se propõem a estabilização das soluções, entre eles o método de MVF proposto por Geiger et al (2004) e o MEFD proposto por Hoteit et al (2008) para a captura de frente de saturação e aplicabilidade a meios porosos heterogêneos.

Ao final desse capítulo é apresentado o tratamento numérico do problema de análise não linear global com os procedimentos iterativos de solução para os

problemas de fluxo bifásico e fluxo bifásico acoplado, bem como a análise não linear local do problema de plasticidade posto em forma de programação matemática.

3.2.

Formulações Numéricas das Equações Governantes

A aplicação de métodos numéricos a problemas de fluxo tem sido intensivamente estudada, existindo diversos métodos de aproximação. Com ênfase no método dos elementos finitos, nas suas diversas variações, um trabalho bem completo pode ser encontrado em Donea e Huerta (2003). Na seção seguinte apresenta-se uma formulação via elementos finitos, referido como método de Galerkin.

3.2.1.

Formulação em Elementos Finitos – Método de Galerkin

As equações na forma parabólica, equações 2.25 e 2.26, como descrito em Muller (2007), podem ser escritas via elementos finitos na forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{mw}} \right] d\Omega \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{mw}} \right) \right] d\Omega \mathbf{S}_w - \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_{nw} B_{mw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_{nw} B_{mw}} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{nw} g h d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_{nw} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{mw}} \right] d\Omega \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) \right] d\Omega \mathbf{S}_w - \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{mw} - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_c - \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{mw} g h d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_w d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Na implementação das equações 3.1 e 3.2 foi considerado a mesma interpolação para a poropressão e a saturação, seguindo o trabalho de Muller (2007).

Discretização no tempo:

Para discretização no tempo utiliza-se o método trapezoidal generalizado na forma:

$${}^{t+\theta}q = (1-\theta)q + \theta \Delta t {}^{t+\theta}q$$

em que $q = \{p_{nw} \ S_w\}$, são as variáveis primárias a serem determinadas a cada passo de tempo.

Para montagem do sistema de equações são considerados os seguintes termos:

$${}^{t+\Delta t}F_{p_{nw}}^i = \left[\begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_{nw} d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{nw} g h d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{S}_w + \\ \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} \end{array} \right]^i \quad (3.3)$$

$${}^{t+\Delta t}F_{S_w}^i = \left[\begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_w d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{nw} g h d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{nw}} \right] d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{S}_w + \\ \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_c \end{array} \right]^i \quad (3.4)$$

Podendo-se definir o vetor de resíduos como:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}) \text{ sendo } \mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i(\mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i(\mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

em que:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{p_{nw}}^{i+1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{p_{nw}}^i + \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{S}_w} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} = 0 \quad (3.6)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{S_w}^{i+1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{S_w}^i + \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{S}_w} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} = 0 \quad (3.7)$$

As equações 3.6 e 3.7, na forma matricial, se tornam:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} & \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{S}_w} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} & \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{S}_w} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{p_{nw}}^i \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{S_w}^i \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^i \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^i \end{aligned} \quad (3.9)$$

Assim, o problema final de fluxo bifásico pode ser assim posto:

$$\begin{bmatrix} \Delta t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{H}_{nw} & \mathbf{O}_{nw} - \Delta t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{M}_{nw} \\ \Delta t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{H}_w & \mathbf{O}_w - \Delta t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{M}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta t {}^{t+\Delta t} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i(\mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ \Delta t {}^{t+\Delta t} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i(\mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

em que:

$$\mathbf{H}_w = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.11)$$

$$\mathbf{H}_{nw} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rnw}}{\mu_w B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.12)$$

$$\mathbf{O}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{-\phi}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.13)$$

$$\mathbf{O}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{-\phi}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.14)$$

$$\mathbf{M}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.15)$$

$$\mathbf{M}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.16)$$

Nas equações de 3.11 a 3.16, \mathbf{H}_w , \mathbf{H}_{nw} , são as matrizes de fluxo para fase molhante e não-molhante, respectivamente, \mathbf{O}_w , \mathbf{O}_{nw} , são as matrizes de armazenamento para fase molhante e não-molhante, respectivamente, \mathbf{M}_w , \mathbf{M}_{nw} são as matrizes devido a compressibilidade da fase molhante e não-molhante, respectivamente.

Formulação fluxo bifásico acoplado

Ainda seguindo o procedimento apresentado por Muller (2007), a equação para o fluxo da fase não-molhante sob formulação de elementos finitos é descrita pela equação (3.17), as inserções dos termos referentes ao acoplamento mecânico aqui não são descritas, mas podem ser encontrados em Muller (2007), Fridman (1996) entre outros:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{nw}} \right] d\Omega \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) \right] d\Omega \mathbf{S}_w - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[(1 - S_{nw}) \left(\frac{(1 - \phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1 - \phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{S}_w}{dt} + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{S_{nw}}{B_{nw}} \left(\frac{(1 - \phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_{nw}}{dt} + \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rnw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rnw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{nw} g h d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_{nw} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

A equação para saturação da fase molhante é obtida de maneira análoga, sendo descrita por:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{nw}} \right] d\Omega \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) \right] d\Omega \mathbf{S}_w - \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[(1-S_{nw}) \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_w}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} + \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{(1-S_{nw})}{B_{nw}} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{S}_w}{dt} + \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{(1-S_{nw})}{B_w} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_{nw}}{dt} + \\
 & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_c - \\
 & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p^T)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{nw} g h d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_w d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

De acordo com Brooks e Hughes (1982), para que possíveis oscilações não ocorram pode-se empregar métodos que utilizam uma formulação estabilizada. Muller (2007) considera o refinamento da malha de elementos finitos ou o controle dos incrementos de tempo suficientes.

Para estabilização da solução, geralmente utiliza-se métodos da família Petrov-Galerkin, como, por exemplo, o método SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin), apresentado numa série de trabalhos publicados por Hughes e outros, Hughes et al (1986a, b) e Hughes *et al* (1987), sendo uma das aplicações do método encontrada em Campos (1999).

Discretização no tempo:

Para discretização no tempo utiliza-se o método trapezoidal generalizado na forma:

$${}^{t+\theta} q = (1-\theta) q + \theta {}^{t+\Delta t} q$$

em que $q = \{p_{nw} \ S_w\}$, são as variáveis primárias a serem determinadas a cada passo de tempo.

Para montagem do sistema de equações considera-se os seguintes termos:

$${}^{t+\Delta t} F_u^i = \left[\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{d\mathbf{b}}{dt} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{d\mathbf{t}}{dt} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{\sigma_0'}{\Delta t} d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_{nw}}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} p_c \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{S_w}{\Delta t} + \\ & \int_{\Omega} (1 - S_{nw}) \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_c}{\Delta t} \end{aligned} \right]^i \quad (3.19)$$

$${}^{t+\Delta t} F_{p_{nw}}^i = \left[\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_{nw} d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rnw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{nw} g h d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{S_w}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \theta S_w + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[(1 - S_{nw}) \left(\frac{(1 - \phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_c}{\Delta t} + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1 - \phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{S_w}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{S_{nw}}{B_{nw}} \left(\frac{(1 - \phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_{nw}}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rnw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} \end{aligned} \right]^i \quad (3.20)$$

$${}^{t+\Delta t}F_{S_w}^i = \left[\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_w d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{nw} g h d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{nw}} \right] d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{S}_w + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[(1-S_{nw}) \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_w}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_c}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{(1-S_{nw})}{B_{nw}} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{(1-S_{nw})}{B_w} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_{nw}}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} + \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_c \end{aligned} \right] \quad (3.21)$$

Podendo-se definir o vetor de resíduos como:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}) \text{ sendo } \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

em que:

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^{i+1} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i + \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \\ & \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{S}_w} \Big|_{t+\Delta t, S_w^i} \delta^{t+\Delta t} S_w^{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^{i+1} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i + \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \\ & \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{S}_w} \Big|_{t+\Delta t, S_w^i} \delta^{t+\Delta t} S_w^{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{S_w}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{S_w}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{p}_{mw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{mw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{mw}^{i+1} + \\
 \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{S}_w} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

As equações 3.24 e 3.25, na forma matricial, se tornam:

$$\begin{bmatrix}
 -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}_{mw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{mw}^i} & \left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{S}_w} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \\
 -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{mw}}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{mw}}}{\partial \mathbf{p}_{mw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{mw}^i} & \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{mw}}}{\partial \mathbf{S}_w} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \\
 -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{p}_{mw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{mw}^i} & \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{S}_w} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\
 \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{mw}^{i+1} \\
 \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i \\
 {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{mw}}^i \\
 {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i
 \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

em que:

$$\begin{aligned}
 \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^i \\
 \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{mw}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{mw}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{mw}^i \\
 \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^i
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Assim, o problema final de fluxo bifásico acoplado pode ser assim posto:

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{K} & \mathbf{L} & \mathbf{L}_c \\
 \mathbf{L}_{mw} & \mathbf{G}_{mw} + \Delta t \boldsymbol{\theta} \mathbf{H}_{mw} & \mathbf{O}_{mw} - \Delta t \boldsymbol{\theta} \mathbf{M}_{mw} - \mathbf{P}_{mw} \\
 \mathbf{L}_w & \mathbf{G}_w + \Delta t \boldsymbol{\theta} \mathbf{H}_w & \mathbf{O}_w - \Delta t \boldsymbol{\theta} \mathbf{M}_w - \mathbf{P}_w
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\
 \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{mw}^{i+1} \\
 \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_{mw}^{i+1}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 \Delta t {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \\
 \Delta t {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{mw}}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \\
 \Delta t {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t)
 \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

em que:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \tag{3.29}$$

$$\mathbf{L} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \mathbf{N}_p d\Omega \tag{3.30}$$

$$\mathbf{L}_c = \int_{\Omega} p_c \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.31)$$

$$\mathbf{L}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m}^T - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}^T}{3K_s} \right) \mathbf{B} d\Omega \quad (3.32)$$

$$\mathbf{L}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m}^T - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}^T}{3K_s} \right) \mathbf{B} d\Omega \quad (3.33)$$

$$\mathbf{H}_w = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_x B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.34)$$

$$\mathbf{H}_{nw} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_x B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.35)$$

$$\mathbf{G}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{(1-S_{nw})}{B_w} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.36)$$

$$\mathbf{G}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{S_{nw}}{B_{nw}} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.37)$$

$$\mathbf{O}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{-\phi}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.38)$$

$$\mathbf{O}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{-\phi}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.39)$$

$$\mathbf{M}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.40)$$

$$\mathbf{M}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.41)$$

$$\mathbf{P}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.42)$$

$$\mathbf{P}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.43)$$

Nas equações de 3.28 a 3.43, \mathbf{H}_w , \mathbf{H}_{nw} , são as matrizes de fluxo para fase molhante e não-molhante, respectivamente, \mathbf{O}_w , \mathbf{O}_{nw} , são as matrizes de armazenamento para fase molhante e não-molhante, respectivamente, \mathbf{M}_w , \mathbf{M}_{nw} são as matrizes devido a compressibilidade da fase molhante e não-molhante, respectivamente, \mathbf{L} , \mathbf{L}_c , \mathbf{L}_{nw} e \mathbf{L}_{nw} são as matrizes de acoplamento com o problema mecânico.

3.2.2. Formulação em Volumes Finitos Baseado em Elementos Finitos

Nessa seção apresenta-se uma formulação em volumes finitos baseada em elementos finitos descrita por Geiger et al (2004a) e Geiger et al (2004b). Nesta formulação utiliza-se a equação do problema em sua forma hiperbólica, com uma equação chamada de equação da pressão, o pós-processamento da velocidade e uma equação da saturação.

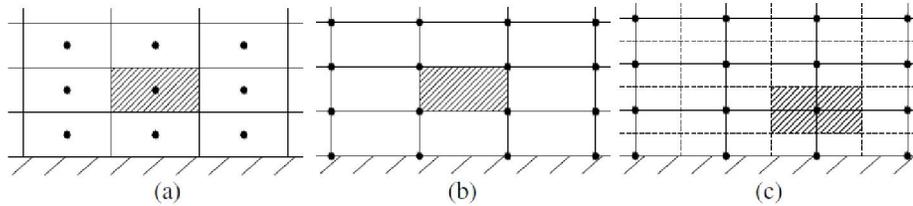


Figura 3-1: Formas possíveis de montagem do volume de controle, a) baseado na célula, b) baseado na célula e vértice e c) baseado no vértice. (extraído de Carvalho, 2005)

A figura 3.1 apresenta três formas distintas de formação do volume de controle que podem ser usadas no MVF. A presente formulação é baseada na qual o volume de controle é construído sobre uma malha de elementos finitos, com o volume de controle baseado no vértice para malhas não-estruturadas. Assim, um passo anterior na solução via MVF é a construção das estruturas geométricas como áreas das arestas e vetores normais às arestas.

Geiger et al (2004a, b) partem da equação proposta por Durlofsky (1993) já com a parcela do acoplamento geomecânico na equação da pressão, apresentada a seguir:

Equação da pressão:

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_t \nabla p) + \frac{1}{2} \nabla \cdot ((\lambda_n - \lambda_w) \nabla p_c) - \mathbf{K} \mathbf{g} \nabla \cdot (\lambda_w \rho_w + \lambda_n \rho_n) + Q_t \quad (3.44)$$

sendo as diversas variáveis já descritas anteriormente e uma mais: a parcela c_t , que corresponde a parcela de compressibilidade do meio.

Ainda assim, tem-se a equação da velocidade pós-processada utilizando a Lei de Darcy em condição de fluxo bifásico:

$$\mathbf{v}_t = -\mathbf{K} \lambda_t \nabla p - \mathbf{K} \lambda_w \frac{d}{dS_w} \nabla p_c - \frac{1}{2} \mathbf{K} \mathbf{g} (\lambda_{nw} \rho_{nw} - \lambda_w \rho_w) \quad (3.45)$$

Esses autores colocam a equação da saturação na seguinte forma:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot (f_w (\mathbf{v}_t + \mathbf{K} \mathbf{g} (\lambda_{nw} \rho_{nw} - \lambda_w \rho_w))) + \nabla \cdot [\mathbf{K} \lambda_n f_w \nabla p_c] + Q_w \quad (3.46)$$

O tratamento numérico das equações da pressão e saturação, equações 3.44 e 3.46, é realizado utilizando o MEF para a equação da pressão e o MVF é aplicado à equação da saturação, como é mostrado a seguir:

Integrando-se a equação (3.44) no volume do elemento, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_t \nabla p) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{K} (\lambda_{nw} - \lambda_w) \nabla p_c) d\Omega + \int_{\Omega} Q_t d\Omega \quad (3.47)$$

empregando-se a seguinte interpolação polinomial que define a pressão no interior do elemento em função dos pontos nodais \mathbf{p}^* :

$$\mathbf{p} = \mathbf{N}_p \mathbf{p}^* \quad (3.48)$$

a equação da pressão em elementos finitos pode ser colocada como:

$$\int_{\Omega} \phi c_t \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p \frac{d\mathbf{p}^*}{dt} d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \lambda_t (\nabla \mathbf{N}_p) \mathbf{p}^* d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{k} (\lambda_{nw} \rho_{nw} + \lambda_w \rho_w) \mathbf{g} \mathbf{N}_p d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q} d\Omega = 0 \quad (3.49)$$

Ou ainda, na forma residual:

$${}^{t+\Delta t} F_p^i = \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{k} (\lambda_{nw} \rho_{nw} + \lambda_w \rho_w) \mathbf{g} \mathbf{N}_p d\Omega - \int_{\Omega} \phi c_t \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \lambda_t (\nabla \mathbf{N}_p) d\Omega \mathbf{p} \right]^i \quad (3.50)$$

Esta equação pode ser representada, usando pressão incremental, em uma forma compacta como:

$$[\Delta t \theta \mathbf{H} + \mathbf{G}] \{ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} \} = \{ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(\mathbf{p}, t) \} \quad (3.51)$$

e

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \lambda_t \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.52)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T [\phi c_t] \mathbf{N}_p d\Omega \quad (3.53)$$

\mathbf{H} e \mathbf{G} são as matrizes de permeabilidade e compressibilidade, respectivamente.

De forma similar a equação da pressão, integrando-se a equação (3.46) no volume do elemento, chega-se a:

$$\int_{V_i} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} dV = - \int_{V_i} \nabla \cdot (f_w \mathbf{v}_t) dV + \int_{V_i} \nabla \cdot (\lambda_t k p_c) dV - \int_{V_i} \nabla \cdot (\Delta \rho g \lambda_t \nabla z) dV + \int_{V_i} q_w dV \quad (3.54)$$

e empregando uma discretização temporal explícita, tem-se:

$$\begin{aligned}
 S_{wi}^{t+\Delta t} = & S_{wi}^t - \frac{\Delta t}{\phi_i A_i} \sum_{j=1}^{n_{st}} (f_{wj} \mathbf{v}_{tj}) \cdot \mathbf{n}_j + \frac{\Delta t}{\phi_i A_i} \sum_{j=1}^{n_{st}} (\lambda_{tj} \mathbf{k} \nabla p_c) \cdot \mathbf{n}_j - \\
 & \frac{\Delta t}{\phi_i A_i} \sum_{j=1}^{n_{st}} (\Delta \rho g \mathbf{k} \lambda_{tj} \nabla z) \cdot \mathbf{n}_j \\
 & + \frac{\Delta t}{\phi_i A_i} \sum_{e=1}^{e_{ci}} q_{we} A_e
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Dada a característica parabólica-hiperbólica da equação da saturação, um método de captura da frente de saturação deve ser empregado. Um método bastante empregado é o método de primeira ordem, chamado de esquema *upwind*.

Outro método proposto por Geiger et al (2004a, b) é a utilização da aproximação de segunda ordem que melhora a captura da frente de saturação. Esse método se baseia na interpolação dos valores das saturações nas arestas do volume de controle construído sobre a malha de elementos finitos através da utilização dos gradientes nesses pontos, assim:

$$\sum_{l=1}^2 M_{kl} a_l = b_k \quad k=1,2 \tag{3.56}$$

em que:

$$M_{kl} = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{jk} - x_{ik})(x_{jl} - x_{il}) \tag{3.57}$$

$$b_k = \sum_{j=1}^{n_i} (S_{wj} - S_{wi})(x_{jk} - x_{ik}) \tag{3.58}$$

Sendo então calculada uma nova saturação a partir do vetor \mathbf{a} e da localização do ponto médio da aresta.

$$\tilde{S}_{wi}(\mathbf{x}) = S_{wi} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \tag{3.59}$$

Da implementação desses esquemas ainda podem surgir uma difusão numérica excessiva da frente de saturação e oscilações numéricas que podem levar a instabilização do sistema. Uma técnica comumente empregada como alternativa mais eficaz é a utilização de limitadores de inclinação para interpolação do campo de saturação, surgindo outro campo interpolado:

$$\bar{S}_{wi}(\mathbf{x}) = S_{wi} + \psi_i(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \quad (3.60)$$

em que o parâmetro ψ_i é obtido por:

$$\psi_j = \min[r_i, 1] \quad (3.61)$$

sendo

$$r_i = \begin{cases} (S_{wi}^{\max} - S_{wi}) / (S_{wj} - S_{wi}) & \text{se } S_{wj} > S_{wi} \\ (S_{wi}^{\min} - S_{wi}) / (S_{wj} - S_{wi}) & \text{se } S_{wj} < S_{wi} \\ 1 & \text{se } S_{wj} = S_{wi} \end{cases} \quad (3.62)$$

e

$$S_{wi}^{\min} = \min\left(S_{wi}, \min_{j=1, \dots, n_i}(S_{wj})\right) \quad (3.63)$$

$$S_{wi}^{\max} = \max\left(S_{wi}, \max_{j=1, \dots, n_i}(S_{wj})\right)$$

Observando a equação 3.60 quando ψ_i se anula, tem-se o esquema *upwind* de primeira ordem.

3.2.3.

Formulação em Elementos Finitos Descontínuos

Atualmente um método que tem sido utilizado intensivamente para a solução de problemas de mecânica dos fluidos computacional, em especial no caso de equações hiperbólicas, é o método dos elementos finitos descontínuos (Li (2006), Rivière (2008), Kanschat (2007), Hoteit et al (2008) e outros).

Segundo Hoteit et al (2008), o MEFD possui como importantes características a conservação de massa a nível de elemento, flexibilidade para geometrias complexas com aproximações de alta ordem, além do que, apresenta menos dispersão numérica e é livre de oscilações espúrias quando um adequado limitador de inclinação é utilizado.

O MEFD possui a vantagem de se poder utilizar a mesma divisão de domínio do MEF clássico podendo ser utilizadas as mesmas funções de

interpolação, incorporando formulações do MVF nos fluxos nas arestas. Pode-se demonstrar a equivalência de MEFD e MVF quando as funções de interpolação são equivalentes.

A seguir apresenta-se uma formulação proposta por Hoteit et al (2008) para solução da equação da saturação em MEFD com a utilização de uma discretização temporal explícita de Runge-Kutta de segunda ordem e limitadores de inclinação para evitar oscilações espúrias na solução do sistema. Para solução da equação da pressão e da velocidade, Hoteit et al utilizam uma formulação mista em elementos finitos.

Considerando a equação da saturação com pressão capilar nula, equação 2.41, aplicando MEF e o teorema da divergência tem-se:

$$\int_{\Omega_c} \left(w \frac{\partial S_\pi}{\partial t} - \mathbf{v} S_\pi \cdot \nabla w \right) dV + \int_{\partial\Omega_c} w \left(\overrightarrow{\mathbf{v} S_\pi} \cdot \mathbf{n}_j \right) dS = 0 \quad (3.64)$$

Em que, consistentemente os fluxos numéricos, $\overrightarrow{\mathbf{v} S_\pi}$, devem ser dados por:

$$\overrightarrow{\mathbf{v} S_\pi} = \mathbf{v} \{S_\pi\} + \mathbf{C}_u \cdot [S_\pi] \quad (3.65)$$

em que:

$$\{S_\pi\} = 0.5(S_\pi^+ + S_\pi^-) \quad (3.66)$$

$$[S_\pi] = S_\pi^+ \mathbf{n}^+ + S_\pi^- \mathbf{n}^-$$

Os símbolos (+) e (-) designam cada face do elemento, sendo (+) no exterior do elemento e (-) no interior do elemento, e mais \mathbf{n}^+ e \mathbf{n}^- para os vetores normais nesses dois sentidos. A figura 3.2 apresenta uma representação esquemática dos vetores normais a uma dada aresta por elemento.

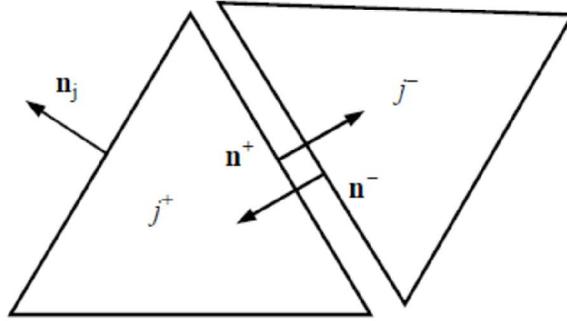


Figura 3.2 – Representação esquemática dos vetores normais, \mathbf{n}_j , e os vetores normais interior e exterior ao elemento j^+ . (extraído de Li, 2006)

Escolhendo $C_u = 0.5|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|$, o fluxo numérico, $\overleftarrow{\mathbf{v}S_\pi}$, é calculado pelo esquema clássico de *upwind*, adotado também em Hoteit et al, e colocado na seguinte forma:

$$\overleftarrow{\mathbf{v}S_\pi} = \mathbf{v}\{S_\pi\} + 0.5|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \cdot [S_\pi] \quad (3.67)$$

Considerando ainda a seguinte aproximação:

$$S_\pi = \sum_{i=1}^{N_e} S_{\pi,i} \phi_i \quad (3.68)$$

em que N_e é o número de nós do elemento e ϕ_i é a função de forma associada ao nó i , tem-se a seguinte formulação em elementos finitos descontínuos, adotando-se S_w como variável primária:

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{S}_w}{dt} + \left(\mathbf{K} + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{K}_{B,i} \right) \mathbf{S}_w + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{N}_{B,1} \mathbf{S}_{wN_s,i} = 0 \quad (3.69)$$

\mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{K} é a integral de volume, $\mathbf{K}_{B,i}$ e $\mathbf{N}_{B,1}$ representam a contribuição do contorno associado ao elemento, \mathbf{S}_w é o vetor de incógnitas para o elemento, N_s é o número de lados do elemento e $\mathbf{S}_{wN_s,i}$ é o vetor de incógnitas associado aos elementos vizinhos.

De outra forma a equação acima pode ser reescrita como se segue:

$$\frac{d\mathbf{S}_w}{dt} = -\mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{K} + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{K}_{B,i} \right) \mathbf{S}_w + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{N}_{B,i} \mathbf{S}_{wN_s,i} \quad (3.70)$$

ou

$$\frac{d\mathbf{S}_w}{dt} = L(\mathbf{S}_w) \quad (3.71)$$

Para obtenção de uma solução temporal, pode ser aplicada uma discretização explícita da forma:

$$\mathbf{S}_w^{t+\Delta t} = \mathbf{S}_w^t + \Delta t L(\mathbf{S}_w^t) \quad (3.72)$$

ou ainda o método de discretização temporal de Runge-Kutta (RK) de segunda ordem, como se segue:

$$\mathbf{k}^1 = L(\mathbf{S}_w^t) \quad (3.73)$$

$$\mathbf{k}^2 = L\left(\mathbf{S}_w^t + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{k}^1\right) \quad (3.74)$$

Após a obtenção do campo de saturação ao final da segunda ordem da discretização de RK é aplicado o operador de limitador de inclinação na forma:

$$\tilde{\mathbf{S}}_w^{t+\Delta t} = L(\mathbf{S}_w^{t+\Delta t}) \quad (3.75)$$

Em que o L é o operador proposto por Chavent et al (1986):

$$\begin{cases} \min_{W \in \mathbb{R}} \|\mathbf{W} - \mathbf{S}_{w,e}\| \\ \text{sujeito a} \\ \frac{1}{n_v} \sum_{i=1}^{n_v} W_i = \bar{S}_{w,e} \\ \bar{S}_{w,\min} \leq W_i \leq \bar{S}_{w,\max}, \quad i = 1, \dots, n_v \end{cases} \quad (3.76)$$

Definindo-se as seguintes variáveis:

$$\bar{S}_{w,e} = \frac{1}{|e|} \int_e S_{w,e} \quad \bar{S}_{w,\min} = \min_{e \in T_i} \{\bar{S}_{w,e}\} \quad \bar{S}_{w,\max} = \max_{e \in T_i} \{\bar{S}_{w,e}\} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{S}}^{t+\Delta t} \quad (3.78)$$

e ainda: n_v é o número de nós por elemento T_i é o conjunto de elementos que compartilham o nó i do elemento e .

3.3.

Análise Não-Linear Local

A solução do problema de análise não-linear local, problema da plasticidade, pode ser por posto em duas formas equivalentes: resolvendo-se a equação de equilíbrio ou postulando o problema em forma de programação matemática (Vaz, 2011). Dessa forma, apresentam-se nessa seção alguns conceitos para o entendimento da análise não linear local, em que o problema de análise elastoplástica nesse trabalho é apresentado como um problema de programação matemática partindo do princípio da máxima dissipação plástica (PMPD), bem como são apresentados os modelos constitutivos adotados nesse trabalho (modelo de Mohr Coulomb e modelo de von Mises).

3.3.1.

Princípio da máxima dissipação plástica

Como descrito em Muller (2007), o princípio da máxima dissipação plástica é a base da formulação matemática das leis de evolução da teoria da plasticidade e está fundamentada na hipótese de que a deformação plástica se dá de modo que a energia dissipada seja máxima.

A descrição matemática do PMDP parte do conceito de energia de dissipação plástica, dado como sendo a taxa de variação da energia interna em relação às variáveis plásticas com o sinal trocado.

$$D^p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = - \left[\frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \right] \quad (3.79)$$

em que \mathbf{a} é o vetor das variáveis internas, $\dot{\mathbf{a}}$ é a taxa de variação das variáveis internas, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, é a taxa de deformação plástica, W^e , é a energia de deformação elástica e W^p , é a energia de deformação plástica.

As deformações totais e trabalho total podem ser representados como:

$$W = W^e + W^p \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.80)$$

Sendo $W^e = W^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ e a parcela plástica $W^p = W^p(\mathbf{a})$, função somente das variáveis internas, a equação 3.78 pode ser reescrita como:

$$W = W^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + W^p(\mathbf{a}) = W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + W^p(\mathbf{a}) \quad (3.81)$$

Substituindo 3.81 em 3.79, tem-se:

$$D^p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = - \left[\frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \right] \quad (3.82)$$

Dado que $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = - \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}$, a dissipação plástica pode ser reescrita como

$$D^p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \quad (3.83)$$

Definida a dissipação plástica do sistema pode-se formular o problema na forma de programação matemática para aplicação dos métodos normalmente utilizados para solução dos problemas de otimização, assim o PMDP é posto na seguinte forma:

$$\text{Minimizar : } -D^p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \quad (3.84)$$

$$\text{sujeito : } F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \leq 0$$

em que $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$ representa a função de escoamento, como será visto mais a frente.

O problema de minimização com restrições pode ser escrito como um problema sem restrições introduzindo-se os multiplicadores de Lagrange. A função de Lagrange correspondente ao problema é:

$$L(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*, \lambda, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\mathbf{a}}) = -\boldsymbol{\sigma}^* \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}^*} \dot{\mathbf{a}} + \lambda F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) \quad (3.85)$$

O símbolo $(\cdot)^*$ indica ser um ponto corrente que atende necessariamente as condições de Kuhn-Tucker. Escrevendo-se agora as condições de Kuhn-Tucker, condições necessárias para existência de um valor extremo, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = -\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \lambda \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^*} = \frac{\partial^2 W^p}{\partial \mathbf{a}^* \partial \mathbf{a}^*} \dot{\mathbf{a}} + \lambda \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \mathbf{a}^*} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{a}} = \lambda \mathbf{G} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \mathbf{a}^*} \quad (3.87)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) \leq 0 \quad (3.88)$$

$$\lambda F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) = 0 \quad (3.89)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3.90)$$

em que

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial^2 W^p}{\partial \mathbf{a}^* \partial \mathbf{a}^*} \right)^{-1} \quad (3.91)$$

Observando-se as condições de Kuhn-Tucker, apresentadas acima, tem-se como consequência do PMPD as seguintes considerações: a equação (3.86) representa a lei de escoamento associada, a equação (3.87) representa a lei de encruamento. Em (3.88) se verifica a condição de consistência e em (3.89) através da condição de complementaridade se verifica a condição de carregamento/descarregamento. Simo e Hughes (1997), apud Muller (2007) citam que o PMDP implica em: fluxo associado no espaço das tensões, condição chamada de normalidade; condição de carregamento/descarregamento dada pela condição de complementaridade de Kuhn-Tucker e convexidade do espaço das tensões.

De outra forma o problema apresentado em (3.84) pode ser reescrito, de acordo com Simo e Hughes (1997), sob a seguinte forma:

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{i+1}, \mathbf{a}^{i+1}\} = \underset{\text{Minimizar}}{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})} \in E_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}^{teste} - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{a}^i - \mathbf{a}\|_{\mathbf{G}^{-1}}^2 \right\} \quad (3.92)$$

$$\text{sujeito: } F(\boldsymbol{\sigma}^{i+1}, \mathbf{a}^{i+1}) \leq 0$$

em que \mathbf{D} é o tensor constitutivo elástico, \mathbf{G} é módulo plástico generalizado, ambos assumidos constantes, $\boldsymbol{\sigma}^{teste}$ é o tensor das tensões teste (geralmente assume-se o elástico) e E_{σ} é o espaço das tensões admissíveis, $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^{-1}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}}$ pode ser visto como uma norma da energia e $\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{G}^{-1}} = \sqrt{\mathbf{a} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{a}}$ como uma norma induzida por \mathbf{G}^{-1} . Para o caso de plasticidade perfeita o segundo termo entre chaves da equação (3.92) é nulo. Ainda, $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$ é a projeção ao ponto mais próximo de $\boldsymbol{\sigma}^{teste}$ na superfície de escoamento. Assim posto, é utilizado o algoritmo SQP para solução do problema não linear resultante.

Das equações que descrevem o problema de acoplamento fluido mecânico tem-se a presença do tensor constitutivo tangente ou elastoplástico \mathbf{D}_T , que pode ser avaliado da seguinte como:

$$\mathbf{D}_T = \mathbf{D} - \left(\mathbf{D} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{D} \right) \frac{1}{H} \quad (3.93)$$

$$H = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \mathbf{g} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{h} \quad (3.94)$$

Sendo \mathbf{g} e \mathbf{h} respectivamente, funções que definem a direção do fluxo plástico e a evolução de \mathbf{a} . Para plasticidade associada $\mathbf{g} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$.

Para representação da função de escoamento, são adotados neste trabalho dois critérios bastante referenciados em mecânica dos solos clássica, a função de escoamento de Mohr-Coulomb e a função de escoamento de Von Mises, baseados exclusivamente no estado de tensão, Chen e Liu (1977).

Em termos de invariantes de tensões o critério de Mohr-Coulomb pode ser descrito por:

$$F_{MC} = -\frac{I_1}{3} \operatorname{sen}\phi + \sqrt{J_2} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\phi - c \cos\phi = 0 \quad (3.95)$$

em que I_1 representa o primeiro invariantes de tensão, J_2 representa o segundo invariante das tensões, ϕ e c são os parâmetros do modelo e Φ é o ângulo de Lode dado por:

$$\theta = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3} J_3}{2 J_2^{\frac{3}{2}}}\right) \quad \text{em que} \quad 0^0 \leq \theta \leq 60^0 \quad (3.96)$$

Já a função de escoamento de Von Mises descrita em termos de invariantes de tensão é apresentada como:

$$F_{VM} = \sqrt{2J_2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \quad (3.97)$$

em que σ_y é a tensão de escoamento.

Nas definições do tensor constitutivo tangente ou elasto-plástico \mathbf{D}_T apresentado na equação (3.93) é necessária a definição da derivada em relação às tensões da função de escoamento, para a função de escoamento de Mohr-Coulomb e para função de escoamento de von Mises, tem-se, respectivamente, equações (3.98) e (3.99).

$$\frac{\partial F_{MC}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F_{MC}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_{MC}}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_{MC}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial F_{MC}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F_{MC}}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.99)$$

3.4.

Procedimentos de Solução

Segundo Lewis e Schrefler (1998), a solução acoplada do problema mecânico e de fluxo em meios porosos pode ser resolvida empregando dois procedimentos distintos: totalmente acoplado ou desacoplado.

Na solução acoplada tem-se a solução do sistema completo de equações, em termos de deslocamentos, poro-pressão e saturação. Na solução desacoplada tem-se a solução de um dos sistemas primeiramente, mecânico ou de fluxo, e a solução de um destes sistemas é incorporado como entrada no outro sistema.

Os dois procedimentos são considerados no presente trabalho, sendo o procedimento acoplado empregado pelo MEF – Galerkin apresentado na seção 3.2.1 e o procedimento desacoplado empregado no MVF e MEFD apresentados nas seções 3.2.2 e 3.2.3, respectivamente.

Ainda dentro dessa classificação são encontrados vários métodos para os procedimentos acoplado e desacoplado.

No procedimento acoplado pode se definir o procedimento totalmente acoplado e o procedimento particionado, tal como apresentado em Muller (2007). No procedimento totalmente acoplado o sistema completo de equações é solucionado conjuntamente em termos de deslocamentos, poro-pressão e saturação e no sistema particionado, conhecido como procedimento *staggered*, o sistema é particionado em duas partes, problema mecânico e problema de pressão-saturação e que iterativamente são resolvidos paralelamente. Um estudo da aplicação destes procedimentos foi apresentado por Muller (2007), Lewis e Scherefler (1998) e Ferreira (1996), onde são apontadas as vantagens e desvantagens de ambos os métodos.

No procedimento desacoplado são várias as alternativas encontradas, os sistemas podem ser resolvidos separadamente, com um sistema mecânico e um sistema de fluxo, sem processo iterativo para a convergência dos dois sistemas, procedimento esse bastante usual em engenharia de petróleo, e um procedimento iterativo entre os dois sistemas até a convergência de ambos. Esse último procedimento é aplicado nos sistemas acoplados para o caso do MVF e do MEFD apresentados nas seções 3.2.2 e 3.2.3, respectivamente.

Em termos de discretização temporal o procedimento de se interpolar a equação da pressão implicitamente e a equação da saturação explicitamente, dá-se o nome de IMPES (implicit pressure – explicit saturation), sendo este o caso das formulações em MVF e do MEFD apresentadas no presente trabalho.

Nas seções seguintes são apresentados os procedimentos empregados no presente trabalho.

3.4.1.

Procedimento para o problema de fluxo bifásico

Para o problema de fluxo bifásico sem acoplamento mecânico e posto na sua forma hiperbólica é utilizado um processo iterativo, com critérios de convergência em termos de pressão, velocidade e saturação, seguindo a estratégia de solução sequencial apresentada por Mendonça (2003) e Ney (2002) e que consiste nos seguintes passos:

1. Resolve-se a equação da pressão.
2. Calcula-se o campo de velocidades.
3. Resolve-se a equação da saturação.

Assim de tal forma o algoritmo iterativo preditor multicorretor aplicado e descrito em Mendonça (2003) é apresentado a seguir:

Instante $t + \Delta t$. Estimativa inicial ${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw} = {}^t \mathbf{p}_{nw}$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w = {}^t \mathbf{S}_w$ tem-se ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}$.	Etapa 1
Procedimento iterativo $i+1$.	Etapa 2
Avalia-se \mathbf{p}_{nw}^{i+1} , \mathbf{v}^{i+1} , \mathbf{S}_w^{i+1} com as equações via MVF ou MEFD e verifica-se a convergência conjunta pela tolerância ou número máximo de iterações.	Etapa 3
Verificada a etapa 3, atualiza-se as grandezas ${}^t \mathbf{p}_{nw}$, ${}^t \mathbf{S}_w$ e retorna a etapa 1 e um novo passo de tempo é iniciado, caso contrário inicia-se um novo passo da etapa 2 com os valores atualizados de \mathbf{p}_{nw}^{i+1} , \mathbf{S}_w^{i+1} .	Etapa 4

Nesse algoritmo, apenas para a solução do problema de fluxo, os sistemas resultantes da solução da equação de pressão e velocidade podem ser resolvidos utilizando procedimentos iterativos para sistemas simétricos, como o gradiente conjugado (GC), empregado nesse trabalho. Para a equação da saturação não é necessário resolver-se um sistema, mas um seqüenciamento de operação das variáveis nodais do MVF ou do MEFD.

3.4.2.

Procedimento *staggered* para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico via MEF

Como apresentado por Muller (2007), para o problema com fluxo bifásico acoplado utilizando o MEF, adotou-se a seguinte estratégia de solução: particionou-se o problema, mostrado na equação 3.28, em duas partes: problema mecânico e problema de pressão-saturação.

Problema mecânico:

$$[\mathbf{K}]\{\delta^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i+1}\} = \{\Delta t^{t+\Delta t}\mathbf{F}_u^i(\mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t)\} \quad (3.100)$$

Problema de pressão-saturação.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{nw} + \Delta t \theta \mathbf{H}_{nw} & \mathbf{O}_{nw} - \Delta t \theta \mathbf{M}_{nw} - \mathbf{P}_{nw} \\ \mathbf{G}_w + \Delta t \theta \mathbf{H}_w & \mathbf{O}_w - \Delta t \theta \mathbf{M}_w - \mathbf{P}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i(\mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i(\mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \end{Bmatrix} \quad (3.101)$$

Adotando os campos de deslocamentos e saturações da fase molhante para verificação da convergência da solução, descreve-se o algoritmo, apresentado em Muller (2007), para solução do problema num instante $t + \Delta t$ como:

Instante $t + \Delta t$.	Etapa 1
Estimativa inicial ${}^{t+\Delta t}\mathbf{p}_{nw} = {}^t\mathbf{p}_{nw}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w = {}^t\mathbf{S}_w$	

Procedimento <i>staggered</i> iteração $i+1$	Etapa 2
Avalia-se \mathbf{u}^{i+1} , com a equação de equilíbrio mecânico e verifica-se convergência \mathbf{u}^{i+1} para tolerância ou número máximo de iterações.	Etapa 3
Com o vetor \mathbf{u} obtido na etapa 3 avalia-se \mathbf{p}_{nw}^{i+1} , \mathbf{S}_w^{i+1} com as equações de fluxo bifásico e verifica-se a convergência das saturações da fase molhante.	Etapa 4
Não verificadas as etapas 3 e 4 para convergência ou número máximo de iterações retorna-se a etapa 2 como os valores atualizados de \mathbf{p}_{nw} , \mathbf{S}_w , caso contrário inicia-se um novo passo da etapa 1.	Etapa 5

3.4.3.

Procedimento *staggered* para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico via MVF e MEFD

De forma similar ao apresentado nas seções anteriores para os algoritmos utilizados na solução dos problemas de fluxo bifásico e fluxo bifásico acoplado, nessa seção apresenta-se o algoritmo empregado na solução de fluxo bifásico acoplado para as formulações em MVF e MEFD.

O algoritmo empregado é uma abordagem dos dois algoritmos apresentados anteriormente sendo um simples acoplamento dos dois para o caso das formulações em MVF e MEFD, de forma análoga também ao procedimento descrito em Alcoforado (2007). Alcoforado apresenta uma discussão desse procedimento iterativo sequencial com suas diversas formas de implementação.

Assim, da mesma forma que o procedimento adotado por Muller (2007), propôs-se neste trabalho a mesma divisão do problema acoplado global: um problema mecânico dado por:

$$[\mathbf{K}]\{\delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1}\} = \{\Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{pmw}^i(\mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t)\} \quad (3.102)$$

E as duas possibilidades para o problema de pressão-saturação.

MVF

1. Resolve-se a equação da pressão.

$$[\Delta t \boldsymbol{\theta} \mathbf{H} + \mathbf{G}] \{ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} \} = \{ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(\mathbf{p}, t) \} \quad (3.103)$$

2. Calcula-se o campo de velocidades.

3. Resolve-se a equação da saturação.

$$\begin{aligned} S_{wi}^{t+\Delta t} = S_{wi}^t - \frac{\Delta t}{\phi_i A_i} \sum_{j=1}^{n_{si}} (f_{wj} \mathbf{v}_{ij}) \cdot \mathbf{n}_j + \frac{\Delta t}{\phi_i A_i} \sum_{j=1}^{n_{si}} (\lambda_{ij} \mathbf{k} \nabla p_c) \cdot \mathbf{n}_j - \\ \frac{\Delta t}{\phi_i A_i} \sum_{j=1}^{n_{si}} (\Delta \rho \mathbf{g} \mathbf{k} \lambda_{ij} \nabla z) \cdot \mathbf{n}_j \\ + \frac{\Delta t}{\phi_i A_i} \sum_{e=1}^{e_{si}} q_{we} A_e \end{aligned} \quad (3.104)$$

MEFD

1. Resolve-se o problema misto.

$$[\Delta t \boldsymbol{\theta} \mathbf{H} + \mathbf{G}] \{ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} \} = \{ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(\mathbf{p}, t) \} \quad (3.105)$$

2. Calcula-se o campo de velocidades.

3. Resolve-se a equação da saturação.

$$\frac{d\mathbf{S}_w}{dt} = L(\mathbf{S}_w) \quad (3.106)$$

Assim procedendo, o algoritmo sugerido é mostrado a seguir:

Instante $t + \Delta t$.	Etapa 1
Estimativa inicial ${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw} = {}^t \mathbf{p}_{nw}$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w = {}^t \mathbf{S}_w$	
Procedimento <i>staggered</i> iteração $i+1$	Etapa 2
Avalia-se \mathbf{u}^{i+1} , com a equação de equilíbrio mecânico e verifica-se	Etapa 3

convergência \mathbf{u}^{i+1} para tolerância ou número máximo de iterações.	
Procedimento iterativo $j+1$.	Etapa 4
Avalia-se \mathbf{p}_{mw}^{j+1} , \mathbf{v}^{j+1} , \mathbf{S}_w^{j+1} com as equações via MVF ou MEFD e verifica-se a convergência conjunta pela tolerância ou número máximo de iterações.	Etapa 5
Verificada a etapa 5, atualiza-se as grandezas ${}^t\mathbf{p}_{mw}$, ${}^t\mathbf{S}_w$ e porosidade, e retorna-se a etapa 1 e um novo passo de tempo é iniciado, caso contrário inicia-se um novo passo da etapa 4 com os valores atualizados de \mathbf{p}_{mw}^{j+1} , \mathbf{S}_w^{j+1} .	Etapa 6
Não verificadas as etapas 3 e 6 para convergência ou número máximo de iterações retorna-se a etapa 2 como os valores atualizados de \mathbf{p}_{mw} , \mathbf{S}_w , caso contrário inicia-se um novo passo da etapa 1.	Etapa 7