

2.

Formulações Matemáticas para Simulação de Fluxo Bifásico e Bifásico-acoplado em Meios Porosos

2.1.

Considerações Gerais

Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão das formulações, normalmente consideradas na simulação de fluxo em meios multifásico com acoplamento mecânico. Abordam-se as principais hipóteses aplicadas à modelagem de fluxo em meios porosos, em condições de fluxo multifásico, partindo-se dos princípios da formulação de meio contínuo, a modelagem matemática do fenômeno e as definições fundamentais para estabelecimento das equações.

Na primeira parte é apresentada a formulação para estabelecimento da equação do equilíbrio mecânico do meio, acompanhando o trabalho apresentado por Muller (2007). Na segunda parte, são apresentadas as formulações de fluxo bifásico na forma parabólica e na forma hiperbólica, e por fim, considerações importantes sobre os modelos considerados para os fluidos e modelos constitutivos considerados para o meio sólido são apresentados.

2.2.

Equação de equilíbrio

Apresentam-se nesta seção as equações que governam o comportamento mecânico em meios porosos deformáveis considerando como válido o princípio das tensões efetivas.

A equação de equilíbrio é determinada utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais para problemas quase estáticos que relaciona as velocidades das grandezas estáticas reais, como a taxa da tensão total $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, a taxa das forças de corpo $\dot{\mathbf{b}}$, e a taxa das forças de superfície $\dot{\mathbf{t}}$ com as grandezas cinemáticas virtuais como as deformações virtuais $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ e os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$ sendo colocada na seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (2.1)$$

As taxas das tensões totais podem ser expressas em termos das taxas das tensões efetivas, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$, e das velocidades das poro pressões, \dot{p} , na forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{m} \dot{p} \quad (2.2)$$

A descrição da relação constitutiva, em termos de taxas, incluindo diversos fenômenos pode ser dada pela equação:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}_T (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0) + \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_0 \quad (2.3)$$

Na equação (2.3), $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ representa a taxa de deformação total do esqueleto, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ a taxa das deformações devido à fluência (expressa por uma função de fluência \mathbf{c} , dependente do nível e da trajetória de tensões), $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ a taxa das deformações volumétricas (a qual considera a deformabilidade dos grãos), $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ que representa outras taxas de deformação, como as provocadas por fenômenos térmicos e químicos e por fim $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'_0$ que representa a taxa da tensão efetiva inicial. A matriz \mathbf{D}_T é dependente do nível e da trajetória de tensões e vários modelos constitutivos podem ser utilizados para defini-la.

Simplificando a equação (2.3), desprezando-se as parcelas $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$, tem-se:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_0 \quad (2.4)$$

Sendo considerado que:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = -\mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} \quad (2.5)$$

em que K_s representa o módulo volumétrico dos grãos e que:

$$\mathbf{D}_T = \mathbf{D}_T(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (2.6)$$

E ainda considerando a equação (2.2), a equação (2.4) pode ser escrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 - \mathbf{m} \dot{p} \quad (2.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{m} \left[1 - \frac{\mathbf{D}_T \mathbf{I}}{3K_s} \right] \dot{p}$$

Considerando que $\boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0$ representa a velocidade da tensão responsável por toda deformação da fase sólida, a equação (2.7) pode ser expressa como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}'' + \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} \quad (2.8)$$

Baseando-se na hipótese de linearidade geométrica pode-se descrever a relação entre velocidades de deslocamentos e velocidades de deformações infinitesimais na seguinte equação:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (2.9)$$

Substituindo as considerações acima na equação (2.1) tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \dot{p} \frac{1}{K_s} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{m} \dot{p} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.3.

Análise de Fluxo Bifásico em Meios Porosos

Nessa seção são apresentadas as considerações para equacionamento do problema de fluxo bifásico em meios porosos, é inicialmente apresentado o equacionamento de fluxo multifásico em meios porosos de uma forma geral, em sequência as formulações para fluxo bifásico. São inúmeros os livros textos encontrados na literatura em que se podem encontrar essas formulações, até partes não cobertas pela revisão que é a seguir apresentada. Os trabalhos de Aziz e Settari (1959) e Peaceman (1977) servem muito bem para eventual esclarecimento e ainda outras abordagens que nesse texto não são consideradas.

A revisão para montagem da formulação parabólica é basicamente a mesma que é apresentada em Muller (2007) e Fridman (1996), para o equacionamento da formulação hiperbólica seguiu-se o trabalho de Mendonça (2003) e o trabalho clássico de Peaceman (1977).

2.3.1.

Equação do Balanço de Massa

Apresenta-se neste item a formulação geral das equações para o problema hidro-mecânico com fluxo bifásico em um meio poroso deformável considerando o fluxo de óleo e água. A seguir apresenta-se a formulação encontrada em Muller (2007) e Fridman (1996), que por sua vez seguem a formulação de Lewis e Schrefler (1998), e a apresentada em Peaceman (1977).

Em um meio poroso, o fluxo de fluido deve satisfazer a conservação de massa de fluido. Para efetuar o balanço de massa de fluido, toma-se como volume de controle um cubo elementar constituído de material poroso, Figura 2.1

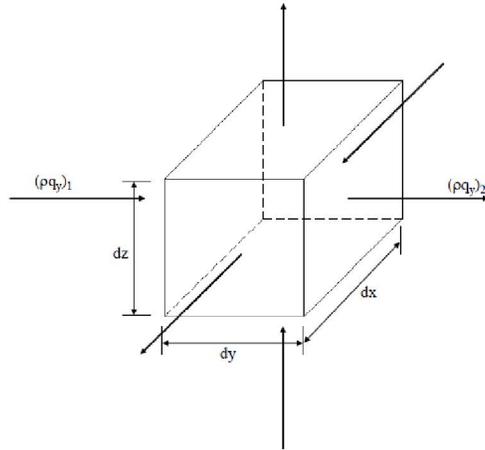


Figura 2-1 Volume de controle para balanço de massa do fluido.

Tomando-se inicialmente o fluxo na direção dy através da face $dx dz$, tem-se como fluxo de massa de fluido, $(\rho q_y)_1 dx dz$ e $(\rho q_y)_2 dx dz$. Sendo ρ e q densidade do fluido e vazão, respectivamente. Considerando-se que (ρq_y) seja uma função contínua e diferenciável, pode-se escrever

$$(\rho q_y)_2 = (\rho q_y)_1 + \frac{\delta(\rho q_y)}{\delta y} dy \quad (2.11)$$

Dessa forma, o fluxo na direção y gera uma diminuição na massa de fluido igual a:

$$(\rho q_y)_2 - (\rho q_y)_1 = \frac{\delta(\rho q_y)}{\delta y} dy \quad (2.12)$$

O balanço de massa de um fluido que atravessa um elemento de volume $dv = dx dy dz$ é dado por:

$$\left(\frac{\delta(\rho q_x)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho q_y)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho q_z)}{\delta z} \right) dx dy dz = \nabla^T (\rho q) dx dy dz \quad (2.13)$$

Podendo-se então, representar o balanço de massa de fluido no meio poroso, equação da continuidade, dado por:

$$\nabla^T(\rho q)dx dy dz = \frac{\Delta}{\Delta t}(m_\pi dx dy dz) \quad (2.14)$$

Ou ainda, simplificadaamente:

$$\nabla^T(\rho q) = \frac{\Delta}{\Delta t} m_\pi = \dot{m}_\pi \quad (2.15)$$

em que \dot{m}_π representa o incremento de massa de fluido numa parcela infinitesimal do meio poroso por unidade de tempo.

Tomando-se a equação de Darcy para representar o fluxo de fluido, pode-se de uma forma geral expressar a equação da continuidade por:

$$\begin{aligned} & -\nabla^T [T_m \nabla(p_\pi + \rho_\pi gh)] + \frac{\phi}{B_\pi} \frac{\partial S_\pi}{\partial t} + \phi S_\pi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_\pi} \right) + \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R_{s\pi} S_\pi}{B_\pi} \right) + \\ & \lambda_f \left[\left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\epsilon} + \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \dot{p} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Em que:

$$\begin{aligned} T_m &= \mathbf{k} \left(\frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi} + R_{s\pi} \frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi} \right) \\ \lambda_f &= \frac{S_\pi}{B_\pi} + \frac{R_{s\pi} S_\pi}{B_\pi} \end{aligned} \quad (2.17)$$

sendo \mathbf{k} a matriz de permeabilidade intrínseca do meio poroso, p a poro pressão como descrito em (2.2), ϕ a porosidade do meio, g a aceleração da gravidade, h a carga de elevação, $k_{r\pi}$ a permeabilidade relativa, μ a viscosidade dinâmica, S o grau de saturação, B o fator de variação de volume, $R_{s\pi}$ o fator de dissolução de gás no líquido, todos referentes à fase π e ∇ o operador diferencial,

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

O fator de variação de volume B descreve a razão entre o volume da fase π medido nas condições de pressão em questão e o volume medido nas condições padrão, dado por:

$$B_{\pi} = \frac{V_{\pi}}{V_{\pi STC}}.$$

O fator de dissolução de gás no líquido do $R_{s\pi}$ relaciona o volume de gás medido nas condições padrão, dissolvido nas condições de pressão padrão, dado por:

$$R_{s\pi} = \frac{V_{dgSTC}}{V_{\pi STC}}.$$

A parcela $\left(\frac{\phi}{B_{\pi}} \frac{\partial S_{\pi}}{\partial t} \right)$ descreve a velocidade de variação da saturação da fase π .

A parcela $\left[\phi S_{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{\pi}} \right) + \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R_{s\pi} S_{\pi}}{B_{\pi}} \right) \right]$ representa a velocidade de variação da densidade de fluido, também da fase π .

A parcela $(\mathbf{m}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ representa a velocidade de variação volumétrica do esqueleto sólido.

A parcela $\left(\frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{m} \dot{p} - \frac{(1-\phi)}{K_s} \dot{p} \right)$ determina a velocidade de variação do volume de grãos devido às tensões efetivas.

Na condição não saturada os vazios do esqueleto sólido são preenchidos parcialmente por fluido molhante e parcialmente por fluido não-molhante sendo

$$S_{mw} + S_w = 1 \quad (2.18)$$

A equação geral de balanço de massa para fluxo bifásico, de acordo com a equação 2.16 é dada por:

$$-\nabla^T [T_m \nabla (p_{\pi} + \rho_{\pi} gh)] + \frac{\phi}{B_{\pi}} \frac{\partial S_{\pi}}{\partial t} + \phi S_{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{\pi}} \right) + \frac{S_{\pi}}{B_{\pi}} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

em que:

$$T_m = \mathbf{k} \left(\frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi} \right) \quad (2.20)$$

2.3.2.

Formulação Parabólica

Dada a equação geral de balanço de massa, a formulação para fluxo bifásico pode ser posta de diversas formas, seja em seu arranjo, seja nas variáveis empregadas. Uma possível formulação é a que se segue, de acordo com Aziz e Setari (1979), denominada de “parabólica”, e ainda a mesma apresentada por Muller (2007) e Frydman (1996).

A equação de balanço de massa para ambos fluidos, água e óleo, é da forma:

$$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \right) \nabla (p_{nw} + \rho_{nw} gh) \right] + \frac{\phi}{B_{nw}} \frac{\partial S_{nw}}{\partial t} + \phi S_{nw} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) + \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.21)$$

$$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \right) \nabla (p_w + \rho_w gh) \right] + \frac{\phi}{B_w} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \phi S_w \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) + \frac{S_w}{B_w} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.22)$$

Usando a definição de pressão capilar, $p_c = p_{nw} - p_w$, e considerando a equação (2.18) podem ainda se obter diferentes formulações de acordo com as variáveis selecionadas, quais sejam (p_{nw}, S_w) ou (p_w, S_{nw}) , como se segue:

- Formulação (p_{nw}, S_w) :

$$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \right) \nabla (p_{nw} - p_c + \rho_w gh) \right] + \frac{\phi}{B_w} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \phi S_w \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) + \frac{S_w}{B_w} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

$$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \right) \nabla (p_{nw} + \rho_{nw} gh) \right] + \frac{\phi}{B_{nw}} \frac{\partial (1 - S_w)}{\partial t} + \phi (1 - S_w) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) + \frac{(1 - S_w)}{B_{nw}} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

- Formulação (p_w, S_{nw}) :

$$\begin{aligned}
 & -\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \right) \nabla (p_w + \rho_w g h) \right] + \frac{\phi}{B_w} \frac{\partial(1-S_{mw})}{\partial t} + \phi(1-S_{mw}) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) + \\
 & \frac{(1-S_{mw})}{B_w} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
 & -\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \right) \nabla (p_w + p_c + \rho_{nw} g h) \right] + \frac{\phi}{B_{nw}} \frac{\partial S_{mw}}{\partial t} + \phi S_{mw} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) + \\
 & \frac{S_{mw}}{B_{nw}} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Ainda assim, considerando incompressibilidade de fluidos e do meio sólido a formulação (p_{nw}, S_w) pode ser posta ainda da seguinte forma:

$$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \nabla (p_{nw} - p_c + \rho_w g h) \right] + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{2.27}$$

$$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}} \right) \nabla (p_{nw} + \rho_{nw} g h) \right] + \phi \frac{\partial(1-S_w)}{\partial t} + (1-S_w) \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{2.28}$$

2.3.3. Formulação Hiperbólica

Outra maneira de se formular as equações de fluxo bifásico é pela sua forma hiperbólica, segundo Aziz e Setari (1959), utilizada em diversos trabalhos, como por exemplo, em Peaceman (1977). Nessa forma é apresentada uma equação referida como equação da pressão e outra como equação da saturação, como é mostrado a seguir.

- Equação da Pressão

Para obtenção da equação da pressão, considerando as equações para ambas as fases, equações 2.29 e 2.30, são somadas para eliminação do termo referente a derivada da saturação, na forma:

$$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \nabla (p_w + \rho_w gh) \right] + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

+

$$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_w} \right) \nabla (p_{nw} + \rho_{nw} gh) \right] + \phi \frac{\partial (1 - S_w)}{\partial t} + (1 - S_w) \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(2.29)

que resulta em:

$$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \nabla (p_{nw} + p_w + \rho_w gh + \rho_{nw} gh) \right] + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(2.30)

Simplificadamente a equação 2.30 pode ser descrita em termos da velocidade total de fluxo, v_t , como:

$$-\nabla^T v_t + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(2.31)

Em que:

$$v_t = v_w + v_{nw}$$

(2.32)

e v_w é a velocidade da fase molhante definida como:

$$v_w = -\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \nabla (p_w + \rho_w gh)$$

(2.33)

e v_{nw} é a velocidade da fase não molhante definida como:

$$v_{nw} = -\mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_w} \right) \nabla (p_{nw} + \rho_{nw} gh)$$

(2.34)

Desta forma tem-se que:

$$v_t = -\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \nabla p_w - \mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_w} \right) \nabla p_{nw} - \mathbf{k} \nabla \left(\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_w} \right) \rho_w gh + \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \rho_{nw} gh \right)$$

(2.35)

Dado que $p_c = p_{nw} - p_w$, derivando-se pode se ter:

$$\nabla p_c = \nabla p_{nw} - \nabla p_w \quad (2.36)$$

$$\nabla p_w = \nabla p_{nw} - \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \quad (2.37)$$

E substituindo a equação 2.37 na equação 2.35 tem-se que:

$$\begin{aligned} v_t = & -\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \left(\nabla p_{nw} - \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \right) - \mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}} \right) \nabla p_{nw} - \\ & \mathbf{k} \nabla \left(\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}} \right) \rho_{nw} gh + \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \rho_w gh \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Assim a equação da pressão é posta na seguinte forma:

$$\nabla^T v_t - Q_t = 0 \quad (2.39)$$

$$\nabla^T \left(\begin{array}{l} -\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \left(\nabla p_{nw} - \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \right) - \mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}} \right) \nabla p_{nw} - \\ \mathbf{k} \nabla \left(\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}} \right) \rho_{nw} gh + \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \rho_w gh \right) \end{array} \right) - Q_t = 0 \quad (2.40)$$

em que $Q_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$.

- Equação da Saturação

De acordo com Peaceman (1977), a equação da saturação pode ser obtida através da combinação das equações 2.29 e 2.30, na forma:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + v_a \nabla S_w + \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla S_w = 0 \quad (2.41)$$

Sendo definidas as seguintes funções:

$$f_w = \frac{\frac{k_{rw}}{\mu_w}}{\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{rmw}}{\mu_{nw}}} \quad (2.42)$$

$$h_w = - \frac{\frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{k_{rmw}}{\mu_{nw}}}{\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{rmw}}{\mu_{nw}}} \frac{dp_c}{dS_w} \quad (2.43)$$

em que f_w é a função de fluxo fracionário da fase molhante e h_w é a função de mobilidade da fase molhante e ainda:

$$\mathbf{D} = h_w \frac{dp_c}{dt} \mathbf{k} \quad (2.44)$$

e v_a na equação (2.41) é dado por:

$$v_a = \begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \frac{df_w}{dS_w} + (k_x g_x + k_{xy} g_y) G \\ v_y \frac{df_w}{dS_w} + (k_{xy} g_x + k_y g_y) G \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

2.4.

Resumo das Equações Gerais

Dadas as formulações apresentadas nas seções anteriores, o Quadro 2.1 apresenta um resumo das equações que serão utilizadas no Capítulo 3 para o tratamento numérico.

Quadro 2.1 Resumo das Equações Governantes

Equação de equilíbrio	
$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \dot{p} \frac{1}{K_s} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}'_0 d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{m} \dot{p} d\Omega$ $- \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0$	Equação (2.10.)

Formulação de Fluxo – Parabólico	
$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \right) \nabla (p_{nw} + \rho_{nw} gh) \right] + \frac{\phi}{B_{nw}} \frac{\partial S_{nw}}{\partial t} + \phi S_{nw} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) + \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	Equação (2.23.) e
$-\nabla^T \left[\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \right) \nabla (p_{nw} + \rho_{nw} gh) \right] + \frac{\phi}{B_{nw}} \frac{\partial (1 - S_w)}{\partial t} + \phi (1 - S_w) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) + \frac{(1 - S_w)}{B_{nw}} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	Equação (2.24.)

Formulação de Fluxo – Hiperbólico	
<ul style="list-style-type: none"> Equação da Pressão $\nabla^T \left(\begin{array}{l} -\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \left(\nabla p_{nw} - \frac{dp_c}{ds_w} \nabla S_w \right) - \mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_{nw}} \right) \nabla p_{nw} - \\ \mathbf{k} \nabla \left(\left(\frac{k_{rw}}{\mu_{nw}} \right) \rho_w gh + \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \rho_{nw} gh \right) \end{array} \right) - Q_t = 0$	Equação (2.49),
<ul style="list-style-type: none"> Equação da Saturação $\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + v_a \nabla S_w + \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla S_w = 0 \text{ com}$ $\mathbf{D} = h_w \frac{dp_c}{dt} \mathbf{K} \text{ e } v_a = \begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \frac{df_w}{dS_w} + (k_x g_x + k_{xy} g_y) G \\ v_y \frac{df_w}{dS_w} + (k_{xy} g_x + k_y g_y) G \end{bmatrix}$	Equação (2.41.), Equação (2.44.) e Equação (2.45.)

2.5.

Definições para as Pressões de Fluidos

Para o acoplamento das equações de equilíbrio mecânico e as equações de fluxo bifásico faz-se necessária a definição da taxa de poropressão de p , \dot{p} .

Assim, adotando a mesma simbologia de Muller (2007) a taxa de poropressão, \dot{p} , pode ser expressa da seguinte forma:

$$\dot{p} = \dot{S}_w p_w + S_w \dot{p}_w + \dot{S}_{nw} p_{nw} + S_{nw} \dot{p}_{nw} \quad (2.46)$$

E com a definição de pressão capilar na seguinte forma:

$$p_c = p_{nw} - p_w \quad (2.47)$$

e escolhendo duas variáveis como primárias, no caso, p_{nw} e S_w , a equação (2.46) se torna:

$$\dot{p} = \dot{p}_{nw} - S_w \dot{p}_c + \dot{S}_w p_c \quad (2.48)$$

Outra possibilidade de se obter a pressão de poro (p) é através da definição de pressão média, como proposta em Geiger et al (2004) na seguinte forma:

$$\dot{p} = \frac{\dot{p}_{nw} + \dot{p}_w}{2} \quad (2.49)$$

em que, a equação 2.47 ainda permanece válida.

2.5.1.

Classificação de Equações Diferenciais Parciais (EDP)

Como visto nas seções anteriores, o problema de fluxo bifásico em meios porosos pode ser formulado em termos de equações diferenciais parciais postas em dois tipos: parabólica e hiperbólica. A adoção desses nomes segue o trabalho de Aziz e Setari (1959), entretanto essa nomenclatura não está associada à classificação normalmente adotada em textos matemáticos, como será visto a seguir.

Dada a equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (2.50)$$

de outra forma:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (2.51)$$

ou ainda:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + f = 0 \quad (2.52)$$

diz-se que:

$$EDP \text{ Elíptica} \quad se \quad ac - b^2 > 0$$

$$EDP \text{ Parabólica} \quad se \quad ac - b^2 = 0$$

$$EDP \text{ Hiperbólica} \quad se \quad ac - b^2 < 0$$

Na física e engenharia defronta-se freqüentemente com esses tipos de equações ao se modelar fenômenos importantes, como fluxo de fluidos, transporte de contaminantes, fenômenos de condução de calor, entre outros. Alguns exemplos:

EDP's elípticas

Equação de Laplace $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

Equação de Poisson $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$

EDP parabólica

Equação de calor unidimensional $u_t = c^2 u_{xx}$

EDP hiperbólica

Equação de onda $u_{tt} = u_{xx}$

Segundo Kreyszig (1993), a definição desses tipos de equações pode indicar o possível comportamento da solução e o método de solução apropriado.

Ainda segundo Kreyszig (1993), na solução numérica dos três tipos de equações quando se tem a substituição das derivadas por termos em diferenças, a solução das EDP's parabólicas e hiperbólicas não tem a garantia de convergência

da solução aproximada com o refinamento da discretização. Assim, deve-se ter outros critérios, restrições para a adequada convergência e estabilidade da solução aproximada.

Essa definição ainda pode se apresentar híbrida com a possibilidade de variar de acordo com o espaço das variáveis independentes. Isso posto, embora as formulações propostas nas seções anteriores sejam denominadas de parabólica e hiperbólica, o comportamento dessas equações pode ser classificado ora como parabólico, com solução mais suave, ou ora como hiperbólico com solução que apresenta ondas de rarefação e/ou ondas de choque.

Para exemplificar esses dois tipos de comportamento, uma análise da equação 2.43, equação da saturação, pode ser feita: quando não se considera a pressão capilar no sistema de equações, a equação de saturação se torna do tipo hiperbólica como se segue:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + v_a \nabla S_w = 0 \quad (2.53)$$

ou ainda quando a parcela devido a pressão capilar é incluída, seu comportamento é tido como parabólico:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + v_a \nabla S_w + \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla S_w = 0 \quad (2.54)$$

2.5.2.

Pós-processamento da Velocidade

O procedimento de solução adotado nesse trabalho segue um processo iterativo em três blocos: solução da equação da pressão, obtenção da velocidade e solução da equação da saturação até atingir a convergência das três variáveis.

Da equação 2.41 percebe-se a necessidade da obtenção dos componentes de velocidade no passo intermediário, sendo que vários procedimentos são apresentados na literatura.

Uma primeira aproximação é o cálculo da velocidade a partir da Lei de Darcy na equação 2.38 aqui rerepresentada:

$$v_t = -\mathbf{k} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \nabla p_w - \mathbf{k} \left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}} \right) \nabla p_{nw} - \mathbf{k} \nabla \left(\left(\frac{k_{rnw}}{\mu_{nw}} \right) \rho_{nw} gh + \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \rho_w gh \right) \quad (2.55)$$

De outra forma, Alcoforado (2007) afirma que a aplicação da formulação do método de Galerkin em conjunção com a lei de Darcy para problemas com permeabilidade heterogênea gera campos de velocidades não conservativos (Mosé et al.,1994) fazendo com que a lei de conservação de massa total não seja obedecida no nível de cada elemento.

Mendonça (2003) utiliza-se da estratégia de pós-processamento global do campo de velocidades apresentada por Malta et al (2000) baseada na formulação variacional da lei de Darcy combinada com o resíduo da equação de balanço de massa, como se segue:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_p \left(\tilde{\mathbf{v}}_t + \mathbf{K} \lambda_t \nabla p_{nw} - \mathbf{K} \lambda_w \frac{dp_c}{dS_w} \nabla S_w - \mathbf{K} \mathbf{g} (\lambda_w \rho_w + \lambda_{nw} \rho_{nw}) \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega} \delta \nabla \cdot \mathbf{N}_p (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_t - Q_t) d\Omega^e = 0 \quad (2.56)$$

em que $\tilde{\mathbf{v}}_t$ é o vetor de velocidades pós-processadas e o parâmetro δ é dependente da malha de elementos finitos e pode ser tomado como $he/2$, onde he é o tamanho característico do elemento dado por $he = 2A$, sendo A a área do elemento.

Com a utilização desta técnica de pós-processamento do campo de velocidades as variáveis do problema, pressão, velocidade e saturação, são aproximadas por interpolações Lagrangianas de mesma ordem (Mendonça, 2003).

De outra forma, Alcoforado (2007), Correa (2006) e Ribeiro (1996) apresentam a interpolação do campo de velocidades através das aproximações no espaço de Raviart-Thomas de mais baixa ordem, RT_0 , introduzidas pela representação das velocidades nas arestas dos elementos e possibilitando a descontinuidade da velocidade na direção tangencial das arestas.

Como exemplos, são mostrados na figura 2-2 os elementos triangular e quadrático e as funções de interpolação de RT_0 .

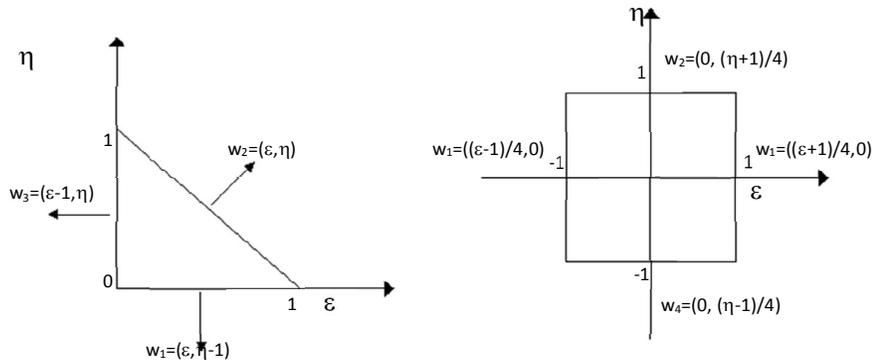


Figura 2-2 Elementos triangular e quadrilateral de RT_0 .

Como mostrado na figura 2-2 as funções de aproximação de RT_0 para elementos triangulares e quadrilaterais são da forma:

$$w = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon - 1 \\ \eta - 1 & \eta & \eta \end{bmatrix} \text{ para elementos triangulares}$$

$$w = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon + 1}{4} & 0 & \frac{\epsilon - 1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\eta + 1}{4} & 0 & \frac{\eta - 1}{4} \end{bmatrix} \text{ para elementos quadrilaterais}$$

Outros tipos de elementos, as funções de RT_0 podem ser encontradas em Hoteit et al (2008).

O espaço de aproximação de RT_0 é composto de três espaços de aproximação distintos: uma pressão média em todo o elemento; uma pressão média em cada face do elemento, e a variável vetorial (fluxo) no elemento como interpolação de fluxo nas arestas de acordo com a função de forma.

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n^{\circ} \text{ faces}} v_j \mathbf{w}_j \quad (2.57)$$

Como propriedades das funções de aproximações de RT_0 tem-se que $\nabla \cdot \mathbf{w}_j$ é constante no elemento e que $\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w}_j = 1$. O trabalho de Chavent et al (1991) serve como uma boa base para compreensão dos elementos de RT.

Para que essas propriedades sejam válidas para um elemento qualquer é necessário considerar a transformação de Piola na forma:

$$\Phi_j = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}_j \quad (2.58)$$

em que \mathbf{P} é a matriz de transformação de Piola dada por:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{J}}{\det \mathbf{J}} \quad (2.59)$$

e \mathbf{J} é a matriz jacobiana do elemento e $\det \mathbf{J}$ o determinante da matriz jacobiana.

2.5.3.

Determinação da Porosidade

Além das principais variáveis envolvidas no acoplamento de fluxo bifásico e mecânico (deslocamentos e poropressões), outra propriedade de extrema importância existente nesses dois comportamentos é a porosidade, e a forma de sua determinação é um ponto que deve ser considerado.

Em formulações clássicas de simulação de reservatórios de petróleo, Settari (1989) e Tortike e Farouq (1989), apud Pao et al (2001), de maneira desacoplada, apresentam uma relação que é comumente adotada para a avaliação da porosidade, dada por:

$$d\phi = c_p d\bar{p} \quad (2.60)$$

em que $d\phi$ é a variação da porosidade com a variação de pressão $d\bar{p}$ e c_p é comumente conhecido com compressibilidade do poro, Pao et al. (2001).

Entretanto, Pao et al (2001) colocam esta relação em dúvida por estabelecer um relação linear para a variação da porosidade; experimentos tem mostrado comportamento contrário a essa relação, Havmoller, apud Pao et al (2001).

Pao et al (2001) propõem a seguinte equação matemática demonstrada utilizando a nomenclatura de Lewis e Schrefler (1998), na qual se baseou o trabalho de Muller (2007):

$$d\phi = \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_m} \right) \left(d\sigma' + \left(1 - \frac{1}{K_m} \right) d\bar{p} \right) + \left(\frac{1}{K_m} - \frac{K}{K_m^2} \right) d\bar{p} \quad (2.61)$$

Em que K e K_m são os módulos de deformabilidade do meio e da matriz porosa, respectivamente. Ainda de uma forma mais geral a equação 2.61 pode ser posta na seguinte forma:

$$d\phi = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{3K_m} - \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{dp}{9K_m^2} + \frac{dp}{K_m} \quad (2.62)$$

2.5.4.

Relações Constitutivas para Permeabilidade

No modelo físico considerado para as definições das equações governantes anteriores, cada constituinte i ($i = s, f_w, f_{nw}$), sólido, fluido molhante e fluido não molhante, tem uma densidade obtida com sua respectiva fração volumétrica $\eta_i = V_i/V$ onde V_i = volume do constituinte i , sendo:

$$\sum_i \eta_i = 1 \quad (2.63)$$

A densidade (média) ρ_i é definida como:

$$\rho_i = \frac{1}{V} \int_V m_i(\mathbf{x}, t) dV = \frac{1}{V} \int_{V_i} m_i(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.64)$$

e ainda que:

$$\phi = 1 - \eta_s \text{ e } \eta_s \text{ é a fração volumétrica de sólido.} \quad (2.65)$$

Da mesma forma que são definidas frações volumétricas das fases pode-se definir a fração de volume de poros, quando o meio sólido é considerado, na forma: $\eta_v = V_v/V$, sendo V_v o volume não ocupado por meio sólido.

Quando os vazios do meio poroso estão preenchidos por dois ou mais fluidos imiscíveis, o conceito de saturação é definido, como sendo a fração do volume poroso ocupada por uma determinada fase.

Colocando a equação 2.63 de outra forma, e considerando fluxo bifásico, temos para saturação, que:

$$\sum_{i=w,nw} S_i = 1, \quad (2.66)$$

em que S_w e S_{nw} são as saturações de fluido molhante e não-molhante, respectivamente. Ainda assim, pode ser considerado que determinada fase possa atingir seu menor valor possível, caracterizado como saturação residual, sendo representada por S_{ri} ($i = w, nw$).

É comum para análise de escoamento bifásico, a definição de saturação efetiva como:

$$S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{rnw}}, \quad (2.67)$$

em que S_e é a saturação efetiva, S_w é a saturação da fase molhante, S_{rw} é a saturação residual da fase molhante e S_{rnw} é a saturação residual da fase não-molhante, e ainda:

$$S_{rw} \leq S_w \leq 1 - S_{rnw}. \quad (2.68)$$

A lei de Darcy generalizada é utilizada para o fluxo multifásico que relaciona a velocidade média de cada fase ao gradiente, à permeabilidade e à viscosidade correspondente da pressão. Assim, a velocidade média para a fase π é:

$$v_\pi = \eta_\pi v_{v\pi} = \phi S_\pi v_{v\pi} = -\frac{K_\pi}{\mu_\pi} \cdot (\nabla p_\pi + \rho_\pi \mathbf{g}). \quad (2.69)$$

em que g é o vetor aceleração gravitacional, p_π , μ_π , $v_{r\pi}$ e K_π são respectivamente pressão, viscosidade dinâmica, velocidade real, e permeabilidade intrínseca π . Também, K_π é relacionado à permeabilidade intrínseca K e à permeabilidade relativa $k_{r\pi}$ por:

$$K_\pi = k_{r\pi} K. \quad (2.70)$$

Por ser uma característica intrínseca do meio alguns autores empregam formulações de variação da permeabilidade absoluta como dependente da porosidade como, por exemplo, a relação Carman-Kozeny, isto é:

$$K = K_0 \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2} \quad (2.71)$$

em que K_0 pode ser tomada em eixos de permeabilidade principal tais como em duas dimensões, por exemplo:

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{x0} & 0 \\ 0 & k_{y0} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

com k_{x0} e k_{y0} sendo as permeabilidades intrínsecas iniciais nas direções x e y , respectivamente.

O tensor de permeabilidade absoluta K_0 definido na Equação (2.72) mede a habilidade do meio em permitir o escoamento de fluidos através de seus poros. Portanto o tensor de permeabilidade absoluta é uma característica intrínseca do meio.

Outra possibilidade apresentada em Guimarães (2002) é uma aproximação exponencial da forma:

$$K = K_0 \exp[b(\phi - \phi_0)] \quad (2.73)$$

A permeabilidade relativa tem sido considerada através de curvas obtidas em laboratório através de ensaios realizados sobre amostras do meio poroso, sendo expressas por funções não-lineares da saturação da fase molhante s_w .

Assim, vários autores apresentam diferentes formas de modelar as curvas de permeabilidade relativas.

Um modelo bem mais simples, muito comum em engenharia de petróleo para representar as permeabilidades relativas das fases molhantes e não-molhantes respectivamente, é dado por:

$$k_{rw} = S_w^2 \text{ e}$$

$$k_{rn} = (1 - S_w)^2. \quad (2.74)$$

Outro modelo dado por expressões semi-empíricas é apresentado por Brooks e Corey (1964), na forma:

$$k_{rw} = S_e^{[(2+3\beta)/\beta]}. \quad (2.75)$$

E a permeabilidade relativa da fase não molhante é descrita pela equação:

$$k_{rnw} = (1 - S_e)^2 (1 - S_e^{[(2+\beta)/\beta]}). \quad (2.76)$$

em que β é um parâmetro de acordo com o tipo de material, relacionado ao tamanho dos grãos sólidos.

A figura 2-3 apresenta a representação das curvas de permeabilidades relativas molhante e não molhante e a curva de pressão capilar por em função da saturação.

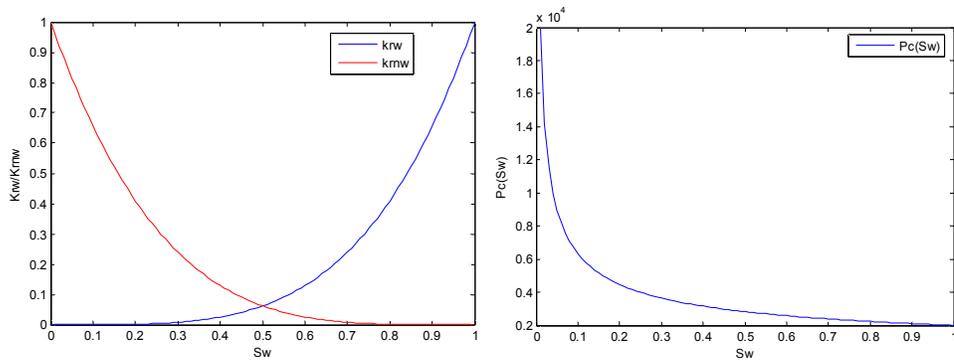


Figura 2.3 Curvas de permeabilidade relativa e de pressão capilar (Modelo de Brooks e Corey).