3
Modelo para o Sistema de Controle (*Q*, *R*) com Nível de Serviço

No Capítulo 2, foi apresentado um modelo para o sistema de controle de estoque $(Q,\ R)$, onde a demanda é uma variável aleatória contínua seguindo uma distribuição normal, quando foram considerados três custos relevantes: o custo de encomendar, de manter e o de falta. Como muitas vezes é difícil atribuir valores numéricos ao custo de falta, um procedimento será utilizado neste capítulo para minimizar os custos de encomendar e manter de tal modo que a fração da demanda seja satisfeita prontamente (*fill rate*).

O modelo com a formulação exata é apresentado juntamente com um algoritmo de solução. Em seguida é sugerida uma aproximação para este modelo. São também apresentadas as aproximações sugeridas por Silver e Wilson (1972) e Platt, Robinson e Freund (1997).

3.1
Modelo com a Formulação Exata

Considerando que a posição de estoque é uniformemente distribuída entre R e $R+Q$ e que a soma das demandas durante o tempo de reposição é representada pela variável aleatória contínua X, tem-se que o valor médio do número de faltas em qualquer período é dado por:

$$E\left[(X-y)^{+}\right]=\int_{R}^{R+Q}F^{0}(y)dy\ .$$

onde na seção 2.2, Zipkin (2000, pg 456) demonstra a notação acima como a Função de Perda:

$$F^{1}(x)=E\left[(X-x)^{+}\right]=\int_{x}^{\infty}(y-x)f(y)dy=\int_{x}^{\infty}F^{0}(y)dy$$

$F^{0}(y)$ é a probabilidade de que a demanda durante o *lead time* exceda a posição de estoque quando a encomenda for feita, ou seja, é a Função Cumulativa Complementar de Distribuição, como definida no Capítulo 2. Então, Platt, Robinson e Freund (1997) definem a fração da demanda não satisfeita prontamente como:

$$1-\beta = \frac{\int_R^{R+Q} F^0(y)dy}{Q}$$

onde β é a fração da demanda satisfeita prontamente (*fill rate*).

No Capítulo 2 foi visto que a função de perda $F^1(x) = \int_x^{\infty} F^0(y)dy$. Então:

$$1-\beta = \frac{F^1(R) - F^1(R+Q)}{Q}.$$

Para uma variável X com distribuição normal com média μ e desvio padrão σ, tem-se que $X = \mu + \sigma Z$ e $Z = (X-\mu)/\sigma$ é um valor padronizado de X.

Sendo $F^1(x) = \sigma\,\Phi^1(z)$, como visto na seção 2.2.1, tem-se:

$$1-\beta = \frac{\sigma}{Q}\left[\Phi^1\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right) - \Phi^1\left(\frac{R+Q-\mu}{\sigma}\right)\right]. \qquad (3.1)$$

Neste caso, o problema de minimizar os custos de encomendar e de manter em estoque fica restrito a uma fração da demanda não satisfeita, formulado por:

Minimizar $K(Q,R) = \frac{DA}{Q} + h\left[R + \frac{Q}{2} - \mu\right] + \frac{\sigma^2 h}{Q}\left[\Phi^2\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right) - \Phi^2\left(\frac{R+Q-\mu}{\sigma}\right)\right]$ (3.2)

Sujeito a $1-\beta = \frac{\sigma}{Q}\left[\Phi^1\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right) - \Phi^1\left(\frac{R+Q-\mu}{\sigma}\right)\right]$

Para se obter uma formulação simplificada do problema, divide-se $K(Q,\ R)$ por $h\sigma$:

$$\frac{K(Q,R)}{h\sigma} = \frac{DA}{h\sigma Q} + \frac{h}{h\sigma}\left[R + \frac{Q}{2} - \mu\right] + \frac{\sigma^2 h}{h\sigma Q}\left[\Phi^2\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right) - \Phi^2\left(\frac{R+Q-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

Defina: $q = \frac{Q}{\sigma}$, $\quad e = \frac{EOQ}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2AD}{h}}$ $\quad r = \frac{R-\mu}{\sigma}$

Então, a nova formulação do problema passa a ser:

Minimizar:

$$\frac{K(Q,R)}{h\sigma} = k(q,r) = \frac{e^2}{2q} + \frac{q}{2} + r + \frac{1}{q}\left[\Phi^2(r) - \Phi^2(r+q)\right] \qquad (3.3)$$

Sujeito a:

$$1-\beta=\frac{1}{q}\left[\Phi^1(r)-\Phi^1(r+q)\right] \tag{3.4}$$

Forma-se então o Lagrangeano e suas três derivadas parciais iguais a zero.

$$L(r,q,\lambda)=\frac{e^2}{2q}+\frac{q}{2}+r+\frac{\Phi^2(r)-\Phi^2(r+q)}{q}-\lambda\left[1-\beta-\frac{\left(\Phi^1(r)-\Phi^1(r+q)\right)}{q}\right] \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=1-\frac{\Phi^1(r)-\Phi^1(r+q)}{q}-\frac{\lambda\left[\Phi^0(r)-\Phi^0(r+q)\right]}{q}=0 \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q}&=-\frac{e^2}{2q^2}+\frac{1}{2}-\frac{\Phi^2(r)-\Phi^2(r+q)+\Phi^1(r+q)q}{q^2}\\&-\frac{\lambda\left[\Phi^1(r)-\Phi^1(r+q)\right]+\lambda\Phi^0(r+q)q}{q^2}=0\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-1+\beta+\frac{\left[\Phi^1(r)-\Phi^1(r+q)\right]}{q}=0 \tag{3.8}$$

Eliminando λ, são obtidas as duas expressões:

$$(1-\beta)q=\Phi^1(r)-\Phi^1(r+q) \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}&q^2\left[-2\beta^2+2\beta-2\beta\Phi^0(r+q)-\Phi^0(r)+\Phi^0(r+q)\right]-\\&-\left[\Phi^0(r)-\Phi^0(r+q)\right]\left[-e^2-2\left[\Phi^2(r)-\Phi^2(r+q)\right]+2q\Phi^1(r+q)\right]=0\end{aligned} \tag{3.10}$$

Rosling (2002) apresenta o Algoritmo da Raiz Quadrada e demonstra a sua convergência para a solução ótima.

No seu procedimento quando a expressão (3.10) passa a ser calculada iterativamente:

$$q_{i+1}=\sqrt{\frac{\left[\Phi^0(r_i)-\Phi^0(r_i+q_i)\right]\left[-2\Phi^2(r_i)+2\Phi^2(r_i+q_i)+2q\Phi^1(r_i+q_i)-e^2\right]}{\left[-2\beta^2+2\beta-2\beta\Phi^0(r_i+q_i)-\Phi^0(r_i)+\Phi^0(r_i+q_i)\right]}} \tag{3.11}$$

Algoritmo para calcular a Política (*Q*, *R*) ótima

Passo 1: Faça $i = 1$ e $q_i = e$.

Passo 2: Ache o valor de r_i que resolve a expressão $(1-\beta)q - \left[\Phi^1(r) - \Phi^1(r+q)\right] = 0$

Passo 3: Calcule:

$$q_{i+1} = \sqrt{\frac{\left[\Phi^0(r_i) - \Phi^0(r_i + q_i)\right]\left[-2\Phi^2(r_i) + 2\Phi^2(r_i + q_i) + 2q\Phi^1(r_i + q_i) - e^2\right]}{\left[-2\beta^2 + 2\beta - 2\beta\Phi^0(r_i + q_i) - \Phi^0(r_i) + \Phi^0(r_i + q_i)\right]}}$$

Passo 4: Se $|q_{i+1} - q_i| = 0$, vá ao Passo 5, caso contrario vá ao Passo 2.

Passo 5: Faça $(q^*,\ r^*) = (q_i,\ r_i)$.

Exemplo 3.1

β	A	h	μ	D	σ
0,95	8	2	50	200	40

Observe que $e = \frac{EOQ}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2AD}{h}} = 1$

O resultado do Algoritmo da Raiz Quadrada é mostrado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Processo iterativo para cálculo dos valores ótimos de *q* e *r*

r1	*r2*	*r3*	*r4*	*r5*	*r6*	*r7*	*r8*	*r9*	*r10*	*R11*
1,2121	0,9389	1,0394	1,0097	1,0163	1,0172	1,0169	1,0170	1,0170	1,0170	1,0170
q1	*q2*	*q3*	*q4*	*q5*	*q6*	*q7*	*q8*	*q9*	*q10*	*Q11*
1	1,8537	1,5109	1,608	1,5765	1,5863	1,5832	1,5842	1,5839	1,5840	1,5840

Ao fim das 11 iterações tem-se os valores ótimos de q^* = 1,5840 e r^*=1,0170 e o custo total ótimo é $k(q^*,\ r^*) = 2{,}1473$.

Como já foi exposto na Seção 2.3.2, geralmente em situações reais a $\Pr[(X > R + Q)]$ é muito pequena e, nestes casos, os termos em $(R+Q)$ podem ser desconsiderados.

No Exemplo 3.1, cabe registrar que os termos $\Phi^2(r) = 0{,}03628$, $\Phi^2(r+q) = 0{,}00043$, $\Phi^1(r) = 0{,}08066$, $\Phi^1(r+q) = 0{,}00146$, $\Phi^0(r) = 0{,}15458$ e $\Phi^0(r+q) = 0{,}00465$.

Como esperado, os valores de $\Phi^2(r+q)$, $\Phi^1(r+q)$ e $\Phi^0(r+q)$ são bem inferiores aos de $\Phi^2(r)$, $\Phi^1(r)$ e $\Phi^0(r)$, o que sugere uma aproximação do modelo a ser proposto na seção 3.2.

3.2 Modelo Aproximado Proposto

Eliminando o termo $\Phi^2(r+q)$ na expressão (3.3) e o termo $\Phi^1(r+q)$ na expressão (3.4), tem-se a seguinte formulação do problema:

Minimizar $$k_1(q_1,\ r_1) = \frac{e^2}{2q_1} + \frac{q_1}{2} + r_1 + \frac{\Phi^2(r_1)}{q_1} \tag{3.12}$$

sujeito a: $$1-\beta = \frac{\Phi^1(r_1)}{q_1} \tag{3.13}$$

Da expressão (3.13) tem-se que: $q_1 = \dfrac{\Phi^1(r_1)}{1-\beta}$

Substituindo-se q_1 na expressão (3.12), tem-se:

$$k_1(r_1) = \frac{e^2(1-\beta)}{2\Phi^1(r_1)} + \frac{\Phi^1(r_1)}{2(1-\beta)} + r_1 + \frac{\Phi^2(r_1)(1-\beta)}{\Phi^1(r_1)} \tag{3.14}$$

Nota-se agora que o problema de minimização é irrestrito com somente uma variável de decisão r_1.

Exemplo 3.2

Sendo e = 1, tem-se:

$$k_1(r_1) = \frac{0.025}{\Phi^1(r_1)} + \frac{\Phi^1(r_1)}{0,1} + r_1 + \frac{0,05\Phi^2(r_1)}{\Phi^1(r_1)}$$

O gráfico de $k_1(r_1)$ é apresentado na Figura 3.1. Observa-se que a função $k_1(r_1)$ é convexa no intervalo [-3, 3].

Na Tabela 3.2 são apresentados os valores de $k_1(r_1)$ no intervalo [-2.5 , 2.5].

Tabela 3.2 – Valores $k_1(r_1)$ para $-2{,}5 \le r_1 \le 2{,}5$

r_1	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$k_1(r_1)$	22,60	18,16	13,86	9,90	6,55	4,08	2,63	2,16	2,67	5,05	15,01

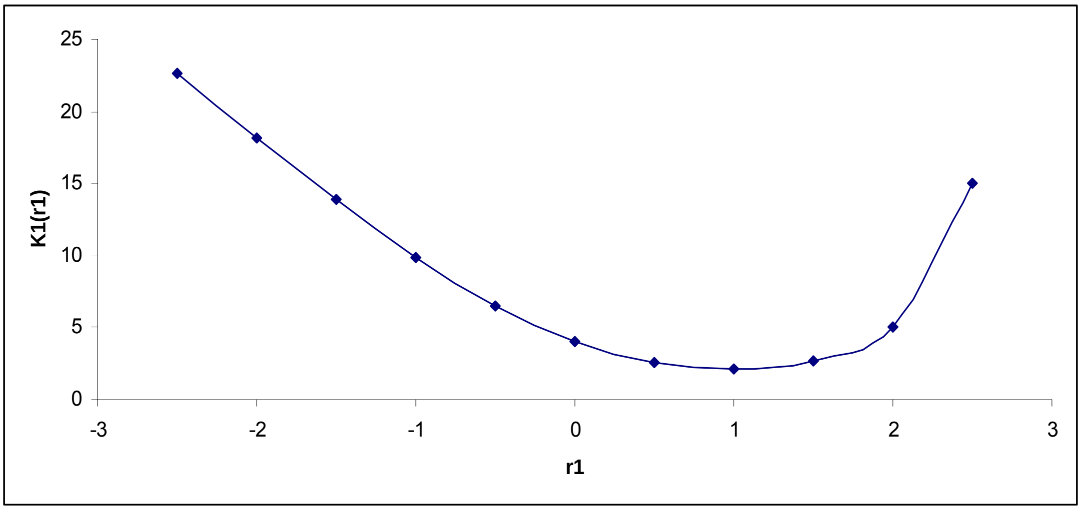

Figura 3.1 – Gráfico $k_1(r_1)$

Com auxilio do *Solver* da planilha *Excel*, obteve-se $r_1^* = 1{,}0059$ como solução do problema de minimização irrestrito com uma variável. Substituindo-se este valor de r_1 na expressão (3.13), tem-se $q_1^* = 1{,}6476$.

Logo, $k(q_1^*,\ r_1^*) = 2{,}1555$ é uma aproximação do valor ótimo do problema de otimização

$$\text{Minimizar } K(Q,\,R) = \frac{DA}{Q} + h\left[R + \frac{Q}{2} - \mu\right] + \frac{\sigma^2 h}{Q}\left[\Phi^2\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right) - \Phi^2\left(\frac{R+Q-\mu}{\sigma}\right)\right] \quad (3.2)$$

$$\text{Sujeito a } 1-\beta = \frac{\sigma}{Q}\left[\Phi^1\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right) - \Phi^1\left(\frac{R+Q-\mu}{\sigma}\right)\right] \quad (3.1)$$

que é $k(q^*,\ r^*) = 2{,}1548$.

Como estes valores de q e r são diferentes dos valores ótimos da formulação exata, o valor real da *fill rate* β não será mais o valor alvo 0,95. Substituindo-se estes valores de q e r na expressão (3.4), obtém-se β_1 = 0,9508, o que resulta em uma diferença de apenas 0,0008 em relação ao valor alvo.

Resolvendo o Exemplo 3.2 com a formulação exata, para uma β = 0,9508 em vez de 0,95, o custo passa ser 2,1548.

Observe-se que a Diferença Relativa Percentual (*DRP*) entre o custo da solução obtida com o modelo aproximado $k\left(q_1^*,\ r_1^*\right)$ e o custo da solução obtida com o modelo exato $k\left(q^*,\ r^*\right)$ é

$$DRP = \frac{k\left(q_1^*,\ r_1^*\right) - k\left(q^*,\ r^*\right)}{k\left(q^*,\ r^*\right)} \times 100 = \frac{2{,}1555 - 2{,}1548}{2{,}1548} \times 100 = 0{,}0325\,\%,$$

indicando que neste caso a aproximação proposta é aceitável.

3.3
Heuristica de Silver e Wilson (SW)

Silver e Wilson (1972) propõem a seguinte formulação do problema:

$$\text{Minimizar } k_1\left(q_1,\ r_1\right) = \frac{e^2}{2q_1} + \frac{q_1}{2} + r_1 \tag{3.15}$$

$$\text{Sujeito a : } 1 - \beta = \frac{\Phi^1\left(r_1\right)}{q_1} \tag{3.16}$$

Substituindo $q_1 = \dfrac{\Phi^1\left(r_1\right)}{\left(1-\beta\right)}$ na expressão (3.15), tem-se:

$$k_1\left(r_1^*\right) = \frac{e^2\left(1-\beta\right)}{2\Phi^1\left(r_1\right)} + \frac{\Phi^1\left(r_1\right)}{2\left(1-\beta\right)} + r_1 \tag{3.17}$$

Exemplo 3.3

Dado que e = 1 e β = 0,95 tem-se:

$$k_1\left(r_1\right) = \frac{0.025}{\Phi^1\left(r_1\right)} + \frac{\Phi^1\left(r_1\right)}{0{,}1} + r_1 + \frac{\Phi^2\left(r_1\right) \times 0{,}05}{\Phi^1\left(r_1\right)}$$

Considerando os dados apresentados no Exemplo 3.1, com a planilha Excel calculou-se os valores de $k_1\left(r_1\right)$ para r_1 no intervalo [-10 , 10], observando-se que a função $k_1\left(r_1\right)$ é convexa neste intervalo.

Na Tabela 3.3, são apresentados os valores de $k_1\left(r_1\right)$ no intervalo [-2.5 ,2.5] e na Figura 3.2 é apresentado o gráfico de $k_1\left(r_1\right)$.

Tabela 3.3 – Valores $k_1(r_1)$ para $-2{,}5 \leq r_1 \leq 2{,}5$

R_1	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$k_1(r_1)$	22,53	18,09	13,80	9,85	6,51	4,05	2,60	2,13	2,65	5,03	15,00

No gráfico e na tabela, há indicação de que um ponto de mínimo de $k_1(r_1)$ ocorre próximo a $r_1 = 1$.

Com auxilio do *Solver* da planilha *Excel*, obtém-se $r_1^* = 1{,}0041$ quando é resolvido o problema irrestrito com função objetivo (3.17). Substituindo-se este valor de r_1 na expressão (3.13), obtém-se $q_1^* = 1{,}6534$.

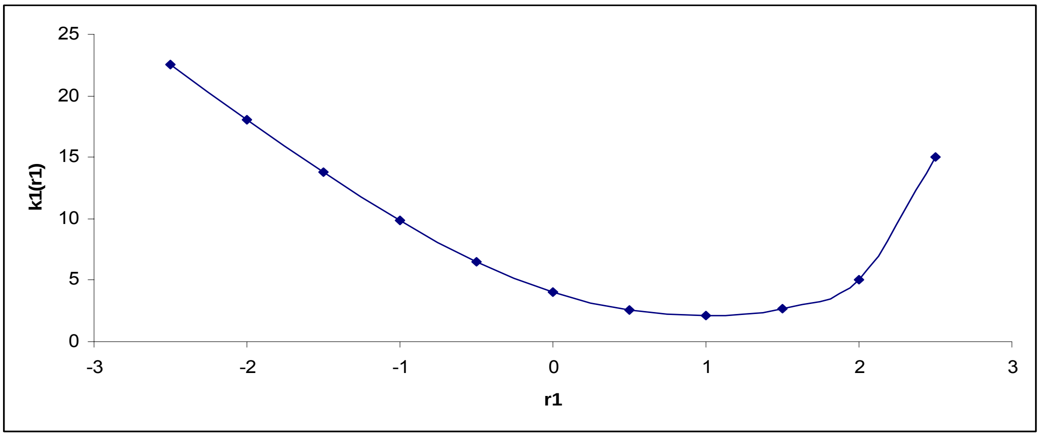

Figura 3.2 – Gráfico r_1 versus $k_1(r_1)$

Para se obter o custo ótimo aproximado é necessário substituir os valores de $(q_1^*, r_1^*) = (1{,}6534;\ 1{,}0041)$ na expressão (3.3), o que resultará em $k(q_1^*,\ r_1^*) = 2{,}1556$.

Entretanto, o valor correspondente de β, que deve ser obtido da expressão (3.4), é 0,9507, o que implica em uma diferença de apenas 0,0007 em relação ao valor alvo.

Resolvendo o Exemplo 3.1 com a formulação exata, para uma β = 0,9507 em vez de 0,95, o custo passa ser 2,1548.

A Diferença Relativa Percentual (*DRP*) entre o custo da solução obtida com o modelo aproximado $k\ (q_1^*, r_1^*)$ e o custo da solução obtida com o modelo exato $k(q^*, r^*)$ para β= 0,9507 é

$$DRP = \frac{k\left(q_1^*,\ r_1^*\right) - k\left(q^*,\ r^*\right)}{k\left(q^*,\ r^*\right)} \times 100 = \frac{2{,}1556 - 2{,}1548}{2{,}1548} \times 100 = 0{,}0370\,\%,$$

indicando que neste caso a aproximação SW é aceitável.

3.4
Heurística de Platt, Robinson e Freund

A heurística de Platt, Robinson e Freund (1997) é desenvolvida usando as propriedades das funções de perda $\Phi^1(x)$ e $\Phi^2(x)$ e seus limites superiores e inferiores.

Por comodidade, é reapresentada a formulação exata do modelo:

Minimizar:

$$\frac{K(Q,\ R)}{h\sigma} = k(q,\ r) = \frac{e^2}{2q} + \frac{q}{2} + r + \frac{1}{q}\left[\Phi^2(r) - \Phi^2(r+q)\right] \tag{3.3}$$

Sujeito a:

$$f = (1-\beta) = \frac{1}{q}\left[\Phi^1(r) - \Phi^1(r+q)\right] \tag{3.4}$$

Sabe-se que:

$\Phi^1(x) = \Phi^1(-x) - x$,

$\Phi^2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right) - \Phi^2(-x)$,

$\lim_{x\to\infty} \Phi^1(-x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} \Phi^2(-x) = \infty$.

Os autores mostram que: quando $e \to \infty$, implica em $r \to -\infty$ e $r + q \to \infty$.

Portanto, quando $r \to -\infty$ e $r + q \to \infty$ tem-se que:

$\lim_{r\to-\infty} \Phi^1(r) = -r$,

$\lim_{r\to\infty} \Phi^2(r) = \frac{1}{2}\left(r^2 + 1\right)$,

$\lim_{r+q\to\infty} \Phi^1(r+q) = 0$ e

$\lim_{r+q\to\infty} \Phi^2(r+q) = 0$.

Então, passando ao limite as funções Φ^2 e Φ^1 das expressões (3.3) e (3.4), tem-se:

$$k_1(q_1,\ r_1) = \frac{e^2}{2q_1} + \frac{q_1}{2} + r + \frac{r_1^2 + 1}{2q_1} \tag{3.18}$$

$$1 - \beta = \frac{-r_1}{q_1} \tag{3.19}$$

Da expressão (3.19): $r_1 = -q_1(1-\beta)$. Substituindo este valor de r_1 na expressão (3.18) tem-se:

$$k(q_1) = \frac{e^2}{2q_1} + \frac{q_1}{2} - (1-\beta)q_1 + \frac{(1-\beta)^2 q_1^2 + 1}{2q_1}$$

Derivando em relação a q_1 e igualando a zero:

$$\frac{dk(q_1)}{dq_1} = \frac{-e^2}{2q_1^2} + \frac{1}{2} - (1-\beta) + \frac{(1-\beta)^2}{2} - \frac{1}{2q_1^2} = 0 \tag{3.20}$$

Resolvendo a expressão (3.2), obtém-se a expressão de q_1:

$$q_1 = \frac{\sqrt{e^2 + 1}}{\beta} \tag{3.21}$$

Com este valor de q_1, os autores propõem calcular r_1 resolvendo a expressão (3.16).

$$(1-\beta) = \frac{\Phi^1(r_1)}{q_1} \tag{3.16}$$

Exemplo 3.4

Sejam β = 0,95 e e =1. Tem-se que:

$q_1 = \dfrac{\sqrt{1^2 + 1}}{0{,}95} = 1{,}4886$. Portanto,

$\Phi^1(r_1) = (1-\beta)q_1 = (1-0{,}95)(1{,}4886) = 0{,}07443$.

Resolvendo a equação $\Phi^1(r_1) = 0{,}07443$ com o *Solver* da planilha *Excel*, obtermos r_1 = 1,0586.

Com isso, o custo ótimo aproximado dado por $(q_1^*,\ r_1^*) = (1{,}4886;\ 1{,}0586)$ na expressão (3.18), o que resultará em $k(q_1^*,\ r_1^*) = 2{,}1606$.

Entretanto o valor real de β, que deve ser obtido da expressão (3.4), é 0,9517, o que implica em uma diferença de apenas 0,0017 em relação ao valor alvo.

Resolvendo o Exemplo 3.4 com a formulação exata, para uma β = 0,9517 em vez de 0,95, o custo passa ser 2,1594.

A Diferença Relativa Percentual (*DRP*) entre o custo da solução obtida com o modelo aproximado $k\left(q_1^*,\ r_1^*\right)$ e o custo da solução obtida com o modelo exato $k\left(q^*,\ r^*\right)$ é

$$DRP = \frac{k\left(q_1^*,\ r_1^*\right) - k\left(q^*,\ r^*\right)}{k\left(q^*,\ r^*\right)} \times 100 = \frac{2{,}1606 - 2{,}1594}{2{,}1594} \times 100 = 0{,}0813\%,$$

indicando que neste caso a aproximação da heurística de Platt, Robinson e Freund (1997) não é aceitável, pois o *DRP* é maior do que 0,05%.

No Capitulo 4, são feitas comparações entre o modelo exato e as heurísticas descritas neste capítulo.