

6 Resultados

Neste capítulo comentaremos sobre nossas experiências com os estimadores afins no caso de superfícies implícitas. No caso paramétrico discreto obtemos uma solução parcial do problema para a interpolação do parabolóide em uma amostra de três pontos e planos tangentes definidos neste pontos (ver capítulo 5), já no caso paramétrico suave conseguimos alguns resultados que foram discutidos no capítulo 2.

Experimentamos os dois estimadores afins introduzidos nos capítulos 3 e 4, aplicando as fórmulas diretamente, chamado de método *direto* e o de calcular a aplicação local A para usar as fórmulas simplificadas referido como o método *com transformação*.

No método direto, um dos eixos deve ser escolhido em cada ponto para servir como a direção z no teorema da função implícita. A fim de reduzir a instabilidade numérica escolhemos o eixo com o qual o gradiente é mais alinhado, ou seja, nós escolhemos x se $|f_x| > |f_y|$ e $|f_x| > |f_z|$ (ver figura 6.1).

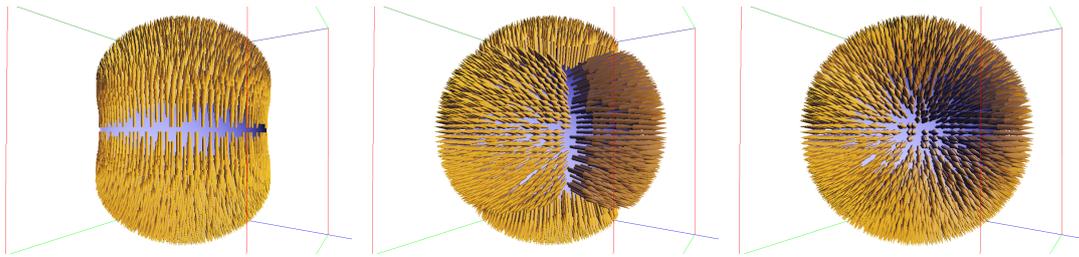


Figura 6.1: Comparações do normal afim ξ quando calculado usando: z na derivação implícita (à esquerda), o eixo na maioria dos casos alinhado com o gradiente (meio), ou a nossa redução geométrica (à direita).

O método com transformação segue os passos da seção 3.3.2.

Três grupos de dados foram analisados. Primeiro geramos funções implícitas (ver figuras 2.7, 3.2, 3.4, 4.2 e 6.1), onde calculamos as estruturas diferenciáveis exatas ν , ξ , \mathcal{K} e \mathcal{H} , a fim de calcular o erro dos nossos estimadores. Como o cálculo diferencial é extensivo, incluímos somente superfícies quadráticas (ver tabela 2.1). O segundo conjunto de dados de funções implícitas $f(p)$ (ver figuras 3.3, 3.5 e 6.2), onde podemos mostrar exatamente

a imagem afim de superfície através de $f(A(p))$ para verificar a invariância do estimador, com a restrição discutida na seção 4.4. O último tipo de dados são isossuperfícies amostradas numa grade regular estática, gerada como funções distância a uma superfície triangulada (ver figuras 3.1 e 6.5).

Tais isossuperfícies são geralmente mais complexas e seria um primeiro passo para uma aplicação mais específica dos estimadores afins.

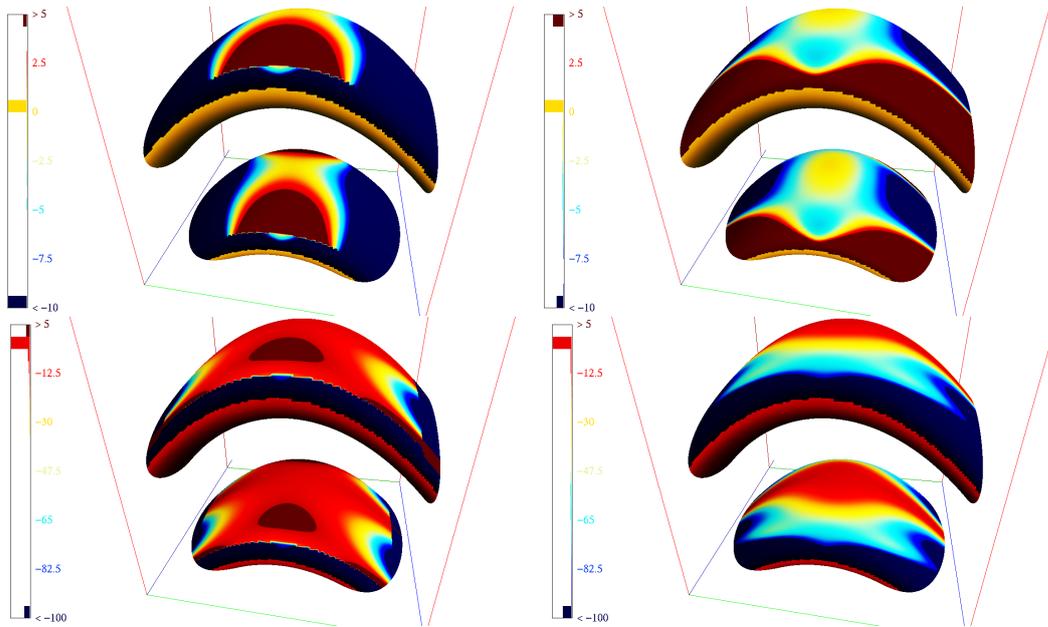


Figura 6.2: Comparação na superfície de equação $2z^2 - \sin(5x + 3y^2 - 1) = 0$ dos estimadores da curvatura média \mathcal{H} (em cima) e da curvatura Gaussiana \mathcal{K} (em baixo), usando método direto (à esquerda) e o método com transformação (à direita), com a mesma escala de cores, ambos métodos mostram descontinuidades nas regiões degeneradas $K_e = 0$.

Estabilidade Numérica As definições das curvaturas afins requerem o cálculo de derivadas até a quarta ordem, daí qualquer estimador será muito suscetível a erros numéricos. A redução geométrica que apresentamos permite reduzir o erro numérico ligado ao alinhamento com o eixo do gradiente. As figuras 3.5 e 6.1 mostram claramente que a qualidade do estimador direto diminui quando a direção se torna mais oblíqua, provocando descontinuidades nas mudanças de eixo (semelhante ao caso mais simples de curvatura Euclidiana de curvas paramétricas (24)), defeito que é corrigido pela nossa redução.

Além disso, esta grande redução simplifica as fórmulas (ver tabela 4.1), o que melhora bastante a estabilidade numérica. Isto é ilustrado na figura 3.4, onde o parabolóide teria curvatura 0, mas o método direto introduz um ruído de ordem 10^{-5} neste simples caso. A redução permite identificar claramente

as regiões onde a métrica degenerou, ou seja, d é próxima de 0 como mostra a figura 6.2.

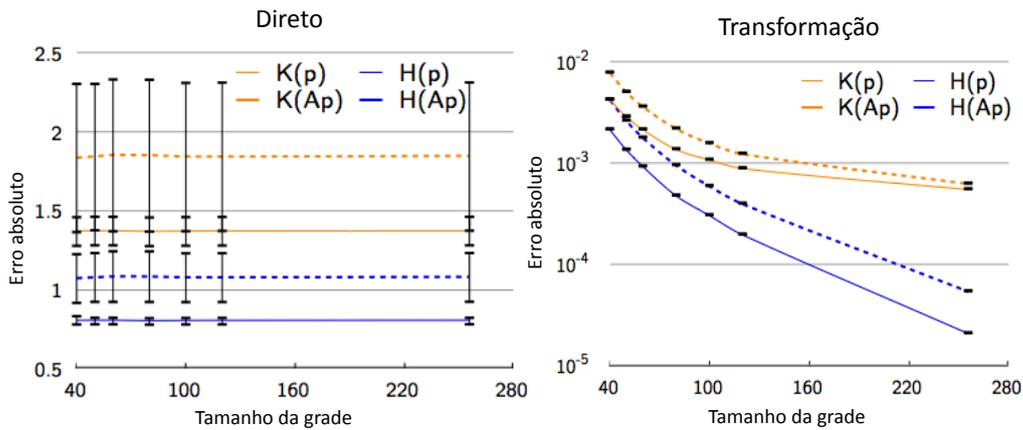


Figura 6.3: Convergência sobre o modelo da esfera: erro absoluto em relação ao tamanho da grade, antes (sólido) e depois (tracejada) da transformação afim da figura 4.2: método direto (à esquerda, em escala linear) e o método de transformação (à direita, em escala logarítmica). A barra de erro representa o quinto da variância do erro absoluto.

Estimação do erro e convergência Nos modelos onde podemos obter as expressões analíticas da estrutura afim, essencialmente as quádricas da tabela 2.1, podemos calcular o erro em cada ponto gerado pelo algoritmo *Marching Cubes* utilizando diferentes tamanhos de grade. Os gráficos obtidos são semelhantes aos da figura 6.3, que é o caso da esfera. Podemos observar que o método direto tem um erro residual que não diminui com o tamanho da grade (nem a sua variância), enquanto o método com transformação mostra tendência de uma boa convergência mesmo aplicando uma transformação afim, ou seja, olhando para $f(A^{-1}(p))$, mantendo uma variação de erro muito baixa.

Invariância Afim Como foi discutido na seção 4.4, a medida da invariância afim é complicada quando experimentamos isossuperfícies. Geramos os histogramas de distribuição da curvatura Gaussiana afim \mathcal{K} antes e depois de uma aplicação afim. Podemos comparar os resultados obtidos pelo método direto e com transformação em um modelo de toro (ver figura 6.4). Mais uma vez o método com transformação preserva melhor o significado geométrico das medidas estimadas.

Mesmo em isossuperfícies mais complexa, como a retratada nas figuras 3.1 e 6.5, as curvaturas e as regiões degeneradas são claramente mapeadas a partir dos diferentes modelos da mesma classe afim.

Limitações Como mencionado na seção 4.2, o processo de amostragem não é invariante afim (ver figura 4.2). Embora isto leve a algum erro no processo de estimação, não leva a perda significativa em modelos bem amostradas como os da figura 6.5. Além disso, como foi dito no capítulo 4, as quantidades afins não estão definidas se o gradiente de f é próximo de 0 ou se a curvatura Gaussiana Euclidiana K_e zera. Enquanto o segundo critério define corretamente regiões invariantes afins (ver figuras 3.3 e 6.5), o primeiro é um problema numérico mais difícil. Finalmente, a qualidade das aproximações das derivadas é crucial para todo o processo, o que pode prejudicar o uso direto de tais estimadores em dados ruidosos.

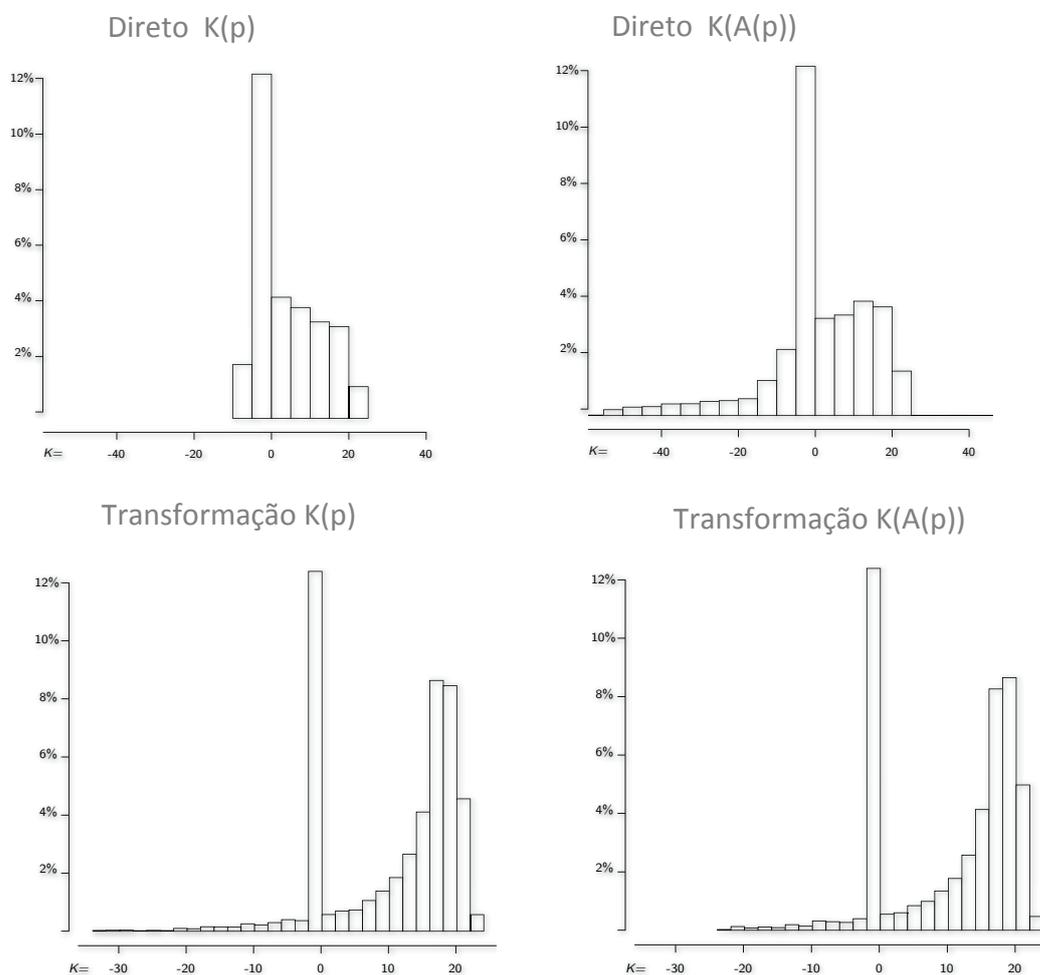


Figura 6.4: No toro $z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 0.5)^2 = 0$, a distribuição da curvatura Gaussiana afim \mathcal{K} é melhor preservada sobre a transformação afim $((1.4, -0.2, 0), (0.1, 0.7, 0), (0, 0, 1))$ se usamos o método com transformação (embaixo) do que o direto (em cima).

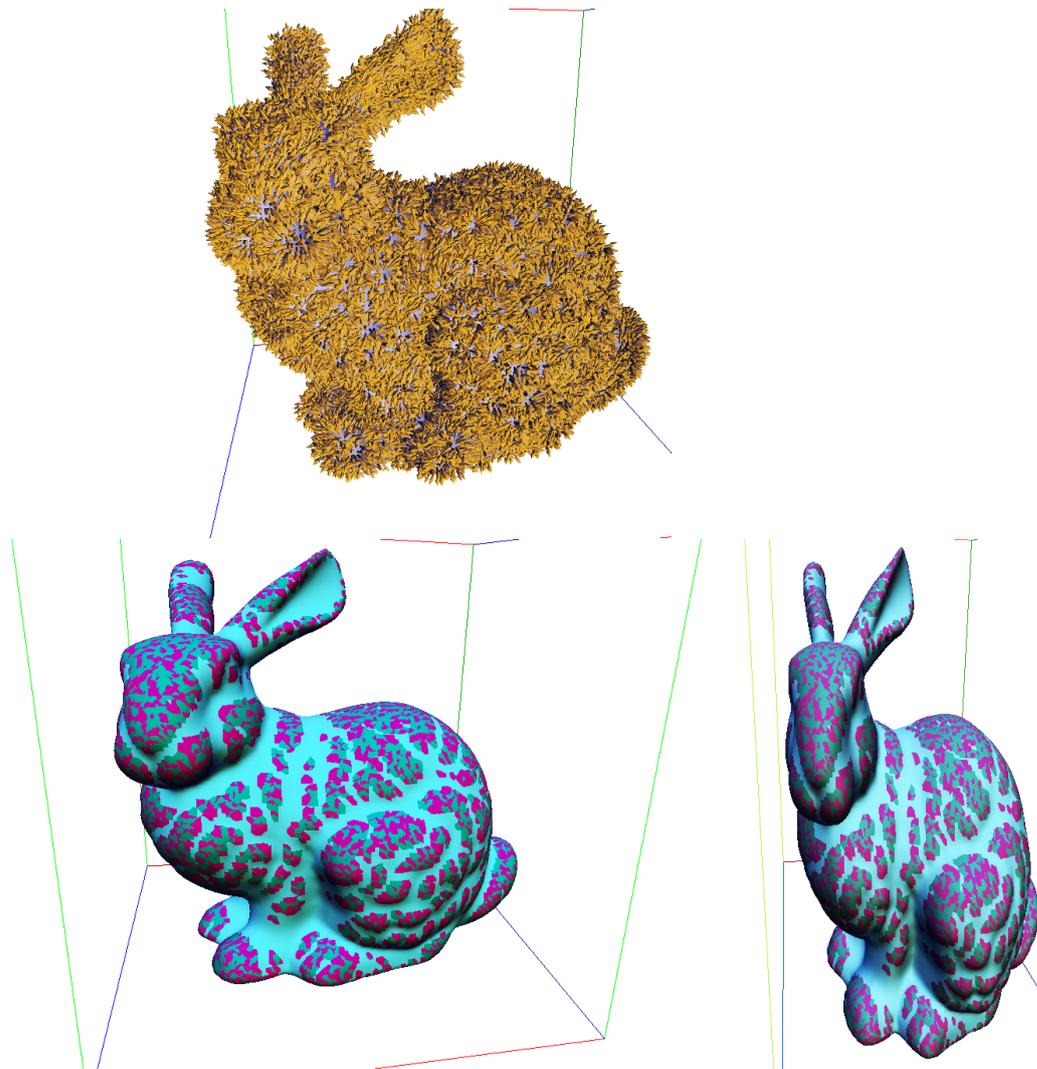


Figura 6.5: Mesmo em uma isossuperfície mais complexa, a curvatura Gaussiana afim estimada com nosso método é preservada após uma aplicação afim.