

5

Família de Parabolóides

Este capítulo tem por objetivo apresentar a parcial falta de solução ao primeiro problema proposto para essa tese, a saber estender o modelo de polígono parabólico para superfícies.

O problema inicial proposto para esta tese foi mostrar que dado uma amostra $\{(p_i, n(p_i))\}_{i=1}^3 \subset S \times \mathbb{S}^2$, onde S é uma superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 e \mathbb{S}^2 é a esfera unitária, poderíamos obter um parabolóide passando por estes pontos e normais. A motivação veio do modelo de polígono parabólico (13) que mostra a reconstrução de curvas através da geometria afim. O modelo para superfície utiliza parabolóides em cada triângulo. Provamos que é necessário impor algumas condições sobre os normais para existir o parabolóide passando por $(p_i, n(p_i))$. Mostramos que sobre certas condições da amostragem de pontos e normais existe uma família de parabolóides que passa por três pontos e possuem os normais definidos nesses pontos. Tentamos resolver o problema completo utilizando cúbicas osculadoras, mas até o presente momento não temos uma solução.¹

Seja $\{(p_i, n(p_i))\}_{i=1}^3 \subset S \times \mathbb{S}^2$ uma amostra, ou seja, temos três vetores normais definidos em $\{p_i\}_{i=1}^3$. Podemos aplicar uma transformação afim A que leva esses três pontos para os pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, em coordenadas homogêneas $A^{-1} = (p_1 - t, p_2 - t, p_3 - t, t)$, onde t é um vetor de translação qualquer. Podemos definir $t = p_3 - N_3, t_w = 0$ tal que $n(p_3) = e_3 = (0, 0, 1)$. Usamos a representação geral de quádrlica

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \tag{5-1}$$
$$(x, y, z) \mapsto ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0.$$

Notemos que o gradiente de F é paralelo ao vetor normal \mathbf{N}_e , assim existem coeficientes $\{\lambda_i\}_{i=1}^3 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que

$$\nabla F(e_i) = \lambda_i n(e_i). \tag{5-2}$$

¹Nessa busca recebemos muita ajuda do professor Carlos Tomei, que agradecemos muito.

Queremos encontrar os coeficientes $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, \lambda_1, \lambda_2$ e λ_3 .

Se assumirmos que $j \neq 0$, então sem perda de generalidade podemos definir $j = 1$. Notemos que temos 12 equações e 12 incógnitas sendo que 9 delas foram obtidas a partir da equação (5-2) e as demais da equação (5-1). Podemos escrever essas equações em termos de um sistema linear não homogêneo, a saber

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -n(p_1)_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -n(p_1)_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -n(p_1)_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -n(p_2)_1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -n(p_2)_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -n(p_2)_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando o programa **Maple**, obtemos que $\lambda_i = 0, i = 1, 2$, em particular temos uma solução que não respeita n_1 e n_2 . Logo, devemos encontrar condições sobre os normais que nos deem um resultado mais amplo. O próximo resultado foi obtido com a ajuda do **Maple**.

Teorema 7 *Se $n(p_1)$ é simétrico a $n(p_2)$ pelo plano ortogonal a $n(p_3)$ bissetor a p_1Op_2 , em outras palavras se as componentes dos vetores normais satisfazem $n(p_2)_1 = n(p_1)_2, n(p_2)_2 = n(p_1)_1, e n(p_2)_3 = n(p_1)_3$. Então $\det(A) = 0$ e portanto temos uma família de quádricas a um parâmetro em λ_1*

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (1 + n(p_2)_2\lambda_1)x^2 + (1 + n(p_2)_2\lambda_1)y^2 + (1 + (n(p_2)_2 - n(p_2)_3)\lambda_1)z^2 \\ &+ 2 \left(1 + \frac{1}{2} (n(p_2)_2 + n(p_2)_1) \lambda_1\right) xy + 2 \left(1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2\lambda_1\right) xz \\ &+ \left(1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2\lambda_1\right) yz - \left[\left(1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2\lambda_1\right) x\right] \\ &- \left[\left(1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2\lambda_1\right) y + \left(1 + \frac{1}{2} (n(p_2)_2 - n(p_2)_3) \lambda_1\right) z\right] \end{aligned} \tag{5-3}$$

Vamos encontrar o valor de λ_1 de tal forma que a quádrica seja um parabolóide.

Seja Q a matriz da forma quadrática associada a quádrlica dada pela equação (5-3)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 + n(p_2)_2 \lambda_1 & 1 + \frac{1}{2} (n(p_2)_2 + n(p_2)_1) \lambda_1 & 1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 \\ 1 + \frac{1}{2} (n(p_2)_2 + n(p_2)_1) \lambda_1 & 1 + n(p_2)_2 \lambda_1 & 1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 \\ 1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 & 1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 & 1 + (n(p_2)_2 - n(p_2)_3) \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos

$$\det(Q) = -\frac{1}{4} \lambda_1^2 (n(p_2)_1 - n(p_2)_2) (n(p_2)_2 n(p_2)_1 \lambda_1 - n(p_2)_1 n(p_2)_3 \lambda_1) \quad (5-4) \\ + n(p_2)_1 + 2n(p_2)_2^2 \lambda_1 - 3n(p_2)_2 n(p_2)_3 \lambda_1 + 3n(p_2)_2 - 4n(p_2)_3.$$

Queremos que a quádrlica seja um parabolóide então temos que ter $\det(Q) = 0$. Assim, na equação (5-4) temos um polinômio em λ_1 de grau 3, cujas raízes são

$$0, 0 \text{ e } \frac{-n(p_2)_1 - 3n(p_2)_2 + 4n(p_2)_3}{-n(p_2)_2 n(p_2)_1 + n(p_2)_1 n(p_2)_3 - 2n(p_2)_2^2 + 3n(p_2)_2 n(p_2)_3}.$$

Se $\lambda_1 = 0$, então temos um caso impossível, teríamos na definição de F que $(x + y + z - 0.5)^2 + 0.75 = 0$. Portanto, estudaremos o caso em que $\lambda_1 \neq 0$. Substituímos o valor de λ_1 em Q e calculamos os autovetores $\{v_i\}_{i=1}^3$ e autovalores $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$, obtemos um autovalor nulo. Definamos a matriz diagonal $D = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0) = P Q P^t$, onde P é uma matriz formada pelos autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$.

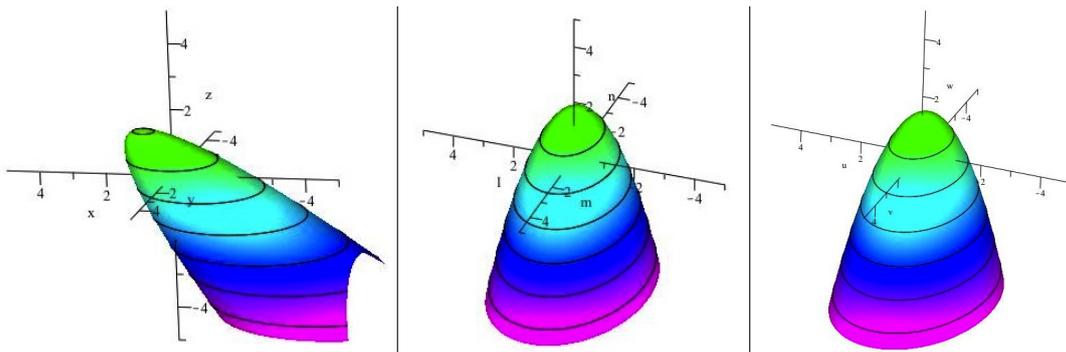


Figura 5.1: Parabolóide elíptico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente.

Afirmção 2 Existe uma transformação $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

1. $F(x, y, z) = \bar{F}(l, m, n) = l^2 \alpha_1 + m^2 \alpha_2 + 2l\bar{g} + 2m\bar{h} + 2n\bar{i} + j$
2. $j = \bar{j}$

Demonstração: Definamos $P(x, y, z)^t = (l, m, n)^t$. Observemos que

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= X^t Q X + X^t N + j \\ &= X^t P^t P Q P^t P X + X^t P^t P N + j \\ &= R^t D R + R^t S + j, \end{aligned}$$

onde $X = (x, y, z)^t$, $R = P X$, $N = (2g, 2h, 2i)^t$ e $S = P N$. Portanto

$$\bar{F}(l, m, n) = l^2 \alpha_1 + m^2 \alpha_2 + 2l\bar{g} + 2m\bar{h} + 2n\bar{i} + j.$$

□

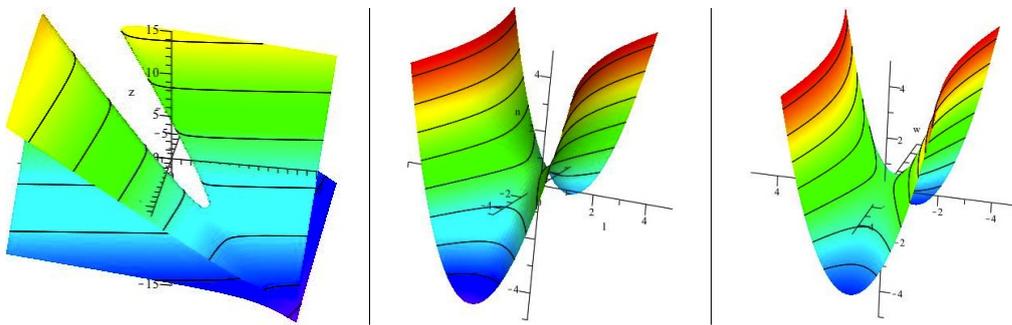


Figura 5.2: Parabolóide hiperbólico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente.

Utilizando a afirmação acima, vamos fazer mais uma transformação de tal forma que a equação do parabolóide fique mais simples. Definamos $l = u - \frac{\bar{g}}{\alpha_1}$, $m = v - \frac{\bar{h}}{\alpha_2}$, e $n = w$, assim seja

$$f(l, m, n) = \alpha_1 u^2 + \alpha_2 v^2 + 2w\bar{i} + k, \text{ onde } k = -\frac{\bar{h}^2}{\alpha_2} - \frac{\bar{g}^2}{\alpha_1} + j.$$

As figuras 5.1 e 5.2 ilustram as transformações que fizemos. Um fato interessante é que não existe um parabolóide osculador à superfície que seja invariante por transformações afins (37). É possível mostrar a existência de *cúbicas osculadoras* à superfície, e existe uma transformação afim que leve tais cúbicas em outras que são simples de entender. A classificação dessas cúbicas depende do sinal da métrica. A demonstração da existência das cúbicas osculadoras equivale a mostrar que o normal afim é vertical e dado por $\xi = (0, 0, 1)$.