

### 3

## Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Implícitas

Representações implícitas de modelos geométricos são amplamente usados em aplicações (38), como por exemplo para deformação, operações Booleanas e offsets (16). O cálculo das estruturas geométricas e topológicas de tais representações pode ser complicado, embora ele seja bastante conhecido para representações paramétricas (15). Fórmulas de curvaturas para superfícies implícitas não tinham sido dadas de forma clara até recentemente (21). Há pouco, a métrica de Berwald-Blaschke (33) foi usada para determinar geodésicas invariantes e tal ferramenta permite dá várias aplicações em análise de formas. A figura 3.1 item (a) ilustra as curvaturas Gaussiana e média afins na superfície banana, nos itens (b) e (c) foram aplicado transformações afins na banana e notemos que as propriedades geométricas se preservaram. Em particular tais propriedades poderão ser aplicadas para identificar regiões.

Neste capítulo, propomos obter as fórmulas para calcular as estruturas afins de superfícies implícitas e uma redução geométrica para calculá-las de forma robusta.<sup>1</sup>

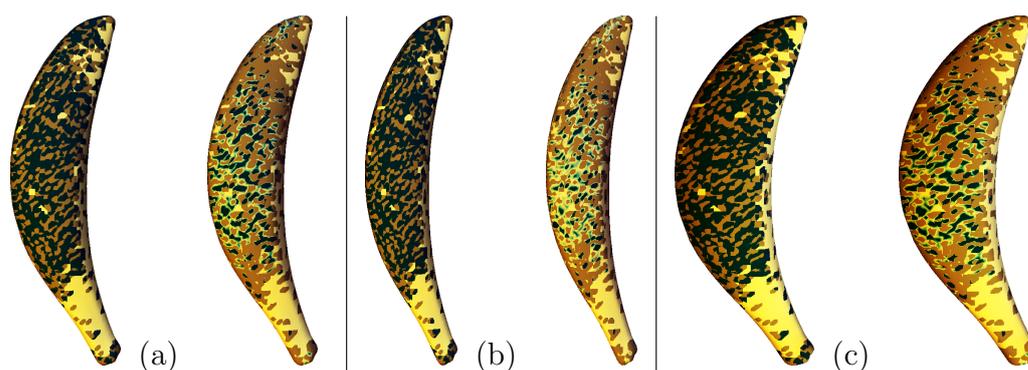


Figura 3.1: Em (a) modelo implícito de uma banana com as curvaturas Gaussiana (à esquerda) e média afins (à direita), cores escuras indicam maiores curvaturas. Resultado após aplicar transformações afins  $p \mapsto A \cdot p$ . Notemos que as características das cores se preservaram, ou seja, as curvaturas se mantiveram. No caso Euclidiano isso não ocorreria.

<sup>1</sup>O conteúdo exposto nesse capítulo tem interseção com o artigo intitulado “Affine-Invariant Curvature Estimators for Implicit Surfaces”, submetido para o jornal “Computer Aided Geometric Design”, os revisores deram como resposta somente “Minor Revision”, cujos os autores são Maria Andrade e Thomas Lewiner.

Consideremos a partir daqui estruturas afins de uma superfície descrita implicitamente, ou seja,  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$ , onde  $f$  é de classe  $C^4$  e 0 é valor regular de  $f$ .

### 3.1

#### Plano Tangente e Métrica Afim

Dado um ponto  $p \in S$  que é regular, isto é  $\nabla f(p) = (f_x, f_y, f_z)(p) \neq 0$ , assumiremos, sem perda de generalidade que  $f_z(p) \neq 0$ . O próximo resultado diz que sob certas condições de  $f$  a superfície localmente é um gráfico, a saber

**Teorema 4** (Teorema da Função Implícita) *Seja  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^k, k \geq 1$ . Um ponto do  $\mathbb{R}^{n+1}$  será denotado por  $(x, z)$ , onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $z \in \mathbb{R}$ . Suponhamos que  $f(x_0, z_0) = 0$  e  $\nabla f(x_0, z_0) \neq 0$ . Então, existe uma bola aberta  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $x_0$  e uma vizinhança  $V$  de  $z_0$  tal que  $z = g(x)$ , para uma única função  $g$  de classe  $C^k$  em  $\mathcal{B}$  e que satisfaz  $f(x, g(x)) = 0$ . Além disso,*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, i = 1 \dots n, \quad (3-1)$$

onde as derivadas de  $f$  são calculadas em  $(x, z) \in V$  e as de  $g$  em  $x \in \mathcal{B}$ .

Portanto, o teorema da função implícita garante a existência de uma função  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a equação  $z = g(x, y)$  descreve a superfície  $S$  em uma vizinhança de  $p$ . Assim,  $S$  pode ser parametrizada em volta de  $p$  como um gráfico  $\mathcal{G} = \{(x, y, g(x, y)) / (x, y) \in U\}$ .

Notemos que as derivadas de  $g$  obtidas a partir do teorema da função implícita podem conduzir a instabilidades numéricas quando  $|f_z(p)|$  tem valor pequeno. Os vetores tangentes são  $\mathbf{g}_x = (1, 0, g_x)$  e  $\mathbf{g}_y = (0, 1, g_y)$ .

A métrica afim de *Berwald-Blaschke* (ver subseção 2.1.2) é expressa pela forma bilinear

$$\mathbf{d}^{-1/4} \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} L &= [\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_{xx}] = g_{xx}(x, y), & M &= [\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_{xy}] = g_{xy}(x, y), \\ N &= [\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_{yy}] = g_{yy}(x, y), & \mathbf{d} &= LN - M^2 = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2. \end{aligned}$$

O elemento de área afim da superfície é dado por  $\mathbf{d}\bar{A} = |\mathbf{d}|^{1/4} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}\mathbf{d}\mathbf{y}$ .

A partir das equações  $f(x, y, g(x, y)) = 0$  e (3-1), obtemos

$$g_{xx} = -\frac{f_{xx}}{f_z} + \frac{2f_{xz}f_x}{f_z^2} - \frac{f_{zz}f_x^2}{f_z^3},$$

$$g_{xy} = -\frac{f_{xy}}{f_z} + \frac{f_{yz}f_x + f_yf_{xz}}{f_z^2} - \frac{f_yf_{zz}f_x}{f_z^3} \quad (3-2)$$

$$g_{yy} = -\frac{f_{yy}}{f_z} + \frac{2f_{yz}f_y}{f_z^2} - \frac{f_{zz}f_y^2}{f_z^3},$$

onde as derivadas de  $g$  são calculadas em  $(x, y)$  e as de  $f$  em  $(x, y, g(x, y))$ .

Em particular,

$$d = \frac{1}{f_z^4} \cdot \left( (f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2) f_x^2 + 2(f_{xz}f_{xy} - f_{xx}f_{yz}) f_y f_z + \right. \\ \left. (f_{zz}f_{xx} - f_{xz}^2) f_y^2 + 2(f_{xy}f_{yz} - f_{yy}f_{xz}) f_z f_x + \right. \\ \left. (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) f_z^2 + 2(f_{yz}f_{xz} - f_{zz}f_{xy}) f_x f_y \right). \quad (3-3)$$

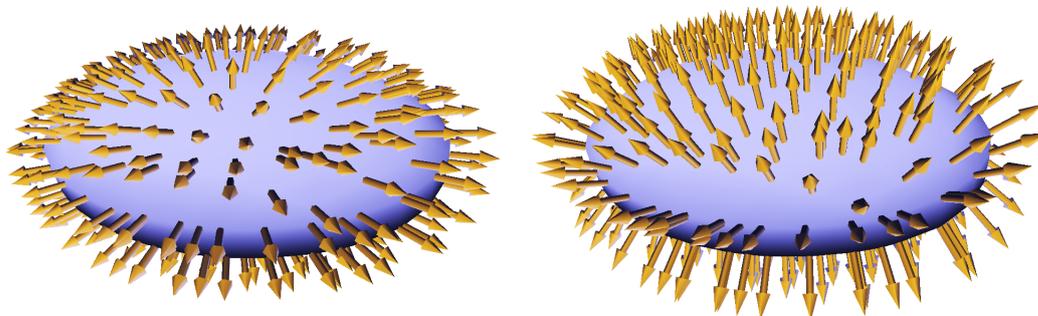


Figura 3.2: Vetores normal afim  $\xi$  (à esquerda) e co-normal afim  $\nu$  (à direita) direções num elipsóide. O co-normal é linear com o normal Euclidiano, enquanto que o normal afim aponta em direção ao centro do elipsóide, enfatizando que um elipsóide é a imagem afim de uma esfera.

### 3.2

#### Co-normal Afim e Normal Afim

O vetor contravariante afim, chamado de *co-normal afim*  $\nu$  pode ser obtido a partir de uma escala no vetor normal Euclidiano (10) (ver figura 3.2):

$$\nu = |K_e|^{-1/4} \mathbf{N}_e = |g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2|^{-1/4} (-g_x, -g_y, 1), \quad (3-4)$$

onde  $K_e$  é a curvatura Gaussiana Euclidiana dada por

$$K_e = (1 + g_y^2 + g_x^2)^{-2} (g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2).$$

O co-normal afim satisfaz  $\langle \nu, \mathbf{g}_{\{x,y\}} \rangle = 0$  e a métrica  $d^{1/4} = [\nu, \nu_x, \nu_y]$ .

A fórmula geral para o co-normal em uma superfície implícita pode ser

encontrada a partir da equação (3-4)

$$\nu = \frac{1}{f_z d^{1/4}} ( f_x, f_y, f_z ).$$

A fórmula explícita para o normal afim em função das derivadas de  $g$  foi dada nas equações (2-15), para encontrarmos  $\xi$  em função de  $f$  basta encontrar as derivadas de  $g$  até a terceira ordem como fizemos em (3-2) no cálculo da segunda derivada de  $g$  (ver apêndice A).

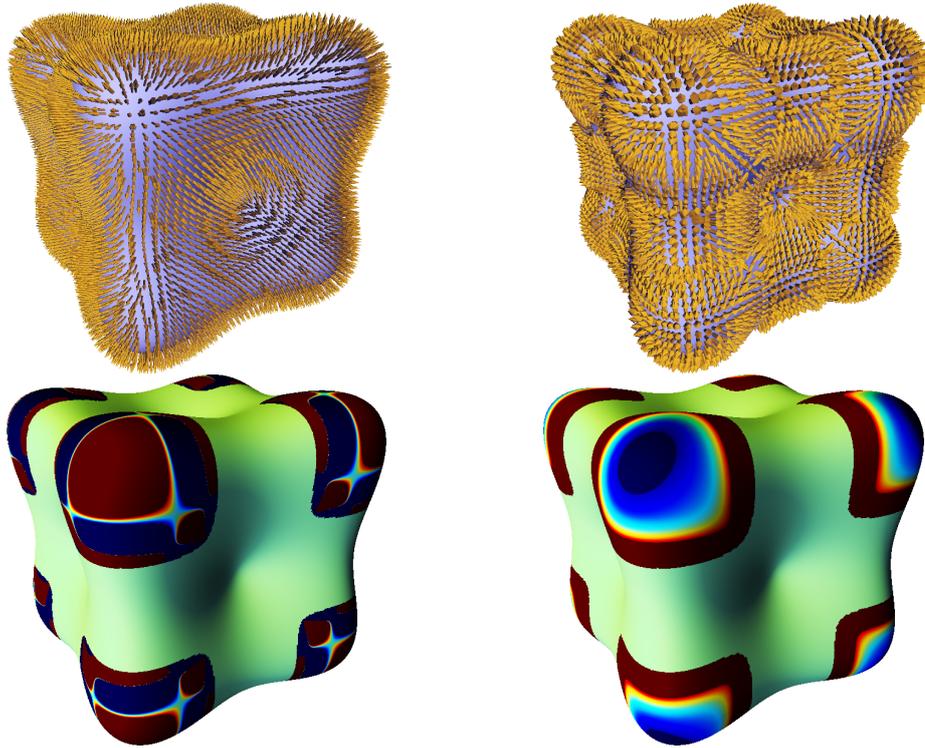


Figura 3.3: Estruturas afins na superfície *blobby* dada pela expressão  $(3x)^4 + (3y)^4 + (3z)^4 - 45x^2 - 45y^2 - 45z^2 + 6 = 0$ . Da esquerda para a direita, direção co-normal  $\nu$ , direção normal  $\xi$ , curvaturas Gaussiana  $\mathcal{K}$  e média  $\mathcal{H}$ , coloridas de vermelho para azul, a parte central verde correspondente a métrica degenerada.

Notemos que normalizamos os vetores co-normais e normais afins, pois quando  $K_e \approx 0$  estes têm comprimento infinito.

De forma similar encontra-se os coeficientes  $b_{ij}$  dados no capítulo 2 e assim as curvaturas Gaussiana e média afim (ver figura 3.3) em função de  $f$  (ver apêndice A).

### 3.3

#### Reduções Geométricas e Fórmulas Simplificadas

As fórmulas para as estruturas afins encontradas na seção anterior são uma extensão para o caso de gráfico  $G = \{ ( x, y, g(x, y) ), (x, y) \in U \}$  e seus tamanhos crescem bastante quando usamos o teorema da função implícita para

expressar essas estruturas afins diretamente em termos da função implícita  $f$ . Isso leva à uma significativa instabilidade numérica durante o cálculo (ver figura 3.4) e prejudica a invariância afim das quantidades calculadas (ver figura 3.5).

No entanto, sabemos como cada quantidade varia sobre uma transformação afim: a métrica e as curvaturas Gaussina e média são invariantes, o co-normal é contravariante e o normal é covariante. Aqui definimos uma transformação afim  $A$  que simplifica as fórmulas acima e contorna (ou isola) as instabilidades numéricas.

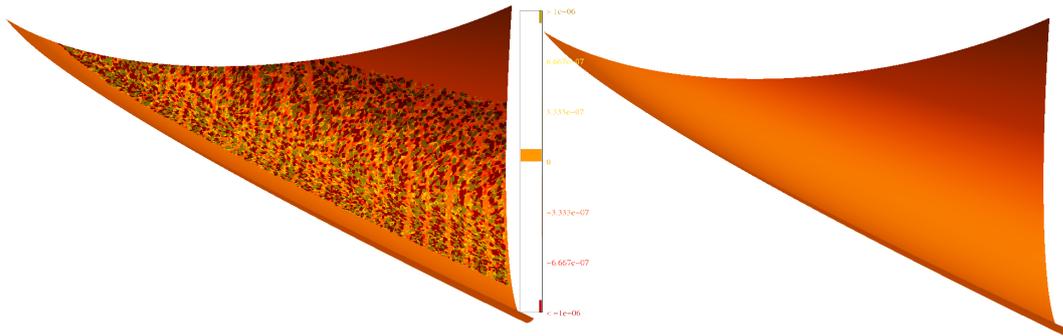


Figura 3.4: A curvatura afim do parabolóide é  $\mathcal{K} = 0$ , mas uma estimativa direta usando diretamente o teorema da função implícita apresenta uma grande instabilidade numérica (à esquerda). Com fórmulas simplificadas a estimativa é mais estável (à direita).

Na próxima seção, primeiro introduziremos esta transformação, encontraremos as fórmulas para a estrutura afim depois da simplificação e finalmente mostraremos como calcular a estrutura afim para a superfície implícita no caso geral usando a simplificação. No apêndice A colocamos as fórmulas para os invariantes afins sem a transformação.

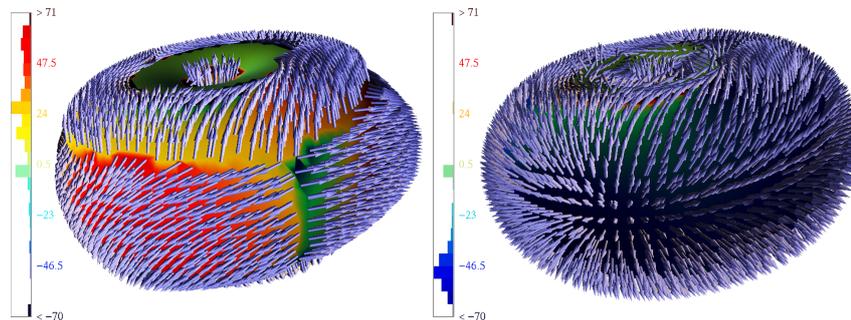


Figura 3.5: A escolha de um eixo não invariante leva a discontinuidades na estimativa de  $\nu$  (à esquerda) e mais ainda na curvatura. Com uma redução geométrica, a curvatura média afim  $\mathcal{H}$  é melhor aproximada (à direita).

### 3.3.1 Redução por Transformação Afim

Como todas as fórmulas implícitas são encontradas a partir do teorema da função implícita, muitos termos podem ser simplificados se pudermos definir o gradiente de  $f$  por um vetor constante por exemplo  $(0, 0, 1)$  depois de uma transformação afim  $A$ . Fazemos uma rotação no plano  $xy$  que reduz ainda mais o tamanho de nossas fórmulas.

Mais precisamente, procuramos por uma transformação afim  $A$ . Aqui estamos considerando que a transformação  $A$  seja apenas a parte linear, pois a translação não influencia significamente. Neste caso, teremos uma composição de uma rotação  $R_1$  e uma mudança de escala  $S$  e uma rotação  $R_2$ , onde  $S \circ R_1$  leva o vetor gradiente de  $f$  para  $(0, 0, 1)$  e a rotação  $R_2$  no plano  $xy$  garanti que  $f_{xy} = 0$ , o que simplifica vários termos nas fórmulas dos invariantes afins. O efeito desta transformação sobre as derivadas é descrita na seguinte proposição e a construção de  $A$  (ver figura 3.6) é detalhada na sua demonstração.

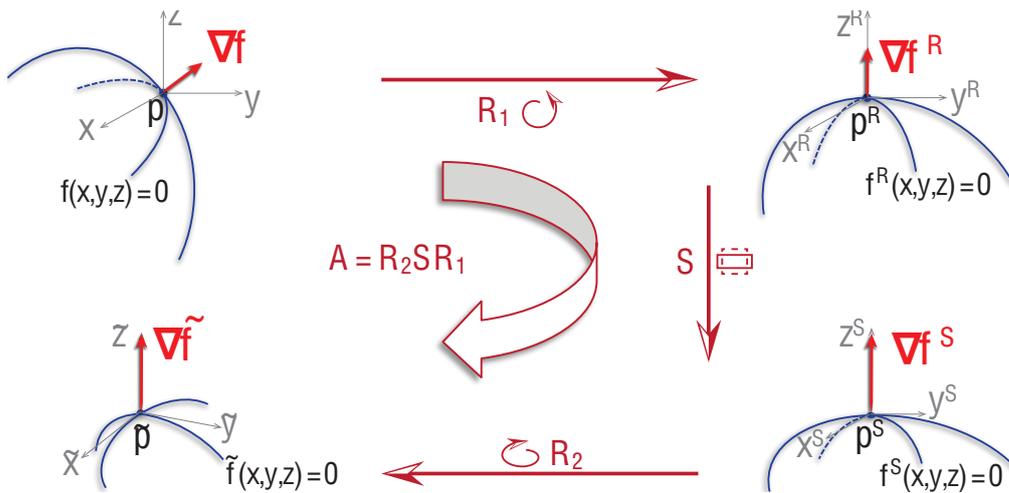


Figura 3.6: Construção da transformação  $A$ .

**Teorema 5** Em cada ponto regular  $p$  de uma superfície implícita  $\{p \in \mathbb{R}^3, f(p) = 0\}$  existe uma transformação equiafim  $A$  tal que em cada ponto  $\tilde{p} = A(p)$  a superfície implícita transformada  $\{\tilde{p} \in \mathbb{R}^3, \tilde{f}(\tilde{p}) = f(A^{-1}(\tilde{p})) = 0\}$  tem as seguintes propriedades

- O vetor gradiente é o vetor unitário vertical:  $\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) = (0, 0, 1)$ .
- A derivada cruzada  $\tilde{f}_{xy}$  zero, ou seja,  $\tilde{f}_{xy}(\tilde{p}) = 0$ .

**Demonstração:** Primeiro observe que  $\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) = \nabla f(p) \cdot A^{-1}$  (escrevendo o gradiente em linha). Deduzimos as transformações para o primeiro item

com a geometria descritiva simples. Decompomos a transformação afim como  $A = R_2 S R_1$  (ver figura 3.6), onde  $R_1$  é a rotação em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$  é uma escala não-uniforme ao longo de  $z$  e do plano  $xy$  e  $R_2$  é uma rotação no plano  $xy$ . A rotação  $R_1$  é uma aplicação de rotação de  $\nabla f(p)$  para o vetor vertical  $(0, 0, \|\nabla f(p)\|)$ . Denotemos por  $f^R$  a função implícita transformada que é dada por  $f^R(p) = f(R_1^{-1}(p))$ . Verifica-se que o vetor gradiente de  $f^R$  é

$$(\nabla f^R)^T = R_1^{-T}(\nabla f)^T = R_1(\nabla f)^T = (0, 0, \|\nabla f(p)\|)^T.$$

Fazemos uma escala no vetor gradiente obtido. Entretanto, para obter uma transformação afim, temos que compensar a escala ao longo de  $z$  no plano  $xy$ . Portanto, definimos  $S$  pela matriz diagonal  $S = \text{diag}(\eta^{-\frac{1}{2}}, \eta^{-\frac{1}{2}}, \eta)$ , onde  $\eta = \|\nabla f^R\| = \|\nabla f\|$ . Denotando  $f^S(p) = f^R(S^{-1}(p))$ , obtemos

$$(\nabla f^S)^T = S^{-T}(\nabla f^R)^T = (0, 0, 1)^T.$$

Finalmente, rotacionamos a superfície no plano  $xy$  para garantir que a derivada mista  $f_{xy} = 0$ . Isto é equivalente a diagonalizar a parte restrita do plano tangente da matriz Hessiana de  $f^S$ :  $\begin{bmatrix} f_{xx}^S & f_{xy}^S \\ f_{xy}^S & f_{yy}^S \end{bmatrix}$ . A rotação  $R_2$  é então a rotação de ângulo  $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2f_{xy}^S}{f_{xx}^S - f_{yy}^S}\right)$  no plano  $xy$ . Isto leva à função da proposição  $\tilde{f}(p) = f^S(R_2^{-1}(p)) = f(A^{-1}(p))$ . Como o gradiente de  $f^S$  está ao longo do eixo  $z$ , a rotação planar  $R_2$  não o altera. Uma vez que a matriz Hessiana  $H_{\tilde{f}}$  de  $\tilde{f}$  é dada pela composição das formas quadráticas:  $H_{\tilde{f}} = R_2^{-T} H_{f^S} R_2^{-1} = R_2 H_{f^S} R_2^T$ , obtemos  $\tilde{f}_{xy} = 0$ .

□

**Observação 5** *Em termos dos graus de liberdade a transformação  $A$  é uma matriz  $3 \times 3$ . Destes 9 coeficientes a restrição da transformação ser equiafim, o que implica que  $\det A = 1$ , reduz um grau de liberdade. A rotação  $R_1$  e a mudança de escala  $S$ , cada um, reduz o grau de liberdade em três: o ângulo ou o fator de escala e um eixo.*

*A rotação planar  $R_2$  tem um grau de liberdade: o ângulo. Embora ainda exista um grau de liberdade de reposição para os coeficientes, a segunda derivada tem dependência quadrática sobre os coeficientes de  $A$  e não há nenhuma garantia de que uma simplificação maior seria viável sem decidir o sinal da métrica (ou equivalentemente o sinal da curvatura Gaussiana Euclidiana).*

### 3.3.2

#### Fórmulas Simplificadas

Consideremos superfícies implícitas  $\{p \in \mathbb{R}^3; f(p) = 0\}$  definidas em volta de um ponto  $p$  tal que  $\nabla f(p) = (0, 0, 1)$  e  $f_{xy}(p) = 0$ . Notemos que a partir do teorema anterior asseguramos esta condição para qualquer ponto regular através de uma transformação afim A. Com esta condição, encontramos as fórmulas simplificadas para as estruturas afins de uma superfície implícita

**Vetores Tangentes** - Como  $f_x = f_y = 0$ , deduzimos da equação (3-1) que

$$\mathbf{g}_x = (1, 0, 0) \quad e \quad \mathbf{g}_y = (0, 1, 0).$$

**Métrica** - O coeficiente da métrica se reduz a simples expressão:  $d = f_{xx}f_{yy}$ .

**Co-normal** - A partir da métrica e do vetor gradiente, obtemos

$$\nu = |f_{xx}f_{yy}|^{-1/4} (0, 0, 1).$$

**Normal** - O normal afim se reduz a

$$\xi = \frac{1}{4 |f_{xx}f_{yy}|^{7/4}} \begin{pmatrix} f_{yy}^2 f_{xxx} + f_{xx} f_{yy} f_{xyy} - 4f_{xx} f_{yy}^2 f_{xz} \\ f_{xxy} f_{xx} f_{yy} - 4f_{xx}^2 f_{yy} f_{yz} + f_{xx}^2 f_{yyy} \\ 4f_{xx}^2 f_{yy}^2 \end{pmatrix}.$$

**Curvaturas** - As expressões de curvaturas têm uma forma bastante simples, comparada com a expressão antes da transformação A (ver apêndice A), a saber

$$b_{11} = \frac{1}{16 f_{xx}^{11/4} f_{yy}^{7/4}} ( 8f_{xx}^2 f_{yy}^2 f_{xz}^2 - 8f_{xx}^3 f_{yy}^2 f_{zz} + 8f_{xx}^3 f_{yy} f_{yz}^2 - 4f_{xx}^2 f_{yy} f_{xxyy} - 4f_{xx} f_{yy}^2 f_{xxxx} \\ + 7f_{yy}^2 f_{xxx}^2 + 3f_{xx}^2 f_{xyy}^2 + 12f_{xx} f_{yy} f_{xxy}^2 + 2f_{xx} f_{yy} f_{xxx} f_{xyy} + 4f_{xx}^2 f_{xxy} f_{yyy} \\ + 24f_{xx}^2 f_{yy}^2 f_{xxz} - 24f_{xx} f_{yy}^2 f_{xz} f_{xxx} - 24f_{xx}^2 f_{yy} f_{yz} f_{xxy} )$$

$$b_{21} = \frac{1}{16 f_{xx}^{11/4} f_{yy}^{7/4}} ( 15f_{xx} f_{yy} f_{xxy} f_{xyy} - f_{xx} f_{yy} f_{xxx} f_{yyy} - 4f_{xx}^2 f_{yy} f_{xyyy} - 24f_{xx}^2 f_{yy} f_{yz} f_{xxy} \\ - 4f_{xx} f_{yy}^2 f_{xxx} + 24f_{xx}^2 f_{yy}^2 f_{xyz} - 24f_{xx} f_{yy}^2 f_{xz} f_{xxy} + 7f_{yy}^2 f_{xxx} f_{xxy} + 7f_{xx}^2 f_{xxy} f_{yyy} )$$

As fórmulas para  $b_{12}$  e  $b_{22}$  são obtidas trocando  $x$  por  $y$  e vice-versa em  $b_{21}$  e  $b_{11}$ .

### 3.3.3

#### O caso geral a partir das fórmulas simplificadas

A redução anterior é responsável pelo crescimento da estabilidade numérica e pela melhoria das estimativas das estruturas afins. Começando da função implícita original  $f$  em  $p$  calculamos a transformação que é definida a partir das derivadas primeira e segunda de  $f$  em  $p$  segue do teorema 5, levando a uma nova função implícita  $\tilde{f}(\tilde{p}) = f(A^{-1}(\tilde{p}))$  com  $\tilde{p} = A(p)$ .

Primeiro calculamos as derivadas de  $\tilde{f}$  a partir das derivadas da  $f$  e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) &= \nabla f(p) \cdot A^{-1} \\ H_{\tilde{f}}(\tilde{p}) &= A^{-T} \cdot H_f(p) \cdot A^{-1} \\ \tilde{f}_{ijk}(\tilde{p}) &= \sum_{(a,b,c) \in \{x,y,z\}^3} f_{abc}(p) A_{a,i}^{-1} A_{b,j}^{-1} A_{c,k}^{-1}, \quad \forall (i,j,k) \in \{x,y,z\}^3, \\ \tilde{f}_{ijkl}(\tilde{p}) &= \sum_{(a,b,c,d) \in \{x,y,z\}^4} f_{abcd}(p) A_{a,i}^{-1} A_{b,j}^{-1} A_{c,k}^{-1} A_{d,l}^{-1}, \quad \forall (i,j,k,l) \in \{x,y,z\}^4,\end{aligned}\tag{3-5}$$

onde  $A_{a,i}^{-1}$  são os coeficientes da matriz inversa  $A^{-1}$  de linha  $a$  e coluna  $i$ . Usando essas derivadas podemos calcular as estruturas afins  $\tilde{\nu}(\tilde{p})$ ,  $\tilde{\xi}(\tilde{p})$ ,  $\tilde{\mathcal{K}}(\tilde{p})$  e  $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{p})$  da superfície implícita definida por  $\tilde{f}$ . A partir das invariâncias dessas estruturas podemos deduzir as estruturas afins para a superfície original  $\{p \in \mathbb{R}^3, f(p) = 0\}$  em  $p$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(\tilde{p}) &= \nu(p) \cdot A^{-1}, \\ \tilde{\xi}(\tilde{p}) &= \xi(p) \cdot A^T, \\ \tilde{\mathcal{K}}(\tilde{p}) &= \mathcal{K}(p), \\ \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{p}) &= \mathcal{H}(p).\end{aligned}$$