

1 Introdução

1.1 Motivação

Nas últimas décadas, modelos tridimensionais estão se tornando indispensáveis para diversas aplicações, como por exemplo em jogos, diagnósticos médicos, arquitetura entre outros. Em particular, classificar e reconhecer objetos geométricos (ver figura 1.1) tem despertado bastante interesse em várias áreas, tais como engenharia, biometria e computação visual.

 mão	✓ 	✓ 	✓ 	✓ 	✓ 	✓ 
	✓ 	✓ 	✓ 	✓ 	✓ 	✓ 
	✓ 	✓ 	✓ 	✗ 	✗ 	✗ 
	✗ 	✗ 	✗ 	✗ 	✓ 	✗ 

Figura 1.1: Reconhecimento de formas (31).

Conseqüentemente, vários problemas interessantes têm surgido em computação visual. Um desses problemas consiste em reconhecer se um objeto pertence a uma determinada classe.

Um ponto importante na classificação e reconhecimento de objetos geométricos em imagens é o fato que um objeto pode ser visto por diferentes pontos de vista, resultando em diferentes imagens deformadas (ver figura 1.2). Portanto, a invariância do ponto de vista é uma propriedade desejada. Na geometria clássica, classificar e reconhecer objetos geométricos é usualmente feito através do cálculo de invariantes, para isso é necessário estimar invariantes discretos comparáveis aos invariantes da geometria diferencial.

Notemos que no caso da figura figura 1.2 a geometria que melhor preserva as propriedades geométricas é a projetiva, no entanto foi usado a geometria afim (28) para fazer uma aproximação das propriedades geométricas, pois a imagem é tirada em perspectiva fraca que é bem aproximada pela geometria afim.

Nesse contexto, a aproximação de medidas invariantes de forma calculável no computador e numericamente estável apresenta alguns desafios. Em particular, é preciso mostrar que essas medidas convergem para os invariantes diferenciais e garantir que cada estimador seja também invariante e que portanto preserva sua característica geométrica.

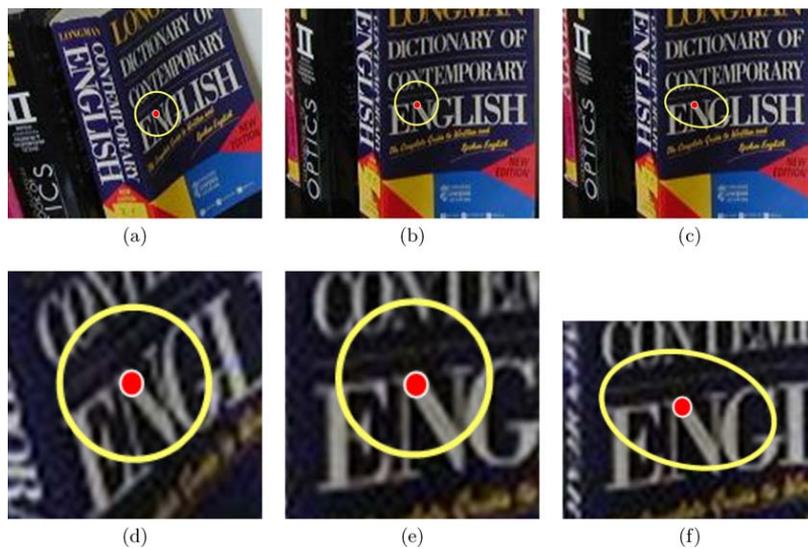


Figura 1.2: Mudanças do ponto de vista, em (a) primeiro ponto de vista e em (b,c) segundo ponto de vista. Fixar um círculo em (a,b) não é suficiente para lidar com as mudanças do ponto de vista. Neste caso, foi utilizado uma transformação equiafina (c) para aproximar as propriedades geométricas (28).

1.1.1 Contribuições

Esta tese pretende apresentar algumas propriedades geométricas em superfícies paramétricas ou implícitas em \mathbb{R}^3 que são invariantes por transformações *equiafins*, ou seja, transformações que preservam volumes, e mostrar os estimadores para tais propriedades. Como aplicação visualizaremos as propriedades geométricas como vetores co-normais e normais afins e as curvaturas afins em superfícies.

O problema inicial proposto para o desenvolvimento desta tese foi uma extensão natural do resultado de polígonos parabólicos (13) para três dimensões, ou seja, dado uma amostragem de três pontos de uma superfície

e planos tangentes definidos nestes pontos deseja-se construir um parabolóide de forma invariante afim. Vimos no decorrer da pesquisa que só é possível ter um parabolóide que interpole os três pontos e seja tangente aos três planos se colocarmos algumas condições sobre os planos. Mas, até o presente momento não temos a solução completa para este problema e observamos que um possível caminho para a solução desse problema é o estudo de cúbicas osculadoras.

Os resultados iniciais desta tese foram no caso paramétrico suave, a saber

- Interpretação geométrica para a curvatura Gaussiana afim.
- Existência local e global da vizinhança tubular afim para superfícies conexas, compactas e estritamente convexas.
- Condição necessária e suficiente para a superfície paralela ser regular.
- Fórmula de Minkowski afim.

Além disso, durante as pesquisas resolvemos usar as descrições diferenciáveis (10) para ganhar mais intuição na construção geométrica. Motivados pelos trabalhos de cálculo e visualização de curvaturas em superfícies implícitas (9, 21) decidimos pesquisar invariantes afins em superfícies implícitas, o que em particular gerou alguns resultados nesta tese

- Definição de um caso de referência.
- Construção de uma redução geométrica para reduzir ao caso de referência.
- Métodos de visualização das propriedades estimadas.
- Validação da estabilidade numérica, invariância e convergência.

Submetemos alguns trabalhos relacionados com os resultados desta tese (2, 3, 4, 5).

1.2

Trabalhos Relacionados

Geometria afim plana é frequentemente usada em processamento de imagens e visão computacional incluindo processamentos de invariantes afins de curvas (18, 36) e a definição de alguns descritores dos invariantes afins (27). Estes trabalhos são motivados pela descrição geométrica da mudança do ponto de vista em projeções fotográficas, as quais são bem aproximadas por transformações afins (26). Em particular, Mikolajczyk e Schmid (27, 28) forneceram um apanhado geral sobre as formas locais de descritores com ênfase em invariantes afins.

Para curvas planas descritas explicitamente um modelo de polígono parabólico (13) foi proposto para a construção local de invariantes afins, com o qual foi deduzido o comprimento, normal e curvatura afins de curvas discretas. Zuliani et al. (39) apresentaram um descritor invariante afim global baseado na equação de Helmholtz para a membrana vibratória com uma aplicação de correspondência. Além disso, Alvin (1) estudou equações diferenciais que descrevem as distâncias afins.

Para formas tridimensionais, descritores invariantes afins têm sido estudados desde 1990. Por exemplo, Arbtert et al. (6) apresentaram descritores invariantes afins globais para modelos paramétricos através da normalização da transformada de Fourier. Craizer et al. (12) descreveram relações entre distância, área e esferas impróprias afins. Já Betelu et al. (7) definiram distâncias afins invariantes para encontrar o esqueleto por erosão. Rothganger et al. (35) usam parametrização local de formas 3d para encontrar descritores afins, os quais são utilizados no reconhecimento de formas.

Recentemente, medidas invariantes afins têm recebido muita atenção na comunidade de visão computacional para melhorar correspondência e registro em curvas (27, 28, 39). Na verdade, curvas em um objeto vistas em duas fotos distintas têm diferentes medidas Euclidianas (distância ou curvatura) (26). Para dados tridimensionais a quantificação de formas similares tem sido usada em um grande número de aplicações em correspondência e registro (6, 19, 34) e reconstrução (20). Embora alguns objetos sejam claramente similares, eles não são localmente correspondentes sobre movimentos rígidos. Além disso, a definição da métrica afim foi usada para estender técnicas que calculam distâncias geodésicas em superfícies, onde as distâncias são definidas com respeito ao comprimento de arco afim, o que possibilitou várias aplicações, como por exemplo em detecção de simetrias e correspondência (33).

Uma medida de similaridade melhor para tais objetos pode ser obtida usando um conjunto maior de transformações, o que requer medidas mais sofisticadas. Com essa intenção, a geometria mais simples acima da Euclidiana é a geometria afim (22), a qual define medidas que são invariantes sobre transformações afins incluindo mudança de escalas não-uniforme e cisalhamento.

Assim, exibiremos as fórmulas para as principais estruturas afins: vetores co-normal e normal afins e as curvaturas Gaussiana e média afins para superfícies descritas como um gráfico, e deduziremos as fórmulas para o caso implícito usando o teorema da função implícita, como Goldman (21) fez no caso Euclidiano. Uma exposição completa de estruturas afins pode ser encontrada nos livros de Buchin (8) ou Nomizu (29).

1.3

Estrutura da Tese

Ao longo deste trabalho, estudamos estruturas invariantes sobre o grupo das transformações equiafins. Usamos o termo afim ao invés de equiafim para facilitar a leitura. O desenvolvimento teórico no caso da superfície ser definida implicitamente considerará apenas funções de classe C^4 e pontos regulares.

Neste trabalho, apresentamos estimadores robustos para os vetores co-normais e normais afins e para as curvaturas Gaussiana e média afins no caso de superfície. Expomos num primeiro momento as fórmulas diferenciais desses invariantes deduzidos no caso paramétrico e usando o teorema da função implícita obtemos os invariantes afins de superfícies implícitas. O cálculo dessas fórmulas é computacionalmente intenso (23.000 *flops* por ponto) e instável. Propomos uma transformação geométrica para reduzir o custo computacional (1.500 *flops* por ponto). Experimentamos essas abordagens incorporando os estimadores ao algoritmo *Marching Cubes*, para a visualização das propriedades geométricas. Encontramos condições suficientes para a existência do parabolóide interpolante. Procuramos interpretações geométricas para os invariantes afins, para poder construir estimadores no caso implícito (complexo celular). Além disso, obtemos o equivalente da fórmula de Minkowski no caso afim, que pode ser útil para obter melhores estimativas de curvaturas a partir de amostras de superfícies suaves (11). A tese está organizada como mostrado abaixo

Capítulo 2: Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Paramétricas

No capítulo 2 são apresentados os conceitos de transformações afins, curvas assintóticas (que motivam a definição da métrica de Berwald-Blaschke), estruturas afins, como vetores co-normal e normal além das curvaturas. O capítulo mostra ainda a interpretação geométrica da curvatura afim, a existência da vizinhança tubular afim local e global e a generalização da fórmula de Minkowski para a geometria afim. Estes últimos resultados são aparentemente inéditos.

Capítulo 3: Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Implícitas

O capítulo apresenta a nova dedução de fórmulas para o cálculo das estruturas afins em superfícies implícitas. São apresentados os exemplos fundamentais dessas estruturas. Em particular, será definida a redução geométrica permitindo obter as fórmulas simplificadas.

Capítulo 4: Cálculo de Invariantes Afins para Isossuperfícies

No capítulo 4 é discutido o método de aproximação de derivadas discretas que usamos nos experimentos, é apresentada a estabilidade numérica, a implementação das estruturas afins dentro do *Marching Cubes* e as medidas de qualidade dos estimadores.

Capítulo 5: Família de Parabolóides

No capítulo 5 apresentamos a solução parcial do primeiro problema proposto para esta tese, na qual encontramos condições sobre os planos tangentes que são suficientes para garantir a existência de um parabolóide interpolante.

Capítulo 6: Resultados

Este capítulo mostra os resultados de nossos estimadores para isossuperfícies e faz uma análise da estabilidade numérica, convergência e invariância afim. Também são discutidas algumas limitações dos nossos resultados.

Capítulo 7: Conclusão e Trabalhos Futuros

O capítulo 7 contém as conclusões deste trabalho e indica alguns caminhos para pesquisas subsequentes.