



Maria de Andrade Costa e Silva

**Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às
Isossuperfícies**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em
Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio
como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em
Matemática

Orientador: Prof. Thomas Lewiner

Rio de Janeiro
Agosto de 2011



Maria de Andrade Costa e Silva

**Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às
Isossuperfícies**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Thomas Lewiner

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Adailson Peixoto

Instituto de Matemática – UFAL

Prof. Wu Shin Ting

Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação-UNICAMP

Prof. Moacyr A. H. B. Silva

FGV

Prof. Luiz Velho

IMPA

Prof. Carlos Tomei

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Nicolau Saldanha

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Sinésio Pesco

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 3 de Agosto de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Maria de Andrade Costa e Silva

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Sergipe-UFS. Obteve o mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Alagoas-UFAL.

Ficha Catalográfica

Andrade, Maria

Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às Isossuperfícies / Maria de Andrade Costa e Silva; orientador: Thomas Lewiner. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 82 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Superfícies Regulares. 3. Invariante Afim. 4. Curvatura Gaussiana. 5. Curvatura Média. 6. Isossuperfícies. 7. Estimação de Derivadas. 8. Marching Cubes. I. Lewiner, Thomas. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

“A Pietro, pelo amor, paciência, incentivos e por acreditar em mim. ”

Maria Andrade.

Agradecimentos

A Deus por tudo.

Aos meus queridos pais, Josefa e Miguel (*in memoriam*), aos meus irmãos, à minha querida família e amigos em Itabaiana-SE, em especial a Aline Alves, à minha segunda família em Aracaju e ao meu querido esposo Pietro, pela enorme paciência, amor, encorajamento, discussões matemáticas e por tudo que fez por mim para eu continuar meu doutorado.

Durante minha graduação na UFS alguns professores me incentivaram a continuar meus estudos, a eles meus sinceros agradecimentos, em especial aos professores e amigos: Paulo Rabelo, Valdenberg Araújo, Almir Rogério, André Vinícius e Anderson Valença.

Em seguida, fiz o mestrado na UFAL e obtive a contribuição de outros professores na minha formação, agradeço a todos pela confiança e pelas aulas, em especial aos professores Adán Corcho e Adailson Peixoto, que apesar da distância estiveram presentes em vários momentos importantes ao longo desses anos.

Um agradecimento especial às duas instituições que possibilitaram a minha formação acadêmica e pessoal nos últimos anos: o IMPA e a PUC. Aos funcionários e professores dessas instituições meu muito obrigada, em especial ao professor Fernando Codá pelos ótimos cursos ministrados de Geometria Diferencial e pelo apoio, e aos professores: Alexandre Arbieto, Carlos Matheus, Carlos Tomei, Marcos Craizer e Sinésio Pesco pelo apoio. Aos amigos que se tornaram uma grande família, especialmente a: Adriana, Aline, Andréa, Cabral, Cristina, Claudemir, Emílio, Fernando, Grigori, Ives, João, Júlio, Lis, Marcelo, Patrícia e Renata.

Ao meu orientador professor Thomas Lewiner por todo apoio nestes dois anos, confiança, paciência, motivação no trabalho e amizade.

À minha querida amiga Clarissa Codá pela amizade ao longo desses anos. Pela constante presença tão fundamental e por me ajudar a seguir em frente em vários momentos.

Aos professores que fizeram parte desta banca por todos os comentários.

A todas as pessoas que contribuíram de alguma forma.

E finalmente, à PUC-Rio/VRAc, CNPq e CAPES pelo financiamento de bolsas, as quais foram fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho.

Resumo

Andrade, Maria; Lewiner, Thomas. **Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às Isossuperfícies**. Rio de Janeiro, 2011. 82p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A geometria diferencial provê um conjunto de medidas invariantes sob a ação de um grupo de transformações, em particular rígidas, afins e projetivas. Os invariantes por transformações rígidas são usados em quase todas as aplicações de computação gráfica e modelagem geométrica. O caso afim, por ser mais geral, permite estender essas ferramentas. Neste trabalho, propriedades geométricas são apresentadas no caso de superfícies paramétricas ou implícitas, em particular, a métrica afim, os vetores co-normal e normal afins e as curvaturas Gaussiana e média afins. Alguns resultados usuais de geometria Euclidiana, como a fórmula de Minkowski, são estendidos para o caso afim. Esse estudo permite definir estimadores das estruturas afins no caso de isossuperfícies. Porém, um cálculo direto dessas estruturas resulta em um grande número de operações e instabilidade numérica. Uma redução geométrica é proposta, obtendo fórmulas mais simples e mais estáveis numericamente. As propriedades geométricas incorporadas no *Marching Cubes* são analisadas e discutidas.

Palavras-chave

Superfícies Regulares ; Invariante Afim ; Curvatura Gaussiana ; Curvatura Média ; Isossuperfícies ; Estimação de Derivadas ; Marching Cubes.

Abstract

Andrade, Maria; Lewiner, Thomas (Advisor) . **Calculus of Affine Structures and Applications for Isosurfaces**. Rio de Janeiro, 2011. 82p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Differential Geometry provides a set of measures invariant under a set of transformations, in particular rigid, affine, and projective. The invariants by rigid motions are using almost all applications of computer graphics and geometric modeling. The affine case, since it is more general, allows to extend these tools. In this work, geometric properties are presented in the case of parametric or implicit surfaces, in particular the affine metric, the co-normal and normal vectors, and the affine Gaussian and mean curvatures. Some usual results of Euclidean geometry, as the Minkowski formula, are extended for the affine case. This study allows to define estimators of affines structure in the case of isosurfaces. Although, the direct calculation of these structures greatly increases the number of operations and numerical instabilities. A geometrical reduction is proposed obtaining a much simpler and numerical stabler formulae. The geometrical properties are incorporated in the Marching Cubes algorithms, then they are analyzed and discussed.

Keywords

Regular Surfaces ; Affine Invariant ; Gaussian Curvature ; Mean Curvature ; Isosurfaces ; Derivatives Estimation ; Marching Cubes.

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Motivação	13
1.2	Trabalhos Relacionados	15
1.3	Estrutura da Tese	17
2	Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Paramétricas	19
2.1	Transformações Afins e Curvas Assintóticas	20
2.2	Co-normal Afim e Normal Afim	29
2.3	Curvaturas Afins	32
2.4	Caso de Superfície Parametrizadas como Gráfico	33
3	Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Implícitas	43
3.1	Plano Tangente e Métrica Afim	44
3.2	Co-normal Afim e Normal Afim	45
3.3	Reduções Geométricas e Fórmulas Simplificadas	46
4	Cálculo de Estruturas Afins para Iossuperfícies	52
4.1	Aproximação das Derivadas Discretas	52
4.2	Implementação dentro do <i>Marching Cubes</i>	54
4.3	Estabilidade Numérica	55
4.4	Medidas de Qualidade	57
5	Família de Parabolóides	59
6	Resultados	63
7	Conclusão e Trabalhos Futuros	68
	Referências Bibliográficas	70
A	Cálculo dos Invariantes Diretamente	74

Lista de figuras

1.1	Reconhecimento de formas (31).	13
1.2	Mudanças do ponto de vista, em (a) primeiro ponto de vista e em (b,c) segundo ponto de vista. Fixar um círculo em (a,b) não é suficiente para lidar com as mudanças do ponto de vista. Neste caso, foi utilizado uma transformação equiafim (c) para aproximar as propriedades geométricas (28).	14
2.1	Transformações equiafins bidimensionais.	21
2.2	Definição de superfície parametrizada.	22
2.3	Ilustração do plano osculador (©wikipedia).	22
2.4	Curvatura normal.	23
2.5	Interpretação geométrica do sinal de d. As regiões vermelhas, verdes e azuis indicam respectivamente curvaturas Gaussianas positivas, nulas e negativas (9).	29
2.6	Os parabolóides elíptico e hiperbólico têm co-normal afim apontando para o centro de cada superfície.	31
2.7	Os parabolóides elíptico e hiperbólico têm normal afim ξ constante. Eles têm o papel do plano Euclidiano na geometria afim.	33
2.8	(©Wikipedia) Interpretação geométrica do normal afim.	34
2.9	Curvas paralelas.	39
2.10	Superfícies paralelas afins no parabolóide elíptico.	41
3.1	Em (a) modelo implícito de uma banana com as curvaturas Gaussiana (à esquerda) e média afins (à direita), cores escuras indicam maiores curvaturas. Resultado após aplicar transformações afins $p \mapsto A \cdot p$. Notemos que as características das cores se preservaram, ou seja, as curvaturas se mantiveram. No caso Euclidiano isso não ocorreria.	43
3.2	Vetores normal afim ξ (à esquerda) e co-normal afim ν (à direita) direções num elipsóide. O co-normal é linear com o normal Euclidiano, enquanto que o normal afim aponta em direção ao centro do elipsóide, enfatizando que um elipsóide é a imagem afim de uma esfera.	45
3.3	Estruturas afins na superfície <i>blobby</i> dada pela expressão $(3x)^4 + (3y)^4 + (3z)^4 - 45x^2 - 45y^2 - 45z^2 + 6 = 0$. Da esquerda para a direita, direção co-normal ν , direção normal ξ , curvaturas Gaussiana \mathcal{K} e média \mathcal{H} , coloridas de vermelho para azul, a parte central verde correspondente a métrica degenerada.	46
3.4	A curvatura afim do parabolóide é $\mathcal{K} = 0$, mas uma estimativa direta usando diretamente o teorema da função implícita apresenta uma grande instabilidade numérica (à esquerda). Com fórmulas simplificadas a estimativa é mais estável (à direita).	47

- 3.5 A escolha de um eixo não invariante leva a descontinuidades na estimativa de ν (à esquerda) e mais ainda na curvatura. Com uma redução geométrica, a curvatura média afim \mathcal{H} é melhor aproximada (à direita). 47
- 3.6 Construção da transformação A. 48
- 4.1 Função spline σ_1 de grau 5 em uma variável. 53
- 4.2 Incorporando os estimadores dentro do *Marching Cubes* revela o padrão não-invariante da grade baseado na estimação das derivadas. As curvaturas Gaussiana afim \mathcal{K} (à esquerda) e média afim \mathcal{H} (à direita) antes (em cima) com um aumento da escala e depois (em baixo) com a transformação afim $((0.9, 0, 0.9), (0, 2, 0), (1.1, 0, 0.6))$. 54
- 4.3 Implementação dentro do *Marching Cubes*. Na primeira linha temos a primeira tentativa e na segunda linha a última tentativa que resultou melhores resultados. 55
- 4.4 Correção do domínio caso bidimensional. 57
- 5.1 Parabolóide elíptico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente. 61
- 5.2 Parabolóide hiperbólico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente. 62
- 6.1 Comparações do normal afim ξ quando calculado usando: z na derivação implícita (à esquerda), o eixo na maioria dos casos alinhado com o gradiente (meio), ou a nossa redução geométrica (à direita). 63
- 6.2 Comparação na superfície de equação $2z^2 - \sin(5x + 3y^2 - 1) = 0$ dos estimadores da curvatura média \mathcal{H} (em cima) e da curvatura Gaussiana \mathcal{K} (em baixo), usando método direto (à esquerda) e o método com transformação (à direita), com a mesma escala de cores, ambos métodos mostram descontinuidades nas regiões degeneradas $K_e = 0$. 64
- 6.3 Convergência sobre o modelo da esfera: erro absoluto em relação ao tamanho da grade, antes (sólido) e depois (tracejada) da transformação afim da figura 4.2: método direto (à esquerda, em escala linear) e o método de transformação (à direita, em escala logarítmica). A barra de erro representa o quinto da variância do erro absoluto. 65
- 6.4 No toro $z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 0.5)^2 = 0$, a distribuição da curvatura Gaussiana afim \mathcal{K} é melhor preservada sobre a transformação afim $((1.4, -0.2, 0), (0.1, 0.7, 0), (0, 0, 1))$ se usamos o método com transformação (embaixo) do que o direto (em cima). 66
- 6.5 Mesmo em uma isossuperfície mais complexa, a curvatura Gaussiana afim estimada com nosso método é preservada após uma aplicação afim. 67

Lista de tabelas

- 2.1 Exemplos fundamentais de estruturas afins. 34
- 4.1 Número de operações de cada passo do estimador para um único ponto. As fórmulas simplificadas são muito mais concisas e são mais intensas computacionalmente nas operações de mapear as derivadas. 56

Sumário de Anotações

Símbolo	Significado
$M(n)$	Conjunto das matrizes quadradas $n \times n$
$\det(A)$	Determinante da matriz A
$\text{tr}(A)$	Traço da matriz A
$[u, v, w]$	Determinante da matriz 3×3 formada pelos vetores u, v, w
dA	Elemento de área Euclidiano
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana
S	Superfície
$T_p S$	Plano tangente de S em p
\mathbf{x}	Parametrização local da superfície
\mathbf{x}_α	Derivada da parametrização com respeito a coordenada $\alpha \in \{u, v\}$
I_p	Primeira Forma Fundamental Euclidiana no ponto p
E_e, F_e, G_e	Coefficientes da Primeira Forma Fundamental Euclidiana
N_e	Vetor Normal Euclidiano
K_e	Curvatura Gaussiana Euclidiana
L, M, N	Coefficientes da métrica de Berwald- Blaschke
d	Coefficiente da métrica afim
\mathcal{I}_x	Primeira Forma Fundamental Afim
ν	Vetor co-normal afim
ξ	Vetor normal afim
\mathcal{K}	Curvatura Gaussiana afim
\mathcal{H}	Curvatura média afim
$V_{\{u,v\}}$	Derivadas do vetor V com relação a u, v
$d\tilde{A}$	Elemento de área afim
\mathcal{S}	Operador de forma afim
b_{ij}	Coefficientes do operador forma afim