Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Maria de Andrade Costa e Silva

Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às Isossuperfícies

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Thomas Lewiner

Rio de Janeiro
Agosto de 2011

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Maria de Andrade Costa e Silva

Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às Isossuperfícies

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Thomas Lewiner
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Adelailson Peixoto
Instituto de Matemática – UFAL

Prof. Wu Shin Ting
Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação-UNICAMP

Prof. Moacyr A. H. B. Silva
FGV

Prof. Luiz Velho
IMPA

Prof. Carlos Tomei
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Nicolau Saldanha
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Sinésio Pesco
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 3 de Agosto de 2011

Maria de Andrade Costa e Silva

Graduou–se em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Sergipe–UFS. Obteve o mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Alagoas–UFAL.

Ficha Catalográfica

Andrade, Maria

Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às Isossuperfícies / Maria de Andrade Costa e Silva; orientador: Thomas Lewiner. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 82 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Superfíceis Regulares. 3. Invariante Afim. 4. Curvatura Gaussiana. 5. Curvatura Média. 6. Isossuperfícies. 7. Estimação de Derivadas. 8. Marching Cubes. I. Lewiner, Thomas. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

"A Pietro, pelo amor, paciência, incentivos e por acreditar em mim. "

Maria Andrade.

Agradecimentos

A Deus por tudo.

Aos meus queridos pais, Josefa e Miguel (*in memoriam*), aos meus irmãos, à minha querida família e amigos em Itabaiana-SE, em especial a Aline Alves, à minha segunda família em Aracaju e ao meu querido esposo Pietro, pela enorme paciência, amor, encorajamento, discussões matemáticas e por tudo que fez por mim para eu continuar meu doutorado.

Durante minha graduação na UFS alguns professores me incentivaram a continuar meus estudos, a eles meus sinceros agradecimentos, em especial aos professores e amigos: Paulo Rabelo, Valdenberg Araújo, Almir Rogério, André Vinícius e Anderson Valença.

Em seguida, fiz o mestrado na UFAL e obtive a contribuição de outros professores na minha formação, agradeço a todos pela confiança e pelas aulas, em especial aos professores Adán Corcho e Adelailson Peixoto, que apesar da distância estiveram presentes em vários momentos importantes ao longo desses anos.

Um agradecimento especial às duas instituições que possibilitaram a minha formação acadêmica e pessoal nos últimos anos: o IMPA e a PUC. Aos funcionários e professores dessas instituições meu muito obrigada, em especial ao professor Fernando Codá pelos ótimos cursos ministrados de Geometria Diferencial e pelo apoio, e aos professores: Alexandre Arbieto, Carlos Matheus, Carlos Tomei, Marcos Craizer e Sinésio Pesco pelo apoio. Aos amigos que se tornaram uma grande família, especialmente a: Adriana, Aline, Andréa, Cabral, Cristina, Claudemir, Emílio, Fernando, Grigori, Ives, João, Júlio, Lis, Marcelo, Patrícia e Renata.

Ao meu orientador professor Thomas Lewiner por todo apoio nestes dois anos, confiança, paciência, motivação no trabalho e amizade.

À minha querida amiga Clarissa Codá pela amizade ao longo desses anos. Pela constante presença tão fundamental e por me ajudar a seguir em frente em vários momentos.

Aos professores que fizeram parte desta banca por todos os comentários.

A todas as pessoas que contribuíram de alguma forma.

E finalmente, à PUC-Rio/VRAc, CNPq e CAPES pelo financiamento de bolsas, as quais foram fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho.

Resumo

Andrade, Maria; Lewiner, Thomas. **Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às Isossuperfícies**. Rio de Janeiro, 2011. 82p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A geometria diferencial provê um conjunto de medidas invariantes sob a ação de um grupo de transformações, em particular rígidas, afins e projetivas. Os invariantes por transformações rígidas são usados em quase todas as aplicações de computação gráfica e modelagem geométrica. O caso afim, por ser mais geral, permite estender essas ferramentas. Neste trabalho, propriedades geométricas são apresentadas no caso de superfícies paramétricas ou implícitas, em particular, a métrica afim, os vetores co-normal e normal afins e as curvaturas Gaussiana e média afins. Alguns resultados usuais de geometria Euclidiana, como a fórmula de Minkowski, são estendidos para o caso afim. Esse estudo permite definir estimadores das estruturas afins no caso de isossuperfícies. Porém, um cálculo direto dessas estruturas resulta em um grande número de operações e instabilidade numérica. Uma redução geométrica é proposta, obtendo fórmulas mais simples e mais estáveis numericamente. As propriedades geométricas incorporadas no *Marching Cubes* são analisadas e discutidas.

Palavras–chave

Superfíceis Regulares ; Invariante Afim ; Curvatura Gaussiana ; Curvatura Média ; Isossuperfícies ; Estimação de Derivadas ; Marching Cubes.

Abstract

Andrade, Maria; Lewiner, Thomas (Advisor) . **Calculus of Affine Structures and Applications for Isosurfaces**. Rio de Janeiro, 2011. 82p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Differential Geometry provides a set of measures invariant under a set of transformations, in particular rigid, affine, and projective. The invariants by rigid motions are using almost all applications of computer graphics and geometric modeling. The affine case, since it is more general, allows to extend these tools. In this work, geometric properties are presented in the case of parametric or implicit surfaces, in particular the affine metric, the co-normal and normal vectors, and the affine Gaussian and mean curvatures. Some usual results of Euclidean geometry, as the Minkowski formula, are extended for the affine case. This study allows to define estimators of affines structure in the case of isosurfaces. Although, the direct calculation of these structures greatly increases the number of operations and numerical instabilities. A geometrical reduction is proposed obtaining a much simpler and numerical stabler formulae. The geometrical properties are incorporated in the Marching Cubes algorithms, then they are analyzed and discussed.

Keywords

Regular Surfaces ; Affine Invariant ; Gaussian Curvature ; Mean Curvature ; Isosurfaces ; Derivatives Estimation ; Marching Cubes.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Sumário de Anotações

Símbolo	Significado
$M(n)$	Conjunto das matrizes quadradas $n \times n$
$det(A)$	Determinante da matriz A
$tr(A)$	Traço da matriz A
$[u, v, w]$	Determinante da matriz 3×3 formada pelos vetores u, v, w
dA	Elemento de área Euclidiano
$\|\|.\|\|$	Norma Euclidiana
S	Superfície
T_pS	Plano tangente de S em p
$\mathtt{x}$	Parametrização local da superfície
$\mathtt{x}_\alpha$	Derivada da parametrização com respeito a coordenada $\alpha \in \{u, v\}$
I_p	Primeira Forma Fundamental Euclidiana no ponto p
E_e, F_e, G_e	Coeficientes da Primeira Forma Fundamental Euclidiana
N_e	Vetor Normal Euclidiano
K_e	Curvatura Gaussiana Euclidiana
L, M, N	Coeficientes da métrica de Berwald- Blaschke
d	Coeficiente da métrica afim
$\mathcal{I}_{\mathtt{x}}$	Primeira Forma Fundamental Afim
ν	Vetor co-normal afim
ξ	Vetor normal afim
$\mathcal{K}$	Curvatura Gaussiana afim
$\mathcal{H}$	Curvatura média afim
$V_{\{u,v\}}$	Derivadas do vetor V com relação a u, v
$d\bar{A}$	Elemento de área afim
$\mathcal{S}$	Operador de forma afim
b_{ij}	Coeficientes do operador forma afim