2
Modelagem Eletromagnética do Problema

2.1
Introdução

O *Eletromagnetismo* clássico é a disciplina comprometida com o estudo de cargas elétricas, responsáveis pela produção de correntes elétricas e campos eletromagnéticos [13]. Através de suas teorias inerentes, é possível definir o conceito de ondas eletromagnéticas e predizer seu comportamento. De fato, a principal forma utilizada de viabilizar a comunicação sem fio é através de propagação de ondas eletromagnéticas.

As seções que se seguem definem rapidamente das leis que regem o *Eletromagnetismo* . Além disso, é feito um estudo analítico do meio de propagação, de forma a modelar este.

2.2
Equações de Maxwell

2.2.1
A formulação das equações

Antes de falar nas *Equações de Maxwell* propriamente ditas, é preciso definir algumas grandezas que serão utilizadas daqui em diante. São elas:

$$\vec{\mathfrak{E}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3 \tag{2-1}$$

$$\vec{\mathfrak{H}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3 \tag{2-2}$$

$$\vec{\mathfrak{D}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3 \tag{2-3}$$

$$\vec{\mathfrak{B}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3 \tag{2-4}$$

$$\vec{\mathfrak{J}}_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3 \tag{2-5}$$

$$\vec{\mathfrak{J}}_c : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3 \tag{2-6}$$

$$\mathfrak{p} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \tag{2-7}$$

$$\mathfrak{v} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \tag{2-8}$$

$$\mathfrak{c} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \tag{2-9}$$

$\vec{\mathfrak{E}}$	$\vec{\mathbf{E}}$	Vetor campo elétrico
$\vec{\mathfrak{H}}$	$\vec{\mathbf{H}}$	Vetor campo magnético
$\vec{\mathfrak{D}}$	$\vec{\mathbf{D}}$	Vetor densidade de campo elétrico
$\vec{\mathfrak{B}}$	$\vec{\mathbf{B}}$	Vetor densidade de campo magnético
$\vec{\mathfrak{J}}_i$	$\vec{\mathbf{J}}_i$	Vetor densidade volumétrica de corrente elétrica induzida (fontes)
$\vec{\mathfrak{M}}_i$	$\vec{\mathbf{M}}_i$	Vetor densidade volumétrica de corrente magnética induzida (fontes)
$\vec{\mathfrak{J}}_c$	$\vec{\mathbf{J}}_c$	Vetor densidade volumétrica de corrente elétrica de condução
$\mathfrak{p}$	p	Escalar densidade volumétrica de carga elétrica
$\mathfrak{v}$	v	Escalar densidade volumétrica de carga magnética
$\mathfrak{c}$	σ	Escalar condutividade elétrica

Tabela 2.1: Descrição da notação dos campos.

A tabela 2.2.1 descreve seus significados. Todas as funções são operadores binários definidos no espaço-tempo, cuja coordenada espacial $\mathfrak{r} \in \mathbb{R}^3$ e a coordenada temporal $\mathfrak{t} \in \mathbb{R}_+$ são, respectivamente, seus parâmetros de entrada, ou seja, se f está definido como $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to X$, então $f \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathfrak{r}, \mathfrak{t})$. Existem, também, as funções ou campos definidos no domínio da frequência, que será explicado posteriormente.

Existem, basicamente, 6 equações que regulamentam o eletromagnetismo clássico — conhecidas como *Equações de Maxwell* na forma diferencial — que serão utilizadas neste capítulo. São elas [13, p. 2-3]:

$$\nabla \times \vec{\mathfrak{E}} = -\vec{\mathfrak{M}}_i - \dot{\vec{\mathfrak{B}}} \tag{2-10}$$

$$\nabla \times \vec{\mathfrak{H}} = \vec{\mathfrak{J}}_i + \vec{\mathfrak{J}}_c + \dot{\vec{\mathfrak{D}}} \tag{2-11}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathfrak{B}} = \mathfrak{v} \tag{2-12}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathfrak{D}} = \mathfrak{p} \tag{2-13}$$

$$\nabla \cdot (\vec{\mathfrak{J}}_i + \vec{\mathfrak{J}}_c) = -\dot{\mathfrak{p}} \tag{2-14}$$

A equação 2-14 é conhecida como *equação da continuidade de carga elétrica* e expressa o princípio da conservação de carga elétrica.

Nas equações acima, $\dot{x}$ denota a derivada temporal $\partial x/\partial t$ (notação de Newton). Para o significado dos demais símbolos, ver tabela 2.2.1.

Além disso, para meios lineares [14]:

$$\vec{\mathfrak{J}}_c = \mathfrak{c}\vec{\mathfrak{E}} \tag{2-15}$$

$$\vec{\mathfrak{D}} = \epsilon\vec{\mathfrak{E}} \tag{2-16}$$

$$\vec{\mathfrak{B}} = \mu\vec{\mathfrak{H}} \tag{2-17}$$

A formulação apresentada é conhecida como formulação no domínio do tempo. Entretanto, para o caso de fontes harmônicas,pode-se utilizar a formulação das equações no domínio da frequência, através de notação fasorial. Neste caso, buscam-se soluções que assumam oscilações temporais na forma $\mathfrak{e}^{\jmath\omega \mathrm{t}}$, onde $\jmath$ é a unidade imaginária (apêndice A-1).

Neste caso, utiliza-se as relações [13, cap. 1]:

$$\vec{\mathfrak{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \Re\{\vec{\mathbf{E}}\mathfrak{e}^{\jmath\omega \mathrm{t}}\} \tag{2-18}$$

$$\vec{\mathfrak{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \Re\{\vec{\mathbf{H}}\mathfrak{e}^{\jmath\omega \mathrm{t}}\} \tag{2-19}$$

$$\vec{\mathfrak{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \Re\{\vec{\mathbf{B}}\mathfrak{e}^{\jmath\omega \mathrm{t}}\} \tag{2-20}$$

$$\vec{\mathfrak{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \Re\{\vec{\mathbf{D}}\mathfrak{e}^{\jmath\omega \mathrm{t}}\} \tag{2-21}$$

chegando-se, assim, às *Equações de Maxwell* para campos harmônicos no tempo:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{M}}_i - \jmath\omega\vec{\mathbf{B}} \tag{2-22}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}_i + \vec{\mathbf{J}}_c + \jmath\omega\vec{\mathbf{D}} \tag{2-23}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = p \tag{2-24}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = v \tag{2-25}$$

$$\nabla \cdot (\vec{\mathbf{J}}_i + \vec{\mathbf{J}}_c) = -\jmath\omega p \tag{2-26}$$

A relação entre condutividade e o vetor densidade volumétrica de corrente elétrica de condução ($\vec{\mathbf{J}}_c$) continua valendo:

$$\vec{\mathbf{J}}_c = \sigma\vec{\mathbf{E}} \tag{2-27}$$

2.2.2 Condições de Contorno

Na interface de separação entre dois meios, as ondas presentes em ambos os meios devem satisfazer condições conhecidas como *condições de contorno* [13]. Denotando com índices 1 e 2 as grandezas referentes aos meios 1 e 2, respectivamente, pode-se escrever as condições de contorno na interface de separação de ambos como:

$$-\hat{n} \times (\vec{\mathfrak{E}}_2 - \vec{\mathfrak{E}}_1) = \vec{\mathfrak{M}}_i^{(superf)} \tag{2-28}$$

$$\hat{n} \times (\vec{\mathfrak{H}}_2 - \vec{\mathfrak{H}}_1) = (\vec{\mathfrak{J}}_i + \vec{\mathfrak{J}}_c)^{(superf)} \tag{2-29}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathfrak{D}}_2 - \vec{\mathfrak{D}}_1) = \mathfrak{p}^{(superf)} \tag{2-30}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathfrak{B}}_2 - \vec{\mathfrak{B}}_1) = \mathfrak{v}^{(superf)} \tag{2-31}$$

A convenção é de que o vetor normal $\hat{n}$ seja orientado do meio 1 para o meio 2 e seja unitário. O índice superior "superf" indica grandezas superficiais, isto é, na superfície que divide os meios.

As condições de contorno para campos harmônicos no tempo são análogas: basta substituir os vetores pelos seus equivalentes na frequência. Assim sendo:

$$\hat{n} \times (\vec{\mathbf{E}}_2 - \vec{\mathbf{E}}_1) = \vec{\mathbf{M}}_i^{(superf)} \tag{2-32}$$

$$\hat{n} \times (\vec{\mathbf{H}}_2 - \vec{\mathbf{H}}_1) = \vec{\mathbf{J}}^{(superf)} \tag{2-33}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathbf{D}}_2 - \vec{\mathbf{D}}_1) = \mathfrak{p}^{(superf)} \tag{2-34}$$

$$\hat{n} \times (\vec{\mathbf{B}}_2 - \vec{\mathbf{B}}_1) = \mathfrak{v}^{(superf)} \tag{2-35}$$

(2-36)

2.3 A equação de onda e suas soluções

A equação de onda para um meio linear com perdas é dada por [13, p. 105]:

$$\nabla^2\vec{\mathfrak{E}} = \nabla \times \vec{\mathfrak{M}}_i + \mu\dot{\vec{\mathfrak{J}}}_i + \frac{1}{\epsilon}\nabla\mathfrak{p} + \mu\mathfrak{c}\dot{\vec{\mathfrak{E}}} + \mu\epsilon\ddot{\vec{\mathfrak{E}}} \tag{2-37}$$

Note que a equação 2-37 é um sistema de três equações diferenciais parciais de segunda ordem com quatro variáveis: três espaciais e uma temporal. Em um meio sem fontes ($\vec{\mathfrak{J}}_i = \vec{\mathfrak{M}}_i = \vec{\mathfrak{o}}$ e $\mathfrak{p} = 0$):

$$\nabla^2\vec{\mathfrak{E}} = \mu\mathfrak{c}\dot{\vec{\mathfrak{E}}} + \mu\epsilon\ddot{\vec{\mathfrak{E}}} \tag{2-38}$$

Devido à complexidade da equação, costuma-se adotar a técnica de *potenciais eletromagnéticos auxiliares* [13, p. 258]. Nesta técnica, redefine-se a equação de onda para potenciais pré-definidos de forma a simplificar aquela. Na literatura, utiliza-se, principalmente, os potenciais $\vec{\mathfrak{A}}$ e $\vec{\mathfrak{F}}$ e os *potenciais de Hertz* [13, p. 254, 305].

A seguir, será deduzido o pontencial vetorial elétrico harmônico no tempo – $\vec{\mathbf{A}}$ – para o caso específico de um meio com perdas uniformes (σ constante para todo $\mathfrak{r} \in \mathbb{R}^3$). Com auxílio deste potencial, é possível deduzir as soluções que geram os modos de propagação conhecidos como transverso magnético e transverso eletromagnético. No primeiro, existe campo magnético apenas na direção ortogonal àquela cuja propagação ocorre, daí o nome transverso magnético ou, abreviadamente, *TM*. No segundo modo, nem mesmo o campo elétrico está presente na direção de propagação: ambos os campos são perpendiculares, levando a batizar o modo como transverso eletromagnético, ou *TEM*.

2.3.1
Dedução do potencial vetorial elétrico

Considere um meio sem fontes de carga magnética ($\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$). Como $\nabla \cdot \nabla \times = 0$, pode-se definir o rotacional de $\vec{\mathbf{A}}$ da seguinte forma:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} \tag{2-39}$$

Substituindo 2-39 em 2-22 e considerando $\vec{\mathbf{M}}_i = \vec{\mathbf{0}}$ vem:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\nabla \times \jmath\omega \vec{\mathbf{A}} \tag{2-40}$$

A equação 2-40 pode ser reescrita como:

$$\nabla \times (\vec{\mathbf{E}} + \jmath\omega \vec{\mathbf{A}}) = \vec{\mathbf{0}} \tag{2-41}$$

Portanto, como $\nabla \times \nabla = \vec{\mathbf{0}}$, pode-se definir uma função potencial escalar elétrica $\mathfrak{g}_e$ tal que:

$$\vec{\mathbf{E}} + \jmath\omega \vec{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla \mathfrak{g}_e \tag{2-42}$$

Aplicando a identidade $\nabla \times \nabla \times = \nabla\nabla \cdot -\nabla^2$ na equação 2-23, vem:

$$-\nabla\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} + \nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\mu \vec{\mathbf{J}}_i + \mu(\sigma_e + \jmath\omega\epsilon')(\nabla \mathfrak{g}_e + \jmath\omega \vec{\mathbf{A}}) \tag{2-43}$$

Na equação 2-43, $\sigma_e \stackrel{\text{def}}{=} \omega\epsilon'' + \sigma_s$ é a condutividade efetiva do meio, cujo parâmetro ϵ'' aparece na definição de permissividade elétrica complexa: $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon' + \jmath\epsilon''$.

Neste momento, esta-se em posição de definir $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}$. Para simplificar a equação 2-43 ao máximo, deve-se optar pelo calibre:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\gamma^2}{\jmath\omega} \mathfrak{g}_e \tag{2-44}$$

onde $\gamma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \jmath\omega\mu(\sigma_e + \jmath\omega\epsilon')$ é a constante de propagação do meio. Isto permite simplificar a equação para o potencial elétrico, resultando, para meios homogêneos, em:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\mu \vec{\mathbf{J}}_i + \gamma^2 \vec{\mathbf{A}} \tag{2-45}$$

A equação 2-45, quando resolvida, determina o potencial vetorial elétrico dentro do meio. Com ela, chega-se à equação para o campo elétrico em função do potencial vetorial elétrico:

$$\vec{\mathbf{E}} \;=\; \frac{\jmath\omega}{\gamma^2} \nabla\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} - \jmath\omega \vec{\mathbf{A}} \tag{2-46}$$

2.4
Análise do problema para ondas harmônicas no tempo

2.4.1 Modos Tranverso-magnéticos (TM)

Considere a busca de modos TM no domínio da frequência com a existência de um segundo meio dielétrico para $z < -L$, de condutividade nula e permissividade ϵ_2, como mostrado na figura 2.1. Neste item, os parâmetros constituintes dos meios ficam definidos como na tabela 2.2.

ϵ_1'	Permissividade do meio 1 (parte real).
ϵ_1''	Permissividade do meio 1 (parte imaginária).
σ_s	Condutividade estática do meio 1.
σ_e	Condutividade efetiva do meio 1 ($\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_s + \omega\epsilon_1''$).
μ	Permeabilidades dos meios.
ϵ_2	Permissividade do meio 2.
β_2	Constante de propagação do meio 2 ($\beta_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} \omega^2\mu\epsilon_2$).
γ_1	Constante de propagação do meio 1 ($\gamma_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} \jmath\omega\mu(\sigma_e + \jmath\omega\epsilon_1')$).
L	Comprimento do dielétrico do meio 1 ao longo do eixo z.

Tabela 2.2: Definições dos parâmetros constituintes dos meios 1 e 2.

Com auxílio do potencial vetorial elétrico no domínio da frequência, pode-se resolver o problema de busca de modos TM em um guia coaxial através da especificação de $\vec{\mathbf{A}}$ como:

$$\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} A_z \tag{2-47}$$

o que leva às equações:

$$\nabla^2 A_z = \gamma_1^2 A_z \quad \text{meio1} \tag{2-48}$$

$$\nabla^2 A_z = -\beta_2^2 A_z \quad \text{meio2} \tag{2-49}$$

cujas soluções são dadas por:

$$A_z \stackrel{\text{def}}{=} f_1 g_1 h_1 \quad \text{meio1} \tag{2-50}$$

$$A_z \stackrel{\text{def}}{=} f_2 g_2 h_2 \quad \text{meio2} \tag{2-51}$$

$$f_1(\rho) = A_1^{(1)}\mathcal{J}_{m_1}(\beta_\rho^{(1)}\rho) + A_2^{(1)}\mathcal{Y}_{m1}(\beta_\rho^{(1)}\rho) \tag{2-52}$$

$$f_2(\rho) = A_1^{(2)}\mathcal{J}_{m_2}(\beta_\rho^{(2)}\rho) + A_2^{(2)}\mathcal{Y}_{m2}(\beta_\rho^{(2)}\rho) \tag{2-53}$$

$$g_1(\phi) = B_1^{(1)}\mathbf{cos}(m_1 \cdot \phi) + B_2^{(1)}\mathbf{sen}(m_1 \cdot \phi) \tag{2-54}$$

$$g_2(\phi) = B_1^{(2)}\mathbf{cos}(m_2\phi) + B_2^{(2)}\mathbf{sen}(m_2\phi) \tag{2-55}$$

$$h_1(z) = C_1^{(1)}\mathbf{cos}(\gamma_z^{(1)}z) + C_2^{(1)}\mathbf{sen}(\gamma_z^{(1)}z) \tag{2-56}$$

$$h_2(z) = C_1^{(2)}\mathfrak{e}^{\jmath\beta_z^{(2)}\cdot z} \tag{2-57}$$

$$\beta_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} {\beta_\rho^{(2)}}^2 + {\beta_z^{(2)}}^2 \tag{2-58}$$

$$\gamma_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} {\beta_\rho^{(1)}}^2 - {\gamma_z^{(1)}}^2 \tag{2-59}$$

Usando 2-46:

$$\vec{\mathbf{E}}_{\rho 1} = \frac{\jmath\omega}{\gamma_1^2} f_1' g_1 h_1' \tag{2-60}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\phi 1} = \frac{1}{\rho}\frac{\jmath\omega}{\gamma_1^2} f_1 g_1' h_1' \tag{2-61}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\rho 2} = -\frac{\jmath\omega}{\beta_1^2} f_2' g_2 h_2' \tag{2-62}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\phi 2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\jmath\omega}{\beta_1^2} f_2 g_2' h_2' \tag{2-63}$$

O próximo passo resume-se à aplicação das condições de contorno nos limites do dielétrico 1. Em $z = 0$, $\vec{\mathbf{E}}_{\rho 1} = \vec{\mathbf{E}}_{\phi 1} = 0$, ou:

$$h_1'(0) = 0 \Rightarrow C_2^{(1)} = 0 \tag{2-64}$$

Para satisfazer em $\rho = a$ e em $\rho = b$ a nulidade $\vec{\mathbf{E}}_{z1} = \vec{\mathbf{E}}_{\phi 1} = 0$, deve-se resolver a equação em $\beta_\rho^{(1)}$:

$$\mathcal{J}_{m1}(\beta_\rho^{(1)}a)\mathcal{Y}_{m1}(\beta_\rho^{(1)}b) - \mathcal{J}_{m1}(\beta_\rho^{(1)}b)\mathcal{Y}_{m1}(\beta_\rho^{(1)}a) = 0 \tag{2-65}$$

Satisfazendo as condições de contorno das componentes tangenciais do campo elétrico e do campo magnético, automaticamente as condições de contorno para as respectivas componentes normais já estão satisfeitas [15, p. 147]. Sendo assim, deve-se satisfazer a continuidade do campo elétrico tangencial e a condição de contorno referente ao campo magnético tangencial em $z = -L$, o que leva a:

$$m2 = m1 \stackrel{\text{def}}{=} m \tag{2-66}$$

$$\beta_\rho^{(1)} = \beta_\rho^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_\rho \tag{2-67}$$

$$C_1^{(1)}\frac{\gamma_z^{(1)}}{\gamma_1^2}\mathbf{sen}(\gamma_z^{(1)}L) = \jmath\frac{\beta_z^{(2)}}{\beta_2^2}C_1^{(2)}\mathfrak{e}^{-\jmath\beta_z^{(2)}L} \tag{2-68}$$

$$-C_1^{(1)}\mathbf{cos}(\gamma_z^{(1)}L) = -C_1^{(2)}\mathfrak{e}^{-\jmath\beta_z^{(2)}L} \tag{2-69}$$

Observe que o sistema de equações não pode ser resolvido para $C_1^{(1)}$ e $C_1^{(2)}$, mas apenas para uma das duas. Entretanto, todos os outros parâmetros dependem da frequência complexa ω e, por isso, pode-se rearranjar 2-68 e 2-69 da seguinte forma:

$$\frac{\gamma_z^{(1)}}{\gamma_1^2}\mathbf{tg}(\gamma_z^{(1)}L) = \jmath\frac{\beta_z^{(2)}}{\beta_2^2}, \quad \mathbf{cos}(\gamma_z^{(1)}L) \neq 0 \tag{2-70}$$

A solução da equação 2-70 nos dará as frequências complexas de ressonância, frequências as quais são permitidas a propagação no sistema. Vale lembrar que $\Im\omega = \omega'' \geq 0$, ou seja, deve-se descartar as soluções cuja parte imaginária é negativa.

Analisando 2-70, nota-se, então, 2 fenômenos interessantes:

- As reflexões em $z = -L$ causam um comportamento de ressonância semelhante ao de uma cavidade ressonante, criando, assim, frequências as quais são permitidas a propagação.

- O meio 2, embora sem perdas, ostenta uma onda induzida pelo meio 1 que decai com o tempo, o que pode ser confirmado com a existência de uma frequência complexa de oscilação. Neste caso, embora esteja-se assumindo um modelo sem fontes, por questões de causalidade e aplicabilidade do modelo entende-se que a onda é gerada no meio 1 e incide na interface de separação dos meios, por isso induzindo uma onda com perdas temporais no meio 2.

Vale lembrar que este item ostenta uma aproximação à realidade, assumindo que, para cada modo TM no meio 1, existe um modo TM de mesma ordem no meio 2. De fato, embora seja uma aproximação válida, o que acontece, na prática, é ligeiramente diferente: o meio 2 apresenta uma combinação infinita de modos de propagação, devido à discontinuidade em $z = -L$ dos parâmetros constituintes dos meios. Essa combinação permite existência de propagação em todas as frequências e não somente nas frequências de ressonância anteriormente mencionadas. Na realidade, para qualquer onda incidente no meio 2 oriunda do meio 1, existirá uma onda transmitida, independentemente de sua frequência de propagação, podendo esta ser, inclusive, puramente real. Esse fenômeno, contudo, é demasiado sofisticado e um estudo mais rigoroso incluiria a resolução exata e mais geral da equação de Helmoltz, cuja abordagem necessitaria de conhecimentos aprofundados de análise funcional aplicada a equações diferenciais parciais, cuja matéria está fora do escopo deste trabalho. Vale ressaltar, entretanto, que a dedução aqui apresentada é válida e será utilizada ainda nesta dissertação.

2.4.2
Modos Transverso-Eletromagnéticos (TEM)

Esses modos se caracterizam por terem componentes E_z e H_z nulas e não apresentarem variação em ϕ. Outra característica interessante é o fato de existirem para qualquer frequência real, o que lhes garante o apelido de modo banda larga. São obtidos através do potencial $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} A_z$ com a restrição $E_z = 0$, o que leva a:

$$h'' = \gamma_1^2 h \tag{2-71}$$

$$h(z) = C_1\mathfrak{e}^{\gamma_1 z} + C_2\mathfrak{e}^{-\gamma_1 z} \tag{2-72}$$

Usando 2-48 e 2-71, chega-se a equação de Laplace em duas dimensões, cuja solução independente de ϕ é dada por:

$$f(\rho) = A_1 \ln(\rho) + A_2 \tag{2-73}$$

Note que, neste modo, $E_\phi = E_z = 0$, ou seja, as condições de contorno que requerem campo elétrico tangencial nulo em $\rho = a$ e $\rho = b$ já estão satisfeitas. Para garantir $E_\rho = 0$ em $z = 0$, basta fazer $C_2 = C_1$, o que leva a:

$$E_\rho = \frac{\jmath\omega}{\gamma_1}\frac{A}{\rho}\mathbf{senh}(\gamma_1 z) \tag{2-74}$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu}\frac{A}{\rho}\mathbf{cosh}(\gamma_1 z) \tag{2-75}$$

$$A \in \mathbb{C} \tag{2-76}$$

$$\gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \jmath\omega\mu(\sigma_e + \jmath\omega\epsilon') \tag{2-77}$$

Para satisfazer a continuidade dos campos elétricos e magnéticos tangenciais em $z = -L$, deve-se encontrar a expressão para o modo TEM no meio 2, cujo processo é análogo (basta substituir γ_1^2 por $-\jmath\beta_2^2$). Entretanto, nota-se que é impossível satisfazer estas condições para ω real. Como busca-se um modo TEM com banda larga, isto é, existente para todo $\omega \in \mathbb{C}$, fica claro que o modo propagante no meio 2 não é unicamente o modo TEM. Na realidade, existe uma combinação de modos propagantes no meio 2, dentre eles o modo TEM. Uma solução mais rigorosa partiria da solução geral da equação 2-49 utilizando *funções de Green*, com a restrição de campos elétrico e magnético em $z = -L$ conhecidos e iguais aos respectivos no meio 1 em $z = -L$. Esta abordagem, entretanto, é demasiado formal e seus ganhos seriam razoavelmente pequenos ou acrescentariam pouco ao modelo atual, cujo foco é apenas uma primeira análise aproximada.

2.5 Modelagem como linha de transmissão com perdas

O gradiente do potencial escalar elétrico fora definido em 2-42. A partir desta definição, pode-se definir o potencial elétrico propriamente dito no meio 1:

$$\phi_e(P) = \phi_e(P_0) - \int_{P_0}^{P} (\vec{\mathbf{E}} + \jmath\omega\vec{\mathbf{A}}) \cdot \mathfrak{d}\vec{\mathbf{l}} \tag{2-78}$$

Onde P_0 é um ponto onde se conhece o potencial, conhecido como refência. Pode-se escolher $\phi_e(P_0) = 0$ para $z = 0$, por exemplo, mas esta discussão não irá se preocupar com isto. Mais importante do que o valor exato do potencial é, então, a *diferença de potencial*:

$$V(P_0, P) \overset{\text{def}}{=} \Delta\phi_e = -\int_{P_0}^{P} (\vec{\mathbf{E}} + \jmath\omega\vec{\mathbf{A}}) \cdot \partial\vec{\mathbf{l}} \tag{2-79}$$

Se fixarmos a coordenada ϕ e calcularmos a diferença de potencial entre os 2 condutores cilíndricos, na direção radial, seremos levados a definição final de tensão elétrica utilizada neste item:

$$V(z) = -\int_{a}^{b} \vec{\mathbf{E}}_\rho(\rho, \phi, z)\partial\rho \tag{2-80}$$

Utilizando os campos para o modo TEM (2-74), é possível reescrever a tensão elétrica na linha como:

$$V(z) = V_+ \mathbf{senh}(\gamma_1 z) \quad -L < z \leq 0 \tag{2-81}$$

$$V_+ \overset{\text{def}}{=} -\frac{\jmath\omega}{\gamma_1} A \ln(\frac{b}{a}) \tag{2-82}$$

Utilizando [15, cap. 5], encontra-se, para a corrente na linha:

$$I(z) = -\frac{V_+}{Z_0}\mathbf{cosh}(\gamma_1 z) \quad -L < z \leq 0 \tag{2-83}$$

Finalmente, a impedância em qualquer ponto da linha é dada pela razão entre tensão e corrente:

$$Z(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \mathbf{tgh}(\gamma_1 z) \quad -L < z \leq 0 \tag{2-84}$$

Com esta definição, torna-se possível modelar o problema em questão utilizando uma linha de transmissão com perdas de comprimento L. Em $z = 0$, existe um curto, devido à presença de condutor perfeito. Em $z = -L$, existe uma carga, de impedância Z_L, a qual modela a presença do meio 2. Com este modelo, torna-se simples analisar a influência de complicações, como a presença de receptores (antenas), a presença de geradores com perdas internas e a presença de elementos parasitas.

A partir da definição acima, é possível definir alguns parâmetros desta linha de transmissão. A impedância da linha é igual a impedância do meio e é dada pela razão entre o campo elétrico na direção ρ e o campo magnético na direção ϕ, propagantes em direção a carga [15, cap. 6]:

$$\begin{aligned} Z_0 &\overset{\text{def}}{=} \frac{\vec{\mathbf{E}}_\rho^-}{\vec{\mathbf{H}}_\phi^-} \\ &= -\mu\frac{\jmath\omega}{\gamma_1} \quad \text{Meio1} \end{aligned} \tag{2-85}$$

$$= \mu \frac{\omega}{\beta_2} \quad \text{Meio2} \tag{2-86}$$

Onde os expoentes "$-$"representam as ondas propagantes na direção da carga ($-\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}$) para o modo TEM.

Utilizando agora as impedâncias dos meios, é possível estimar a impedância da carga (meio 2) enxergada pelo meio 1 em $z = -L$ (impedância equivalente do meio 2):

$$Z_0^{(2)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(-L)}{1 - \Gamma(-L)} \tag{2-87}$$

Onde a notação $Z_0^{(2)}$ representa a impedância característica do meio 2.

Agora, pode-se utilizar toda a teoria de linhas de transmissão para antever comportamentos que seriam muito complexos se a abordagem escolhida fosse a resolução da equação de onda. Torna-se possível, então, calcular a impedância de entrada do meio, de modo a projetar um excitador casado a ele. É possível, também, projetar circuitos de recepção e transmissão de informação (sensores) e estimar a influência de estruturas condutoras no interior do poço, como packers.

Por fim, é valido salientar que, para frequências puramente reais, a impedância do meio 2 é puramente resistiva. Entretanto, na prática este fato não é estritamente correto: existem diversos modos evanescentes presentes na interface de separação dos meios, o que causa um acúmulo de energia em $z = -L$. Por isso, o meio 2 deve apresentar uma impedância com características reativas (parte imaginária não nula). Todavia, para frequências muito abaixo da frequência de corte dos modos TM e TE no meio 2, a parte reativa se torna muito pequena devido à forte atenuação sofrida por estes modos. Por isso, assume-se, neste trabalho, que a impedância característica do meio 2 é puramente real.

2.6 Modelagem através de simulação computacional

Para modelagens mais precisas, comumente utiliza-se resolução numérica da equação de onda. Para isto, alguns métodos estão disponíveis na literatura, sendo *FDTD* (finite-difference time-domain) um dos principais [16].

Em 1966, Kane Yee [17] publicou um modelo de discretização das equações diferenciais de Maxwell que era de fácil compreensão e implementação, mas que, devido ao alto custo computacional vigente até então e às limitações presentes em sua publicação original, não despertou instantaneamente interesse na comunidade científica. Porém, com o rápido decréscimo da relação custo por poder de processamento dos equipamentos digitais, o desenvolvimento de técnicas eficientes de truncagem do método FDTD e, atualmente, a disponibilização de softwares livres e abertos de alta qualidade [18] têm propiciado um grande interesse por pesquisas em diversos campos do conhecimento fazendo uso do algoritmo de Yee, sendo que na última década o número de publicações relacionadas ao método de diferenças finitas no domínio do tempo (método FDTD), cresceu e vem crescendo literalmente de forma exponencial.

No método FDTD, divide-se o meio em vários pequenos hexaedros, normalmente alinhados com os eixos cartesianos. No interior de cada hexaedro, assume-se uma interpolação para o campo elétrico (e para o campo magnético), de modo que apenas o conhecimento dos vetores nos vértices é necessário para definir o campo em todo o interior. Condições de contorno são aplicadas nas faces dos hexaedros vizinhos e, com isso, obtem-se um sistema de equações lineares que, quando resolvido, leva aos valores de campo elétrico em cada vértice de cada hexaedro. Finalmente, pode-se utilizar interpolação para determinar os valores aproximados dos campos para qualquer ponto do espaço. Este método é utilizado apenas no domínio do tempo. Para uma descrição mais detalhada, ver [17].

Este trabalho utiliza, também, um método de simulação alternativo para lidar com equações de Maxwell no domínio da frequência: o FIT (*Finite Integration Tecnique*) [19]. A idéia básica deste método jaz na aplicação das equações de Maxwell na forma integral em grids, formados a partir da subdivisão do espaço, e é amplamente utilizada em simuladores comerciais [20]. Esta seção, no entanto, não entrará num descrição formal do método, devido sua grande diversidade de detalhes o que causaria uma fuga de escopo.

A figura 2.1 mostra o modelo de poço adotado para análise deste problema. Perceba, fundamentalmente, que o modelo é formado por um cilindro condutor perfeito no centro, de raio a, representando o tubo de produção, com dois fechos: um deles, no topo, é um contudor perfeito; o outro, não. Outro cilindro, também condutor perfeito e concêntrico ao primeiro, de raio b, completa o esquema.

Pode-se ver, ainda na figura 2.1, o sistema de coordenadas cilíndrico, com os 3 eixos especificados.

Tipicamente, $L \gg b > a$. Portanto, surge um problema de discretização ou formação do grid devido à necessidade de se ter hexaedros que representem, fielmente, todas as dimensões envolvidas no modelo. Por isso, as células devem ter dimensões da ordem de a, mesmo que o comprimento de onda seja muito maior do que a. Isso gera, então, grids com milhões de blocos, o que eleva muito o custo computacional da simulação, tornando esta modelagem algo impraticável para se utilizar mediante métodos de otimização e análise com

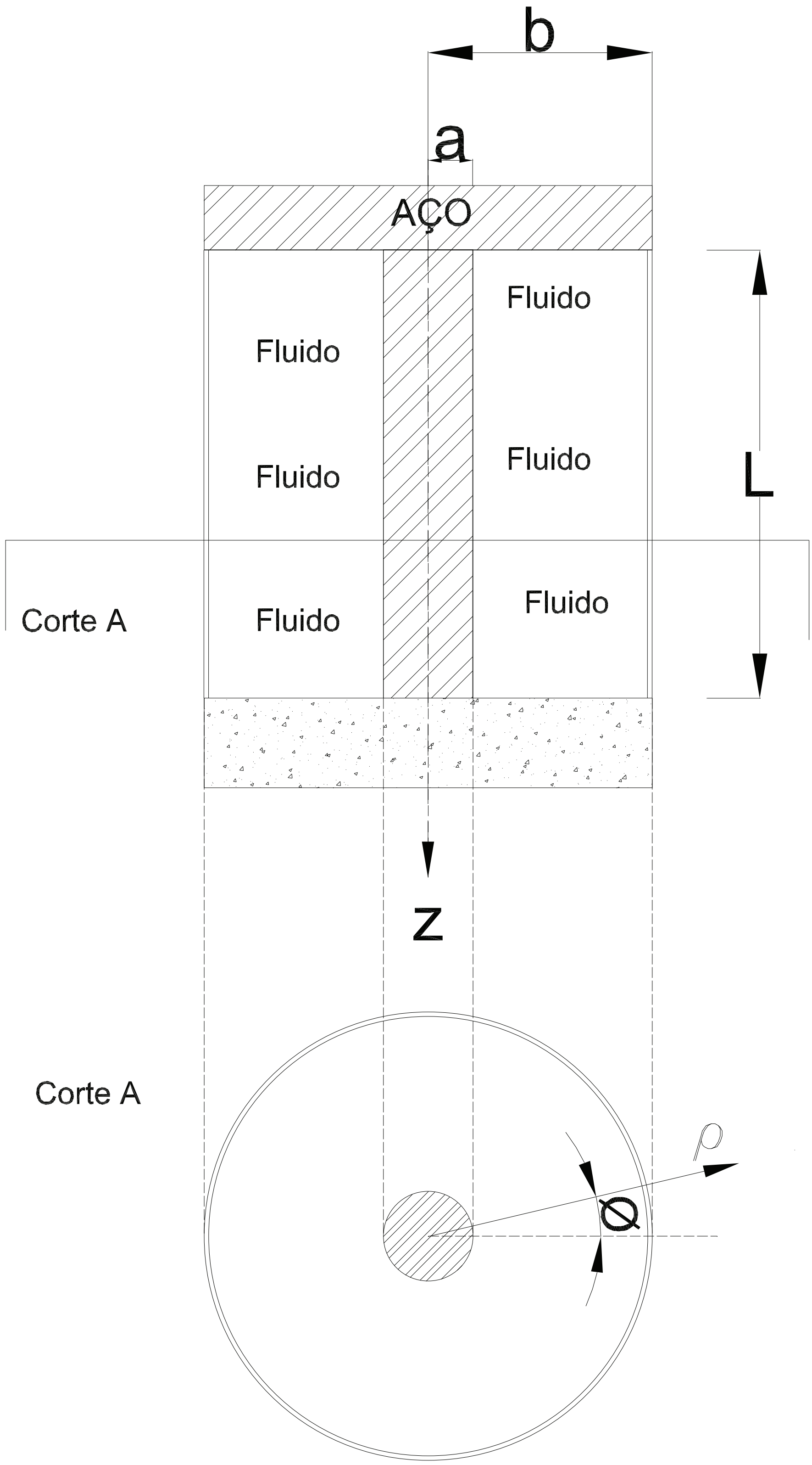

Figura 2.1: Modelo físico do poço adotado para simulação.

incertezas. Contudo, a simulação computacional pode abranger modelos mais precisos e, com isso, autoriza seu uso como forma de calibrar modelos analíticos, mais rápidos de simular e, após a calibragem, tão precisos quanto o modelo FDTD / FIT.