

5

FUNÇÃO DE TENSÃO DE WESTERGAARD GENERALIZADA APLICADA A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE 2D

No capítulo 4 desenvolveu-se a função de tensão de Westergaard generalizada aplicada a problemas de potencial. Também foi validado o uso desta função de tensão como solução fundamental no método híbrido dos elementos de contorno. Uma aplicação desta formulação na mecânica da fratura foi no cálculo do fator de intensidade de tensão K_I para trincas restritas a casos particulares.

Muitos problemas da engenharia são regidos pelas equações de Laplace e Poisson (problemas de potencial), mas, a maioria dos problemas da mecânica da fratura são regidas pela teoria de elasticidade.

Neste capítulo, desenvolve-se a formulação da função de tensão de Westergaard como solução fundamental no método híbrido dos elementos de contorno para problemas de elasticidade (estado plano de deformações). Os conceitos básicos dados no item anterior são também válidos para problemas de elasticidade, mas com a sua respectiva complexidade.

5.1. Deslocamentos e tensões para uma trinca genérica

A função de tensão complexa de Westergaard é baseada em uma trinca de abertura elíptica submetida a tensões remotas unitárias, esta função permite calcular os deslocamentos e as tensões em um ponto (x, y) do plano.

Para uma trinca com rotação θ_1 e forma da abertura distinta à elipsoidal, a função de tensão complexa de Westergaard na sua forma original deixa de ser válida, sendo necessária uma nova expressão da função de tensão, e uma generalização das relações para o cálculo dos deslocamentos e as tensões no ponto (x, y) , tanto para o modo I quanto para o modo II de trincamento.

5.1.1. Modo I de trincamento

Dada uma função de tensão $\Phi_1(Z_1)$ que representa uma trinca com comprimento a_1 e rotação θ_1 em relação ao eixo x do sistema global de coordenadas, o vetor de deslocamentos $\mathbf{u}'_{1(0)}$ pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{u}'_{1(0)} = \begin{Bmatrix} u'_{1(0)} \\ v'_{1(0)} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{Bmatrix} (1-2\nu)\text{Re}\Phi_1 - \frac{y_1}{a_1}\text{Im}\Phi'_1 \\ 2(1-\nu)\text{Im}\Phi_1 - \frac{y_1}{a_1}\text{Re}\Phi'_1 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

e o vetor de tensões $\sigma'_{1(0)}$ pela expressão:

$$\sigma'_{1(0)} = \begin{Bmatrix} \sigma'_{xx1(0)} \\ \sigma'_{yy1(0)} \\ \tau'_{xy1(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{a_1}\text{Re}\Phi'_1 - \frac{y_1}{a_1^2}\text{Im}\Phi''_1 \\ \frac{1}{a_1}\text{Re}\Phi'_1 + \frac{y_1}{a_1^2}\text{Im}\Phi''_1 \\ -\frac{y_1}{a_1^2}\text{Re}\Phi''_1 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

onde $\Phi'_1(Z_1)$ e $\Phi''_1(Z_1)$ são a primeira e segunda derivada de Φ_1 em relação a Z_1 ($\Phi'_1 = \partial\Phi_1/\partial Z_1$ e $\Phi''_1 = \partial^2\Phi_1/\partial Z_1^2$), respectivamente. O subscrito $()_{1(0)}$ se refere à direção θ_1 , mas com deslocamentos e tensões orientados localmente (Figura 5.1).

A matriz \mathbf{T}_1 que transforma, coordenadas do sistema global de coordenadas (x, y) ao sistema local de coordenadas (x_1, y_1) é dada na seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \text{ ou } \mathbf{x}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{x} \quad (5.3)$$

então, as expressões dos deslocamentos \mathbf{u}'_1 orientados segundo o sistema global de coordenadas (Figura 5.1) são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u'_{1(0)} \\ v'_{1(0)} \end{Bmatrix}, \text{ ou } \mathbf{u}'_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{u}'_{1(0)} \quad (5.4)$$

As tensões σ_1^I orientadas segundo o sistema global de coordenadas são relacionadas com o vetor $\sigma_{1(0)}^I$ [eq. (5.2)], mediante uma matriz \mathbf{R}_1 segundo a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx_1}^I \\ \sigma_{yy_1}^I \\ \tau_{xy_1}^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \sin^2 \theta_1 & -\sin 2\theta_1 \\ \sin^2 \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 / 2 & -\sin 2\theta_1 / 2 & \cos 2\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx_{1(0)}}^I \\ \sigma_{yy_{1(0)}}^I \\ \tau_{xy_{1(0)}}^I \end{Bmatrix}, \text{ ou } \sigma_1^I = \mathbf{R}_1 \sigma_{1(0)}^I \quad (5.5)$$

Substituindo as eq. (5.1) e (5.2) nas eq. (5.4) e (5.5), para os deslocamentos \mathbf{u}_1^I e as tensões σ_1^I tem-se:

$$\begin{aligned} u_1^I &= \frac{1+\nu}{E} \left[(1-2\nu) \cos \theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1 - 2(1-\nu) \sin \theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1 + \frac{y_1}{a_1} (\sin \theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1' - \cos \theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1') \right] \\ v_1^I &= \frac{1+\nu}{E} \left[(1-2\nu) \sin \theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1 + 2(1-\nu) \cos \theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1 - \frac{y_1}{a_1} (\cos \theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1' - \sin \theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1') \right] \\ \sigma_{xx_1}^I &= \frac{1}{a_1} \operatorname{Re} \Phi_1' + \frac{y_1}{a_1^2} (\sin 2\theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1'' - \cos 2\theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1'') \\ \sigma_{yy_1}^I &= \frac{1}{a_1} \operatorname{Re} \Phi_1' - \frac{y_1}{a_1^2} (\sin 2\theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1'' - \cos 2\theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1'') \\ \tau_{xy_1}^I &= -\frac{y_1}{a_1^2} (\cos 2\theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1'' + \sin 2\theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1'') \end{aligned} \quad (5.6)$$

Os deslocamentos e as tensões para o modo I de trincamento na direção tanto do sistema local como do sistema global de coordenadas são esquematizados na Figura 5.1.

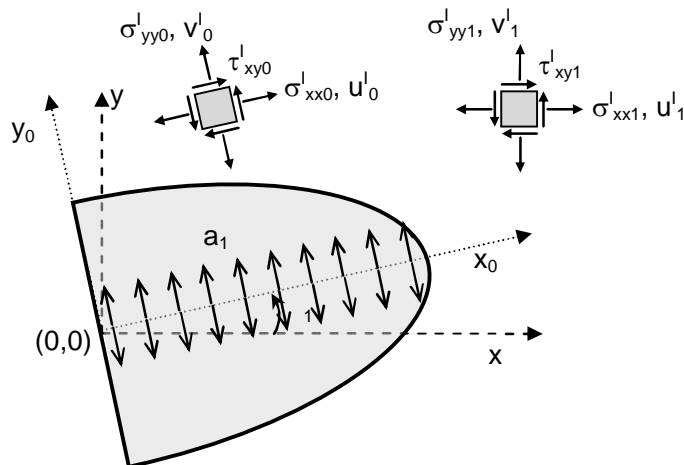


Figura 5.1 - Deslocamentos e tensões para o modo I de trincamento, segundo sistema local e global de coordenadas

5.1.2. Modo II de trincamento

Os vetores de deslocamentos e tensões para o modo II de trincamento são dados por:

$$\mathbf{u}_{1(0)}'' = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \begin{array}{l} 2(1-\nu) \operatorname{Im} \Phi_1 + \frac{y_1}{a_1} \operatorname{Re} \Phi_1' \\ -(1-2\nu) \operatorname{Re} \Phi_1 - \frac{y_1}{a_1} \operatorname{Im} \Phi_1' \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

$$\sigma_{1(0)}'' = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{a_1} \operatorname{Im} \Phi_1' + \frac{y_1}{a_1^2} \operatorname{Re} \Phi_1'' \\ -\frac{y_1}{a_1^2} \operatorname{Re} \Phi_1'' \\ \frac{1}{a_1} \operatorname{Re} \Phi_1' - \frac{y_1}{a_1^2} \operatorname{Im} \Phi_1'' \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

onde o subscrito $()_{1(0)}$ se refere à direção θ_1 , mas com deslocamentos e tensões orientadas localmente. Em forma análoga à desenvolvida para o modo I, as expressões dos deslocamentos \mathbf{u}_1'' e as tensões σ_1'' são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'' \\ v_1'' \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{array}{l} u_{1(0)}'' \\ v_{1(0)}'' \end{array} \right\}, \text{ ou } \mathbf{u}_1'' = \mathbf{T}_1^T \mathbf{u}_{1(0)}'' \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx_1}'' \\ \sigma_{yy_1}'' \\ \tau_{xy_1}'' \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \sin^2 \theta_1 & -\sin 2\theta_1 \\ \sin^2 \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 / 2 & -\sin 2\theta_1 / 2 & \cos 2\theta_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx_{1(0)}}'' \\ \sigma_{yy_{1(0)}}'' \\ \tau_{xy_{1(0)}}'' \end{array} \right\}, \text{ ou } \sigma_1'' = \mathbf{R}_1 \sigma_{1(0)}'' \quad (5.10)$$

Substituindo as eq. (5.7), (5.8) nas eq. (5.9) e (5.10), para os deslocamentos \mathbf{u}_1'' e as tensões σ_1'' tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_1'' &= \frac{1+\nu}{E} \left[(1-2\nu) \sin \theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1 + 2(1-\nu) \cos \theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1 + \frac{y_1}{a_1} (\cos \theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1' + \sin \theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1') \right] \\
 v_1'' &= \frac{1+\nu}{E} \left[-(1-2\nu) \cos \theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1 + 2(1-\nu) \sin \theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1 + \frac{y_1}{a_1} (\sin \theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1' - \cos \theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1') \right] \\
 \sigma_{xx_1}'' &= \frac{1}{a_1} \left[-\sin 2\theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1' + (1 + \cos 2\theta_1) \operatorname{Im} \Phi_1' \right] + \frac{y_1}{a_1^2} (\cos 2\theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1'' + \sin 2\theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1'') \\
 \sigma_{yy_1}'' &= \frac{1}{a_1} \left[\sin 2\theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1' + (1 - \cos 2\theta_1) \operatorname{Im} \Phi_1' \right] - \frac{y_1}{a_1^2} (\cos 2\theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1'' + \sin 2\theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1'') \\
 \tau_{xy_1}'' &= \frac{1}{a_1} \left[\cos 2\theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1' + \sin 2\theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1' \right] + \frac{y_1}{a_1^2} (\sin 2\theta_1 \operatorname{Re} \Phi_1'' - \cos 2\theta_1 \operatorname{Im} \Phi_1'')
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Os deslocamentos e as tensões para o modo II de trincamento na direção tanto do sistema local como do sistema global de coordenadas são esquematizados na Figura 5.2.

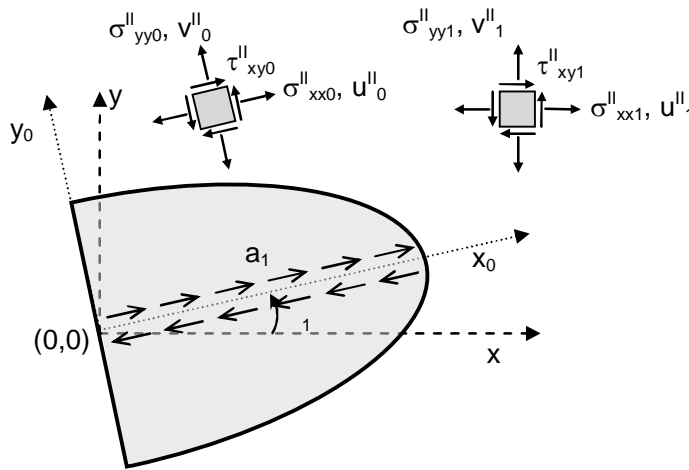


Figura 5.2 - Deslocamentos e tensões para o modo II de trincamento, segundo sistema local e global de coordenadas

Os deslocamentos e as tensões considerando a superposição dos modos I e II de trincamento podem ser reescritos em forma compacta, da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_{1(0)}' & u_{1(0)}'' \\ v_{1(0)}' & v_{1(0)}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1' \\ p_1'' \end{Bmatrix}
 \tag{5.12}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx_1} \\ \sigma_{yy_1} \\ \tau_{xy_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \sin^2 \theta_1 & -\sin 2\theta_1 \\ \sin^2 \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 / 2 & -\sin 2\theta_1 / 2 & \cos 2\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx_{1(0)}}^I & \sigma_{xx_{1(0)}}^{II} \\ \sigma_{yy_{1(0)}}^I & \sigma_{yy_{1(0)}}^{II} \\ \tau_{xy_{1(0)}}^I & \tau_{xy_{1(0)}}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^I \\ p_1^{II} \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

ou em notação matricial:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{u}_{1(0)} \mathbf{p}_1 \quad (5.14)$$

$$\sigma_1 = \mathbf{R}_1 \sigma_{1(0)} \mathbf{p}_1 \quad (5.15)$$

onde $\mathbf{p}_1 = \begin{Bmatrix} p_1^I \\ p_1^{II} \end{Bmatrix}$ é um vetor de parâmetros de força que cotem as contribuições

do modo I e do modo II, respectivamente, atuando simultaneamente na trinca 1.

5.2.

Deslocamentos para a ação combinada de duas trincas

O desenvolvimento do item 5.1, foi feito para uma trinca de comprimento a_1 e rotação θ_1 . A função de tensão que se propõe consiste na superposição de efeitos de duas trincas semi-elípticas, com comprimentos a_1 e a_2 , e rotações θ_1 e θ_2 , respectivamente. Os deslocamentos produto de esta superposição são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1^I & u_1^{II} \\ v_1^I & v_1^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^I \\ p_1^{II} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2^I & u_2^{II} \\ v_2^I & v_2^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2^I \\ p_2^{II} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1(0)}^I & u_{1(0)}^{II} \\ v_{1(0)}^I & v_{1(0)}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^I \\ p_1^{II} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2(0)}^I & u_{2(0)}^{II} \\ v_{2(0)}^I & v_{2(0)}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2^I \\ p_2^{II} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.3.

Estabelecimento da função de tensão para uma trinca semi-elíptica

A função de tensão obtida no item 4.2 [eq. (4.6)], para uma trinca semi-elíptica de comprimento a_1 e rotação θ_1 pode ser usada para problemas de elasticidade. Por motivo somente de ordem adicionamos o subscrito $()_1$ tanto à função de tensão Φ como à variável complexa Z , tal como e mostrada na seguinte expressão:

$$\Phi_1 = -\frac{Z_1}{4} - \frac{1}{2\pi} \left(1 - \sqrt{1 - Z_1^2} \ln \left(-\frac{1 + \sqrt{1 - Z_1^2}}{Z_1} \right) \right) \quad (5.17)$$

Onde Z_1 é dada por $Z_1 = \frac{r}{a_1} e^{i(\theta - \theta_1)}$.

A derivada da função de tensão Φ_1 em relação a Z_1 , $\Phi'_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial Z_1}$, é dada

por:

$$\Phi'_1 = -\frac{1}{2\pi} \left(Z_1 \ln \left(-\frac{1 + \sqrt{1 - Z_1^2}}{Z_1} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - Z_1^2}} + \frac{1}{Z_1} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.18)$$

A segunda derivada $\Phi''_1 = \frac{\partial \Phi'_1}{\partial Z_1}$ conduz à seguinte expressão:

$$\Phi''_1 = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(-\frac{1 + \sqrt{1 - Z_1^2}}{Z_1} \right) (1 - Z_1^2)^{-3/2} - \frac{1}{2\pi Z_1^2 (-1 + Z_1^2)} \quad (5.19)$$

Note-se que tanto a primeira quanto a segunda derivada de Φ_1 estão em relação a Z_1 , a diferença de problemas de potencial que foi em relação a z_1 , sendo que $Z_1 = z_1 T_1$ [eq. (4.5)].

5.4. Considerações das singularidades e descontinuidades

A eq. (5.17) representada pelos primeiros termos (lead term) de funções polinomiais expandidas em torno à origem ($Z_1 = 0$) resulta em:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \left(-1 + \ln(2) - \ln(Z_1) + i\pi \operatorname{csgn} \left(\frac{i(1 + \sqrt{1 - Z_1^2})}{Z_1} \right) \right) \quad (5.20)$$

As partes, real e imaginária da eq. (5.20), após serem simplificadas resultam em:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Re(\Phi_1) = \frac{-\ln(r) - 1 + \ln(2a_1)}{2\pi} \quad (5.21)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Im(\Phi_1) = -\frac{\bar{\theta}_1 + \operatorname{csgn}(i \sin(\bar{\theta}_1) - \cos(\bar{\theta}_1))\pi}{2\pi} \quad (5.22)$$

Onde, $\bar{\theta}_1 = \theta - \theta_1$, para uma trinca com rotação θ_1 .

Os primeiros termos da expansão da eq. (5.18) em funções polinomiais ($Z_1 = 0$) são dados por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi'_1 = -\frac{1}{2\pi Z_1} - \frac{1}{4} \quad (5.23)$$

As partes, real e imaginária da eq. (5.23), após ser simplificadas resultam em:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Re(\Phi')_1 = -\frac{\cos(\bar{\theta}_1) a_1}{2\pi r} - \frac{1}{4} \quad (5.24)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Im(\Phi')_1 = \frac{\sin(\bar{\theta}_1) a_1}{2\pi r} \quad (5.25)$$

O leadterm+ da segunda derivada da função de tensão [eq. (5.19)] em torno à origem ($Z_1 = 0$) é dado por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi''_1 = \frac{1}{2\pi Z_1^2} \quad (5.26)$$

As partes, real e imaginária da eq. (5.26), são dados por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Re(\Phi''_1) = \frac{\cos(2\bar{\theta}_1) a_1^2}{2\pi r^2} \quad (5.27)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Im(\Phi''_1) = -\frac{\sin(2\bar{\theta}_1) a_1^2}{2\pi r^2} \quad (5.28)$$

5.5. Superposição de efeitos de duas trincas semi-elípticas

Quando $r \rightarrow 0$, os termos da matriz de deslocamentos $\mathbf{u}_{1(0)} = \begin{bmatrix} u'_{1(0)} & u''_{1(0)} \\ v'_{1(0)} & v''_{1(0)} \end{bmatrix}$

da eq. (5.16) são dados pelas seguintes expressões:

$$u'_{1(0)} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left((1-2\nu)(-\ln(r) - 1 + \ln(2a_1)) - \sin(\bar{\theta}_1)^2 \right) \quad (5.29)$$

$$v'_{1(0)} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left(-2(1-\nu) \left(\bar{\theta}_1 + \text{csgn}(i \sin(\bar{\theta}_1) - \cos(\bar{\theta}_1)) \pi \right) + \sin(\bar{\theta}_1) \cos(\bar{\theta}_1) \right) \quad (5.30)$$

$$u''_{1(0)} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left(-2(1-\nu) \left(\bar{\theta}_1 + \text{csgn}(i \sin(\bar{\theta}_1) - \cos(\bar{\theta}_1)) \pi \right) - \sin(\bar{\theta}_1) \cos(\bar{\theta}_1) \right) \quad (5.31)$$

$$v''_{1(0)} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left((1-2\nu)(\ln(r) + 1 - \ln(2a_1)) - \sin(\bar{\theta}_1)^2 \right) \quad (5.32)$$

Para a segunda trinca semi-elíptica, as componentes da matriz de deslocamentos $\mathbf{u}_{2(0)} = \begin{bmatrix} u_{2(0)}^I & u_{2(0)}^{II} \\ v_{2(0)}^I & v_{2(0)}^{II} \end{bmatrix}$ quando $r \rightarrow 0$ tem as mesmas expressões das eq. (5.29) a (5.32), substituindo-se a_2 e $\bar{\theta}_2$ por a_1 e $\bar{\theta}_1$, respectivamente.

A superposição de efeitos das duas trincas para quando $r \rightarrow 0$ deve garantir que os deslocamentos u e v sejam finitos. A singularidade dos elementos das matrizes $\mathbf{u}_{1(0)}$ e $\mathbf{u}_{2(0)}$ na eq. (5.16) está no termo $\ln(r)$, do qual, tem que ser cumprida a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^I \\ p_1^{II} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2^I \\ p_2^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

O sistema de equações dado na eq. (5.33) apresenta quatro incógnitas. Uma simples solução para este problema é eleger o vetor de parâmetros de força \mathbf{p} como incógnita primária do problema e calculando os seguintes valores:

$$\begin{Bmatrix} p_1^I \\ p_1^{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} p_2^I \\ p_2^{II} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \\ -\cos \theta_2 & \sin \theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

A eq. (5.34) pode ser expressa em notação matricial como:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{p}^*, \quad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{M}_2 \mathbf{p}^* \quad (5.35)$$

Na Figura 5.3 é esquematizada a interpretação intuitiva dos elementos dos vetores \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 e \mathbf{p}^* na superposição de efeitos de duas trincas.

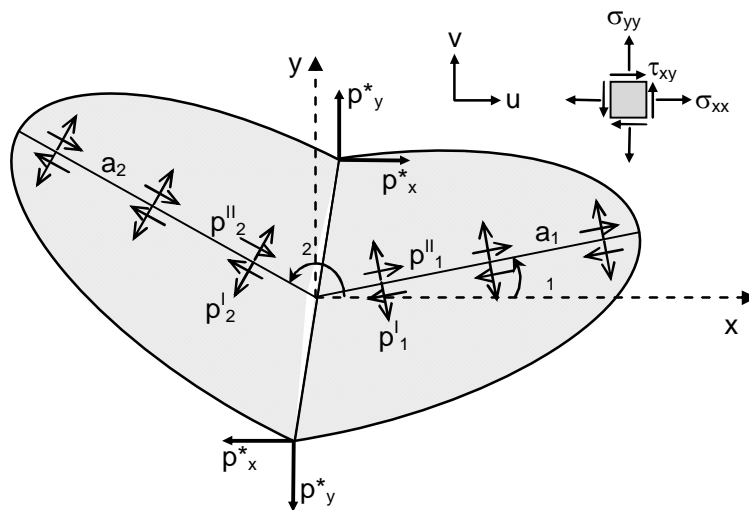


Figura 5.3 - Superposição de efeitos de duas trincas semi-elípticas

5.5.1. Deslocamentos

Das eq. (5.14) e (5.35) a expressão para os deslocamentos em um ponto (x, y) é dada por:

$$\mathbf{u} = \left(\mathbf{T}_1^T \mathbf{u}_{1(0)} \mathbf{M}_1 - \mathbf{T}_2^T \mathbf{u}_{2(0)} \mathbf{M}_2 \right) \mathbf{p}^* \quad (5.36)$$

A partir das eq. (5.1), (5.7), (5.12) e (5.34) a primeira e segunda coluna de $\mathbf{T}_1^T \mathbf{u}_{1(0)} \mathbf{M}_1$ são respectivamente dadas por:

$$\frac{1-\nu}{E} \left\{ \begin{array}{l} -2(1-\nu)\Im(\Phi_1) - \frac{y}{a_1} \sin(2\theta_1)\Im(\Phi'_1) - \frac{y}{a_1} \cos(2\theta)\Re(\Phi'_1) \\ (1-2\nu)\Re(\Phi_1) + \frac{y}{a_1} \cos(2\theta)\Im(\Phi'_1) - \frac{y}{a_1} \sin(2\theta_1)\Re(\Phi'_1) \end{array} \right\} \quad (5.37)$$

$$\frac{1-\nu}{E} \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu)\Re(\Phi_1) - \frac{y}{a_1} \cos(2\theta)\Im(\Phi'_1) + \frac{y}{a_1} \sin(2\theta_1)\Re(\Phi'_1) \\ 2(1-\nu)\Im(\Phi_1) - \frac{y}{a_1} \sin(2\theta_1)\Im(\Phi'_1) - \frac{y}{a_1} \cos(2\theta)\Re(\Phi'_1) \end{array} \right\} \quad (5.38)$$

As colunas de $\mathbf{T}_2^T \mathbf{u}_{2(0)} \mathbf{M}_2$ são dadas pelas mesmas expressões das eq. (5.37) e (5.38), substituindo o subscrito 2 pelo subscrito 1.

5.5.2. Tensões

Das eq. (5.15) e (5.35) a expressão para as tensões em um ponto (x, y) são dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{R}_1 \boldsymbol{\sigma}_{1(0)} \mathbf{M}_1 - \mathbf{R}_2 \boldsymbol{\sigma}_{2(0)} \mathbf{M}_2 \right) \mathbf{p}^* \quad (5.39)$$

A partir das eq. (5.2), (5.8), (5.13) e (5.34) a primeira e segunda coluna de $\mathbf{R}_1 \boldsymbol{\sigma}_{1(0)} \mathbf{M}_1$, são respectivamente dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2 \cos^3 \theta_1 \Im(\Phi'_1)}{a_1} + \frac{(3 \sin \theta_1 + \sin 3\theta_1) \Re(\Phi'_1)}{2a_1} - \frac{y_1}{a_1^2} (\sin 3\theta_1 \Im(\Phi''_1) + \cos 3\theta_1 \Re(\Phi''_1)) \\ \frac{2 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_1 \Im(\Phi'_1)}{a_1} - \frac{\sin \theta_1 \cos 2\theta_1 \Re(\Phi'_1)}{a_1} + \frac{y_1}{a_1^2} (\sin 3\theta_1 \Im(\Phi''_1) + \cos 3\theta_1 \Re(\Phi''_1)) \\ \frac{2 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_1 \Im(\Phi'_1)}{a_1} - \frac{\cos \theta_1 \cos 2\theta_1 \Re(\Phi'_1)}{a_1} + \frac{y_1}{a_1^2} (\cos 3\theta_1 \Im(\Phi''_1) - \sin 3\theta_1 \Re(\Phi''_1)) \end{array} \right\} \quad (5.40)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{2 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_1 \Im(\Phi_1')}{a_1} + \frac{\cos \theta_1 \cos 2\theta_1 \Re(\Phi_1')}{a_1} - \frac{y_1}{a_1^2} (\cos 3\theta_1 \Im(\Phi_1'') - \sin 3\theta_1 \Re(\Phi_1'')) \right\} \\ & \left\{ \frac{2 \sin^3 \theta_1 \Im(\Phi_1')}{a_1} + \frac{(3 \cos \theta_1 - \cos 3\theta_1) \Re(\Phi_1')}{2a_1} + \frac{y_1}{a_1^2} (\cos 3\theta_1 \Im(\Phi_1'') - \sin 3\theta_1 \Re(\Phi_1'')) \right\} \\ & \left\{ \frac{2 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_1 \Im(\Phi_1')}{a_1} + \frac{\sin \theta_1 \cos 2\theta_1 \Re(\Phi_1')}{a_1} - \frac{y_1}{a_1^2} (\sin 3\theta_1 \Im(\Phi_1'') + \cos 3\theta_1 \Re(\Phi_1'')) \right\} \end{aligned} \right\} (5.41)$$

As colunas de $\mathbf{R}_2 \sigma_{2(0)} \mathbf{M}_2$ são dadas pelas mesmas expressões das eq. (5.40) e (5.41) substituindo o subscrito 2 pelo subscrito 1.

5.6. Exemplos

Para mostrar a validade da formulação da função de tensão de Westergaard generalizada para problemas de elasticidade, apresentasse como exemplo uma trinca reta de comprimento $2a = 2$ em um plano infinito, submetida a um carregamento unitário distribuído, segundo o mostrado na Figura 5.4.

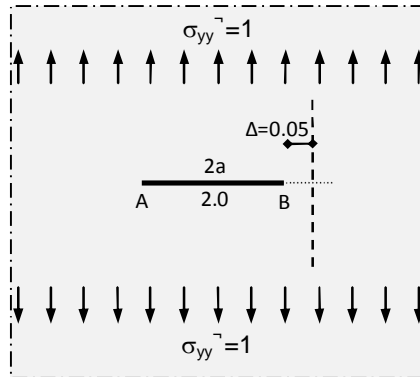


Figura 5.4 - Trinca reta de comprimento $2a = 2$ submetida a um carregamento remoto unitário

A idéia deste exemplo é representar a trinca pela superposição de duas trincas semi-elípticas, calcular as tensões ao longo de pontos no domínio e comparar com os resultados da função de tensão complexa de Westergaard na sua forma original.

A trinca da Figura 5.4 está submetida ao modo I de carregamento, então o valor \mathbf{p}^* das eq. (5.36) e (5.39) está dado por:

$$\mathbf{p}^* = \begin{Bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

cuja interpretação física é esquematizada na Figura 5.5.

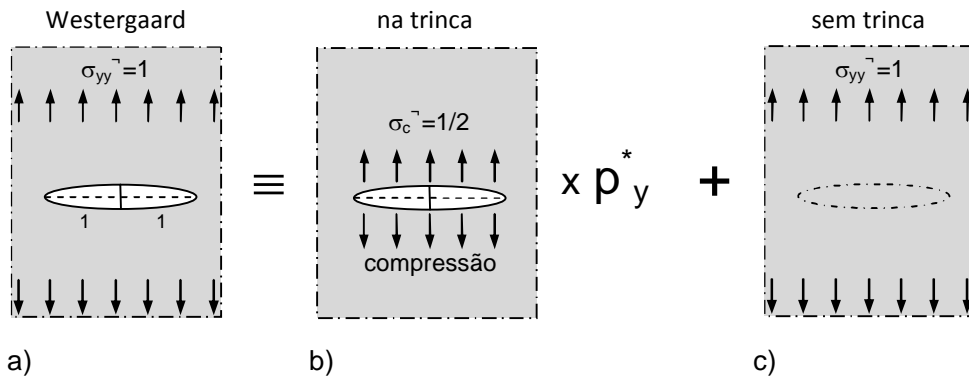


Figura 5.5 - Interpretação física do parâmetro p_y^*

A interpretação do parâmetro p_y^* neste exemplo fica simples. Veja-se que a Figura 5.5a representa o problema tal qual é proposto, a tensão $\sigma_{yy(x,y)}$ para um ponto (x,y) é dada pela eq. (2.15) considerando a solução fundamental da eq. (2.17).

A Figura 5.5b mostra uma modificação do problema proposto, a tensão σ_{yy} em um ponto (x,y) é calculada pela eq. (2.15) considerando a função de tensão da eq. (2.33) para o caso particular de $p_y^* = 2$. Veja-se que a tensão $\sigma_{yy(x,y)}$ tende a 0 quando o ponto (x,y) está afastado da trinca, para compensar esta modificação é necessária adicionar o valor de $\sigma_{yy}^\infty = 1$ que corresponde à solução particular do problema (Figura 5.5c).

A Figura 5.6 fornece resultados para as tensões $\sigma_{yy(x,y)}$ ao longo da linha tracejada da Figura 5.4 usando-se a função de tensão de Westergaard generalizada.

Os resultados das tensões σ_{yy} da Figura 5.6, obtidas como caso particular da formulação proposta, coincide com os obtidos pela função de tensão complexa de Westergaard, validando assim, a formulação para o exemplo da Figura 5.4.

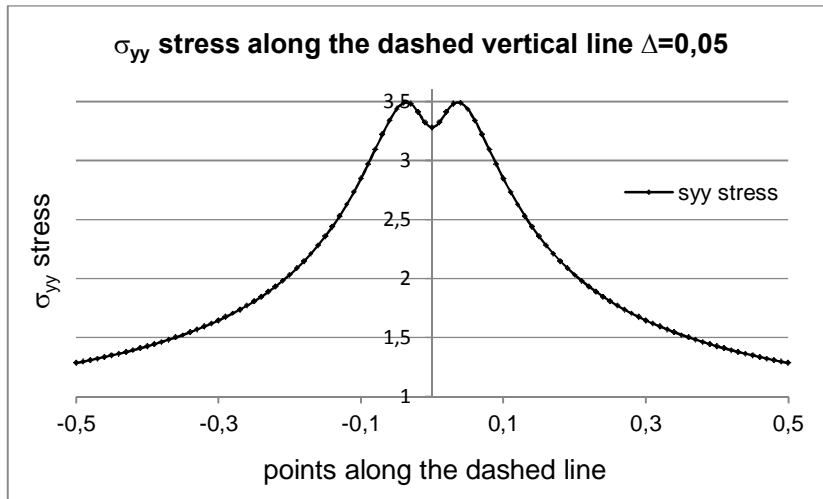


Figura 5.6 - Tensões σ_{yy} ao longo da linha tracejada da Figura 5.4

Como segundo exemplo propõe-se o problema de um contínuo elástico infinito (com coeficiente de Poisson 0,30), submetido a uma força horizontal de intensidade unitária, aplicada no ponto F , de coordenadas $(-10,25)$ e de solução analítica conhecida. O problema consiste em gerar o campo de tensões ao longo de um contorno criado (Nós 1-170 da estrutura na Figura 5.7). Neste exemplo a estrutura é composta por 170 nós e segmentos lineares de igual comprimento entre os nós das esquinas indicadas. Conhecido o campo de tensões ao longo de este contorno o problema se reduz a um de domínio finito, onde se quer calcular as tensões ao longo do segmento AB , cuja solução analítica é conhecida e pode ser tomado para comparação de resultados.

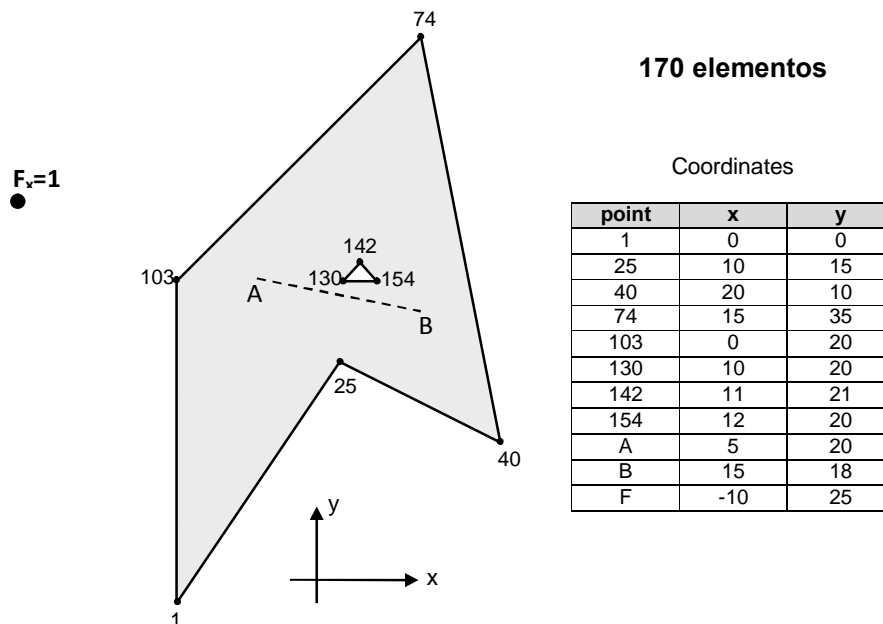


Figura 5.7 . Estrutura para avaliação das tensões em pontos internos, devido a uma força unitária aplicada no ponto F

O gráfico da Figura 5.8 mostra resultados das tensões analíticas e numéricas obtidas ao longo de 51 pontos contidos no segmento AB (os valores de σ_{xx} são multiplicados por -1). A precisão dos resultados obtidos é ligeiramente menor á obtida usando a solução fundamental de Kelvin. Dado que a influência dos contornos (boundary layer effect) é maior no caso que a solução fundamental é definida em termos da função de tensão de Westergaard generalizada.

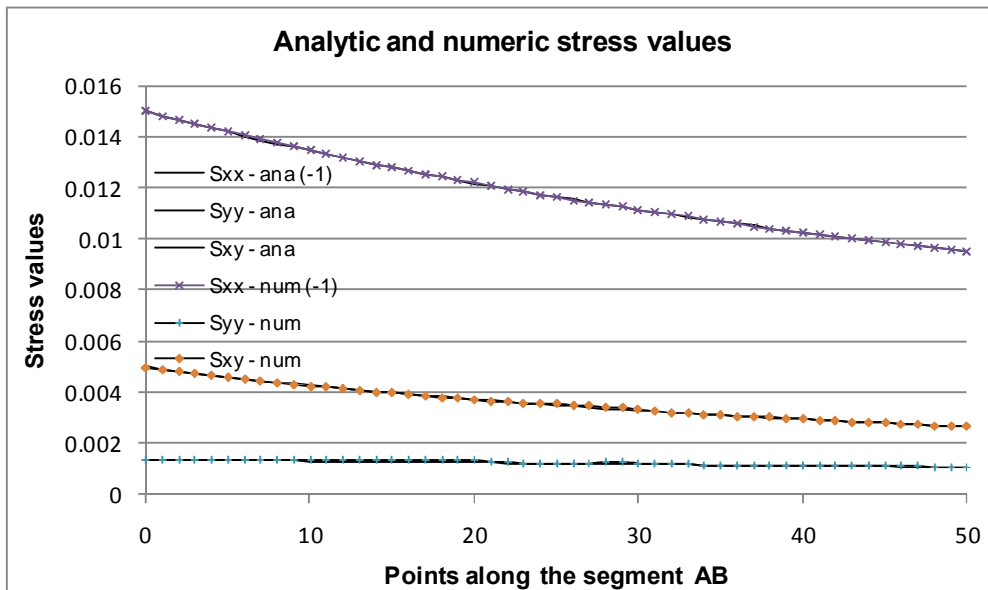


Figura 5.8 - Tensões analíticas e numéricas ao longo do segmento de linha AB, para uma força horizontal no ponto (-10.25)