

4

FUNÇÃO DE TENSÃO DE WESTERGAARD GENERALIZADA APLICADA A PROBLEMAS DE POTENCIAL 2D

A Função de Tensão Complexa de Westergaard supõe uma trinca com abertura elíptica submetida a carregamento biaxial remoto. Após algumas modificações, esta função pode ser usada como solução fundamental no método híbrido dos elementos de contorno (Dumont e Lopes, 2003). O comportamento local da função de Westergaard permite o cálculo dos fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} para problemas de elasticidade em estruturas contendo trincas internas retas e curvas. A grande vantagem do uso desta solução fundamental é o baixo esforço computacional exigido no cálculo dos fatores de intensidade de tensão. A idéia principal da formulação consiste em aproximar uma trinca de geometria qualquer por uma sucessão de elementos retos de trinca. Estes elementos devem se superpor para garantir que todas as regiões da trinca sofram o efeito de abertura nas suas faces.

Para a análise de contornos e trincas com certas particularidades tais como câmbios bruscos de direção, trincas externas e trincas com bifurcação é necessária uma generalização da função de tensão complexa de Westergaard, que permita uma boa representação do contorno da trinca.

Neste trabalho, apresenta-se uma função de tensão de Westergaard generalizada, baseada em uma trinca com abertura semi-elíptica, com eixo de comprimento a_1 e rotação θ_1 em relação à abscissa x do sistema cartesiano de coordenadas. A solução fundamental a ser usada, no método híbrido dos elementos de contorno consiste na superposição de efeitos de duas trincas semi-elípticas concêntricas de eixos a_1 e a_2 , e rotações θ_1 e θ_2 , respectivamente, que para o caso particular de comprimentos iguais ($a_1 = a_2$) e sentidos opostos ($\theta_2 = \theta_1 \pm \pi$) a solução fundamental vem a ser exatamente igual à desenvolvida por Dumont e Lopes (2003). Um caso ainda mais particular é da função de tensão complexa de Westergaard na sua forma original onde o eixo da trinca elíptica coincide com o eixo x , isto é $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$.

A presente formulação é apresentada em forma sistemática, de tal modo que o procedimento possa ser usado para qualquer outra abertura da trinca (retangular, triangular, parabólica, etc.).

Neste capítulo será tratada a aplicação da formulação a problemas de potencial, que em princípio, permita a solução de problemas convencionais do método híbrido dos elementos de contorno, tais como o cálculo numérico de potenciais e fluxos em pontos do domínio onde também é verificada a convergência do método.

Posteriormente, é visada a aplicação da formulação em estruturas com trincas internas retas e curvas no meio infinito e trincas em um domínio finito. Para alguns casos particulares, calcula-se o fator de intensidade de tensão K_I obtido a partir dos parâmetros p_i^* , da Integral J e de aproximações polinomiais.

4.1. Potencial e fluxos para uma trinca genérica

A função de tensão complexa de Westergaard e qualquer função de tensão formulada a partir da abertura de uma trinca podem ser usadas para descrever o potencial u e os fluxos $q_i = -ku_{,i}$ gerados em um domínio pela presença da trinca, mediante a seguinte expressão.

$$\begin{aligned} u &= \Im(\Phi)/k \equiv -i(\Phi - \bar{\Phi})/2k \\ q_x &= -ku_{,x} = -\Im(\Phi') \equiv i(\Phi' - \bar{\Phi}')/2 \\ q_y &= -ku_{,y} = -\Re(\Phi') \equiv -i(\Phi' + \bar{\Phi}')/2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Onde, $\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ é a derivada parcial da função Φ em relação a z , $\Im(\)$ e

$\Re(\)$ são as partes imaginária e real da função, respectivamente, e a função $\bar{\Phi}$ representa a conjugada complexa da função Φ . A eq. (4.1) é válida somente se Φ é analítica (holomórfica para funções complexas), isto é, se Φ é infinitamente derivável em um determinado ponto, tem um único valor e é igual à expansão da série de Taylor em torno a este ponto. Por exemplo, para a função de tensão de Westergaard da eq. (2.16), esta condição é cumprida em todo o continuo exceto para o ponto $z = \pm a$.

4.2. Estabelecimento da função de tensão para uma trinca semi-elíptica

O procedimento a seguir pode ser usado para a formulação da função de tensão de uma trinca com qualquer forma de abertura, desde que a geometria da abertura seja dada por uma função f . Neste trabalho, utiliza-se uma função de tensão baseada em uma trinca semi-elíptica, cuja geometria é descrita pela função da eq. (4.2):

$$f = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad (4.2)$$

Para o caso particular de $a=1$ e para valores de x entre 0 e 1 ($x=[0,1]$) a eq. (4.2) toma a forma semi-elíptica representada na Figura 4.1.

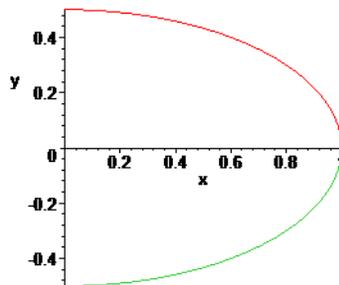


Figura 4.1 - Abertura semi-elíptica para uma trinca com comprimento $a = 1$

A seguinte função:

$$\Phi_0 = -\frac{\int_0^a \frac{f}{z-x} dx}{2\pi} \quad (4.3)$$

permite obter a função de tensão para uma trinca com abertura dada pela função f (Tada et al, 1993) da eq. (4.2), onde $z = x + iy$ é uma função complexa referida ao sistema de coordenadas cartesianas.

A seguir, obtém-se uma função de tensão para o caso mais geral em que a trinca de comprimento a_1 tem uma rotação θ_1 em relação ao eixo x do sistema global de coordenadas, tal como mostrado na Figura 4.2.

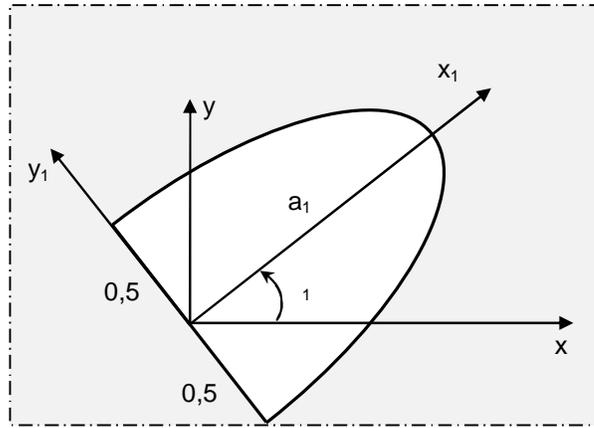


Figura 4.2 - Abertura semi-elíptica para uma trinca com comprimento a_1 e rotação θ_1

A eq. (4.3) deixa de ser válida para a trinca da Figura 4.2, sendo necessária a introdução de uma constante complexa T , que considere tanto o comprimento a_1 da trinca como a rotação θ_1 . Pode-se então, substituir z da eq. (4.3) por Z , obtendo-se a seguinte equação:

$$\Phi = -\frac{\int_0^a \frac{f}{Z-x} dx}{2\pi} \quad (4.4)$$

onde Z é uma função que considera o comprimento a_1 e a rotação θ_1 a través das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} Z &= zT \\ T &= \frac{1}{a_1} (\cos \theta_1 - i \sin \theta_1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

A resolução da eq. (4.4), levando em conta as eq. (4.2) e (4.5) conduz à seguinte função de tensão:

$$\Phi = -\frac{Z}{4} - \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1-Z^2} \ln \left(-\frac{1 + \sqrt{1-Z^2}}{Z} \right)}{\pi}. \quad (4.6)$$

Derivando-se a expressão da eq. (4.6) em relação a z , obtêm-se a derivada da função de tensão:

$$\Phi' = -\frac{T}{2\pi} \left[\frac{Z \ln \left(-\frac{1 + \sqrt{1-Z^2}}{Z} \right)}{\sqrt{1-Z^2}} + \frac{1}{Z} + \frac{\pi}{2} \right] \quad (4.7)$$

onde $\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$.

Para a implementação numérica usando a função de tensão da eq. (4.6) e sua derivada [eq. (4.7)], como solução fundamental no método híbrido dos elementos de contorno é necessária uma análise das funções $\Im(\Phi)$, $\Re(\Phi)$, $\Im(\Phi')$ e $\Re(\Phi')$ usadas no cálculo do potencial e fluxos da eq. (4.1). A representação gráfica destas funções para o caso particular de $a_1 = 1$ e $\theta_1 = 0$ é mostrada na Tabela 2.1.

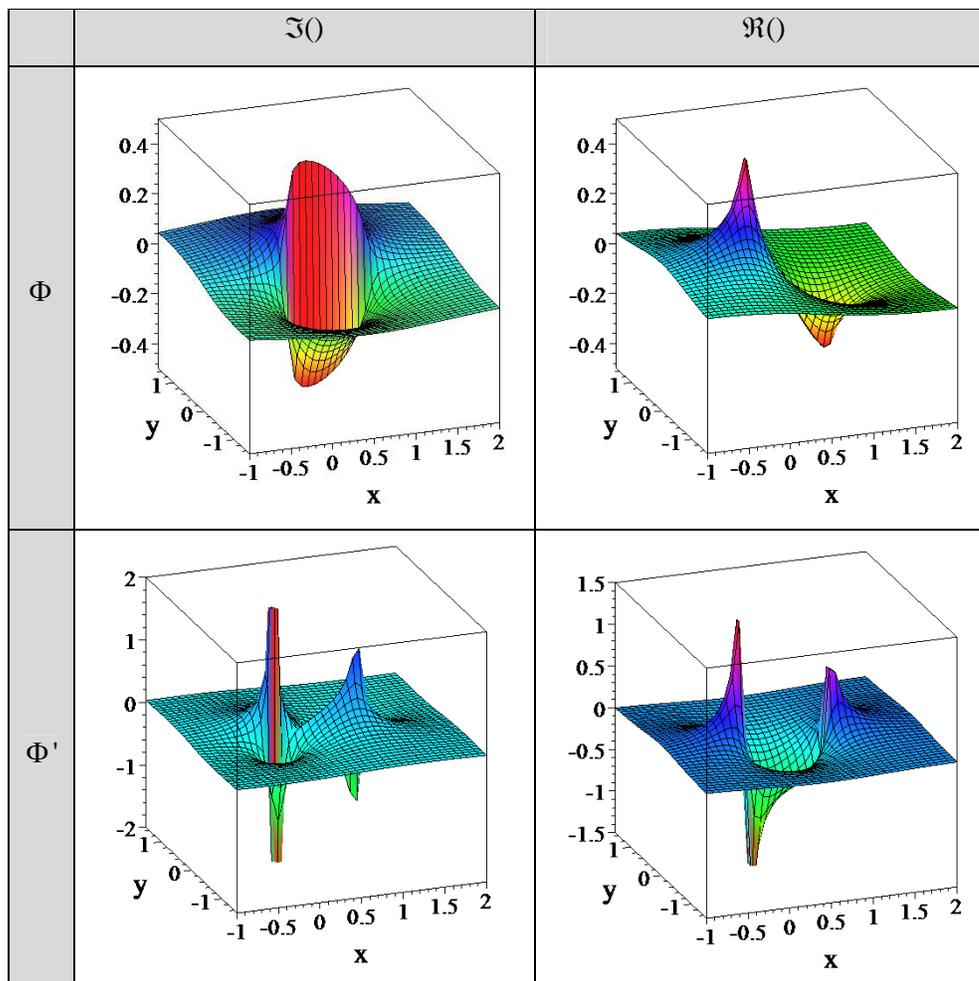


Tabela 4.1 - Representação gráfica das funções $\Im(\Phi)$, $\Re(\Phi)$, $\Im(\Phi')$ e $\Re(\Phi')$ para o caso particular de $Z = x + iy$

Nos gráficos da Tabela 4.1, vê-se a descontinuidade das funções $\Im(\Phi)$ e $\Im(\Phi')$ no eixo da trinca e a existência de singularidades das funções, $\Im(\Phi')$ e $\Re(\Phi')$ na origem e na extremidade da trinca, as quais precisam ser levadas em conta para a implementação numérica.

4.3.

Considerações das singularidades e descontinuidades

Neste item faz-se uma análise das singularidades e descontinuidades do potencial e dos fluxos em pontos próximos à origem e à ponta da trinca semi-elíptica.

4.3.1.

Expansão da função de tensão Φ em torno à origem

A eq. (4.6) representada por funções polinomiais expandidas em torno à origem ($Z = 0$) resulta em:

$$\begin{aligned} & \left(+\frac{1}{2\pi} - \frac{Z^2}{4\pi} - \frac{Z^4}{16\pi} - \frac{Z^6}{32\pi} - \frac{5Z^8}{256\pi} \right) \ln(2) + \left(-\frac{1}{2\pi} + \frac{Z^2}{4\pi} + \frac{Z^4}{16\pi} + \frac{Z^6}{32\pi} + \frac{5Z^8}{256\pi} \right) \ln(Z) + \\ & \left(+\frac{i}{2} - \frac{iZ^2}{4} - \frac{iZ^4}{16} - \frac{iZ^6}{32} - \frac{5iZ^8}{256} \right) c \operatorname{sgn} \left(\frac{(1 + \sqrt{1 - Z^2})i}{Z} \right) - \\ & \frac{1}{2\pi} - \frac{Z}{4} - \frac{Z^2}{8\pi} + \frac{Z^4}{64\pi} + \frac{5Z^6}{384\pi} + \frac{59Z^8}{6144\pi} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Levando ao limite quando $Z \rightarrow 0$, a expressão da eq. (4.8) resulta em:

$$\lim_{Z \rightarrow 0} (\Phi) = \frac{1}{2\pi} \ln(2) - \frac{1}{2\pi} \ln(Z) + \frac{I}{2} c \operatorname{sgn} \left(\frac{(1 + \sqrt{1 - Z^2})i}{Z} \right) - \frac{1}{2\pi} \quad (4.9)$$

Analisando a eq. (4.9), observa-se que em torno à origem se tem a singularidade logarítmica $\ln(Z)$. A função complexa Z pode ser corretamente representada no sistema polar de coordenadas por:

$$Z = \frac{r}{a_1} e^{i(\theta - \theta_1)} \quad (4.10)$$

levando em conta esta última relação o termo singular da eq. (4.9) resulta em:

$$\ln(Z) = \ln(r) - \ln(a_1) + i(\theta - \theta_1). \quad (4.11)$$

Então a singularidade de Φ em torno à origem está no termo $\frac{-\ln(r)}{2\pi}$, que é uma função real que independe da direção. Pelo qual esta singularidade não afeta o valor do potencial u , dado que $u = \Im(\Phi)$.

A função $c\text{sgn}(\cdot)$ da eq. (4.8) é usada para determinar em qual meio-plano (esquerda ou direita) a expressão do valor complexo (\cdot) está. A função $c\text{sgn}(\cdot)$ é definida por:

$$\begin{aligned} c\text{sgn}(\cdot) &= 1 \quad \text{se } \Re(\cdot) > 0 \text{ ou } \Re(\cdot) = 0 \text{ e } \Im(\cdot) > 0 \\ c\text{sgn}(\cdot) &= -1 \quad \text{se } \Re(\cdot) < 0 \text{ ou } \Re(\cdot) = 0 \text{ e } \Im(\cdot) < 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para o termo $c\text{sgn}\left(\frac{(1 + \sqrt{1 - Z^2})i}{Z}\right)$ da eq. (4.8), após considerar, $\bar{r}_1 = r/a_1$

e $\bar{\theta}_1 = \theta - \theta_1$ na eq. (4.10), obtém-se $c\text{sgn}\left[\frac{(1 + \sqrt{1 - \bar{r}_1^2} e^{2i\bar{\theta}_1})i}{\bar{r}_1 e^{i\bar{\theta}_1}}\right]$, cuja gráfica em

função de \bar{r}_1 e $\bar{\theta}_1$ é apresentada na Figura 4.3:

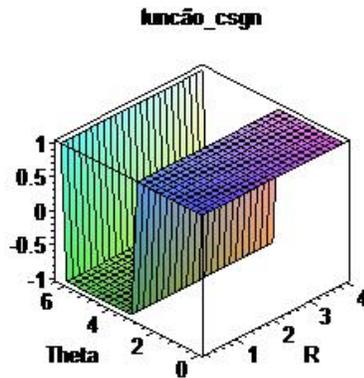


Figura 4.3 - Função $c\text{sgn}(\cdot)$ da expansão em séries de Φ em torno à origem

Para um valor de $r \rightarrow 0$, a função $c\text{sgn}(\cdot)$ da eq. (4.8) toma os seguintes valores:

$$\begin{aligned} c\text{sgn}(\cdot) &= 1 \quad \text{for } \theta - \theta_1 = 0 \\ c\text{sgn}(\cdot) &= -1 \quad \text{for } 0 < \theta - \theta_1 \leq \pi \\ c\text{sgn}(\cdot) &= 1 \quad \text{for } \pi < \theta - \theta_1 \leq 2\pi \end{aligned} \quad (4.13)$$

Substituindo a eq. (4.13) em (4.9) e (4.1) obtemos:

$$\lim_{r \rightarrow 0}(u) = \lim_{r \rightarrow 0}(\Im(\Phi)) = \begin{cases} \frac{\pi - \theta + \theta_1}{2\pi} & \text{para } \theta - \theta_1 = 0 \text{ e } \pi < \theta - \theta_1 \leq 2\pi \\ \frac{-\pi - \theta + \theta_1}{2\pi} & \text{para } \theta - \theta_1 \leq \pi \end{cases} \quad (4.14)$$

Tendo em conta a superposição de efeitos de duas trincas semi-elípticas concêntricas de comprimentos a_1 e a_2 , e de rotações θ_1 e θ_2 , respectivamente, o efeito combinado do campo potencial é dado por:

$$u_{12} = u_1 - u_2 \quad (4.15)$$

Da substituição da eq. (4.14) na eq. (4.15) se obtêm as seguintes relações:

$$\lim_{r \rightarrow 0} u_{12} = \lim_{r \rightarrow 0} [\Im(\Phi_1 - \Phi_2)] = \begin{cases} \frac{-\pi - \theta + \theta_1}{2\pi} - \frac{-\pi - \theta + \theta_2}{2\pi} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } 0 \leq \theta_1 < \theta_2 \\ \frac{\pi - \theta + \theta_1}{2\pi} - \frac{-\pi - \theta + \theta_2}{2\pi} = 1 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \frac{\pi - \theta + \theta_1}{2\pi} - \frac{\pi - \theta + \theta_2}{2\pi} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } \theta_2 < \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (4.16)$$

ou expresso de outra forma:

$$\lim_{r \rightarrow 0} u_{12} = \lim_{r \rightarrow 0} [\Im(\Phi_1 - \Phi_2)] = \begin{cases} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{para um ponto fora do } \Omega \\ 1 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{para um ponto dentro do } \Omega \end{cases} \quad (4.17)$$

No caso que seja requerida a integral da função $\Re(\Phi)$ em torno à origem, uma integração numérica imprópria de $\ln(r)$ tem que ser considerada.

De fato, o valor de $u = \Im(\phi)$ na ponta da trinca é zero. Assim, expansões em séries indicam a presença de \sqrt{r} multiplicando um termo polinomial, onde r é a distância desde a ponta da trinca. Isto tem que ser levado em conta se alguma integração numérica estivesse sendo calculada em torno a algum contorno que inicia o termina na ponta da trinca.

4.3.2.

Expansão da derivada da função de tensão Φ' em torno à origem

A eq. (4.7) representada por funções polinomiais expandidas em torno à origem ($Z = 0$) resulta em:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{TZ}{2\pi} - \frac{TZ^3}{4\pi} - \frac{3TZ^5}{16\pi} - \frac{5TZ^7}{32\pi} - \frac{35TZ^9}{256\pi} \right) \ln(2) + \left(\frac{TZ}{2\pi} + \frac{TZ^3}{4\pi} + \frac{3TZ^5}{16\pi} + \frac{5TZ^7}{32\pi} \right) \ln(Z) + \\ & \frac{35TZ^9}{256\pi} \ln(Z) + \left(-\frac{iTZ}{2} - \frac{iTZ^3}{4} - \frac{3iTZ^5}{16} - \frac{5iTZ^7}{32} - \frac{35iTZ^9}{256} \right) c \operatorname{sgn} \left[\frac{(1 + \sqrt{1 - Z^2})i}{Z} \right] - \\ & \frac{T}{2\pi Z} - \frac{T}{4} + \frac{TZ^3}{8\pi} + \frac{7TZ^5}{64\pi} + \frac{37TZ^7}{384\pi} + \frac{533TZ^9}{6144\pi} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Levando ao limite quando $Z \rightarrow 0$, da eq. (4.18) se tem:

$$\lim_{r \rightarrow 0}(\Phi') = -\frac{T}{2\pi Z} - \frac{T}{4} \quad (4.19)$$

Para efeitos práticos expressamos a constante complexa T em coordenadas polares, sendo:

$$T = \frac{1}{a_1} e^{-i\theta_1} \quad (4.20)$$

Substituindo a eq. (4.20) e (4.10) na eq. (4.19) se obtêm:

$$\lim_{r \rightarrow 0}(\Phi') = -\frac{e^{-i\theta_1}}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{e^{-i\theta_1}}{4a_1}. \quad (4.21)$$

Por tanto, o termo que contém a parte singular $1/r$ da trinca semi-elíptica independe do comprimento a_1 e da direção θ_1 . Então, a superposição de efeitos de duas trincas semi-elípticas concêntricas de comprimentos a_1 e a_2 , de rotações θ_1 e θ_2 , respectivamente, conduz aos seguintes gradientes:

$$\begin{aligned} q_{x12} &= -\Im(\Phi'_1 - \Phi'_2) \\ q_{y12} &= -\Re(\Phi'_1 - \Phi'_2). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tomando em conta a eq. (4.21) e (4.22), se tem:

$$\lim_{r \rightarrow 0}(\Phi'_1 - \Phi'_2) = -\frac{e^{-i\theta_1}}{4a_1} + \frac{e^{-i\theta_2}}{4a_2} \quad (4.23)$$

As projeções do vetor unitário normal externo $\bar{\eta}$ ao longo da direção θ_1 são: $\eta_x = \sin(\theta_1)$ e $\eta_y = -\cos(\theta_1)$. Então, a gradiente normal ao longo das faces de cada uma das trincas está dada por:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0}(q_\eta) &= \lim_{r \rightarrow 0}(q_x \eta_x + q_y \eta_y) = -\frac{1}{4a_1} + \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{4a_2}, \text{ no eixo da primeira trinca} \\ \lim_{r \rightarrow 0}(q_\eta) &= \lim_{r \rightarrow 0}(q_x \eta_x + q_y \eta_y) = -\frac{1}{4a_2} + \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{4a_1}, \text{ no eixo da segunda trinca} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Observe-se na eq. (4.24) que há um salto no valor de q_η na transição da primeira trinca para a segunda trinca semi-elíptica.

Se $\theta_2 - \theta_1 = \pm\pi$, caso no qual o contorno na união das duas trincas é suave, os limites da eq. (4.24) resultam em:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0}(q_\eta) &= -\frac{1}{4a_1} - \frac{1}{4a_2}, \text{ no eixo da primeira trinca} \\ \lim_{r \rightarrow 0}(q_\eta) &= -\frac{1}{4a_2} - \frac{1}{4a_1}, \text{ no eixo da segunda trinca} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Se $a_1 = a_2$, q_η é constante ao longo das faces das duas trincas semi-elípticas, e assim, a integração de q_η ao longo das faces de toda a trinca resulta em uma fonte unitária.

No desenvolvimento deste item, observou-se, que as singularidades em torno à origem são eliminadas com a superposição de duas trincas semi-elípticas concêntricas.

4.3.3.

Expansão da derivada da função de tensão Φ' em torno à ponta

A eq. (4.7) representada por funções polinomiais expandidas em torno à ponta da trinca ($Z = 1$) resulta em:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}T}{4\sqrt{Y}} - \frac{3\sqrt{2}T\sqrt{Y}}{16} + \frac{5\sqrt{2}TY^{(3/2)}}{128} - \frac{7\sqrt{2}TY^{(5/2)}}{512} + \frac{45\sqrt{2}TY^{(7/2)}}{8192} - \frac{77\sqrt{2}TY^{(9/2)}}{32768} \right) \times c \operatorname{sgn} \left[\frac{\left(1 + \sqrt{1 - (Y+1)^2}\right) i}{Y+1} \right] - \frac{(4 + \pi)T}{4\pi} + \frac{TY}{3\pi} - \frac{2TY^2}{5\pi} + \frac{46TY^3}{105\pi} - \frac{29TY^4}{63\pi} + \frac{547TY^5}{1155\pi} \quad (4.26)$$

onde $Y = Z - 1$. Para $Y \rightarrow 0$ temos a seguinte expressão:

$$\lim_{Y \rightarrow 0} (\Phi') = -\frac{\sqrt{2}T}{4\sqrt{Y}} c \operatorname{sgn} \left[\frac{\left(1 + \sqrt{1 - (Y+1)^2}\right) i}{Y+1} \right] - \frac{(4 + \pi)T}{4\pi} \quad (4.27)$$

onde a função $c \operatorname{sgn}(\)$ toma o valor constante de -1 ou 1 , pelo qual a eq. (4.27) contém uma singularidade do tipo $1/\sqrt{r}$, a qual tem que ser tomada em conta como uma integral numérica imprópria.

4.4.

Formulação para um domínio finito

A seguir, utiliza-se a função de tensão de Westergaard generalizada, apresentada nos capítulos anteriores como solução fundamental no método híbrido dos elementos de contorno na solução de problemas bidimensionais de potencial.

Neste item desenvolve-se a aplicação da formulação para um domínio finito Ω , com um contorno Γ .

Esta formulação propõe que um elemento de trinca formado pela superposição das aberturas de duas trincas semi-elípticas concêntricas seja a

solução fundamental. A Figura 4.4 fornece o exemplo de esta abertura para o elemento 3 do contorno da Figura 4.5.

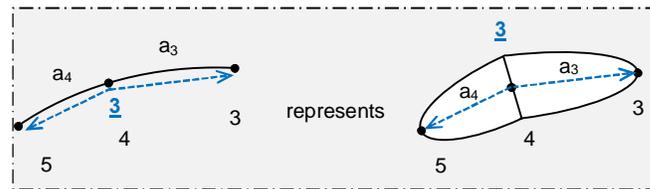


Figura 4.4 - Abertura de um elemento de trinca formado por duas trinças semi-elípticas

Deste modo uma trinca genérica pode ser aproximada por uma sucessão de elementos da solução fundamental. Estes elementos devem se superpor para garantir que todas as regiões da trinca a ser modelada sofram o efeito de abertura de suas faces. A Figura 4.5 ilustra esta superposição, onde doze elementos de trinca são utilizados para discretizar o contorno Γ . Estes elementos são numerados de 1 a 12.

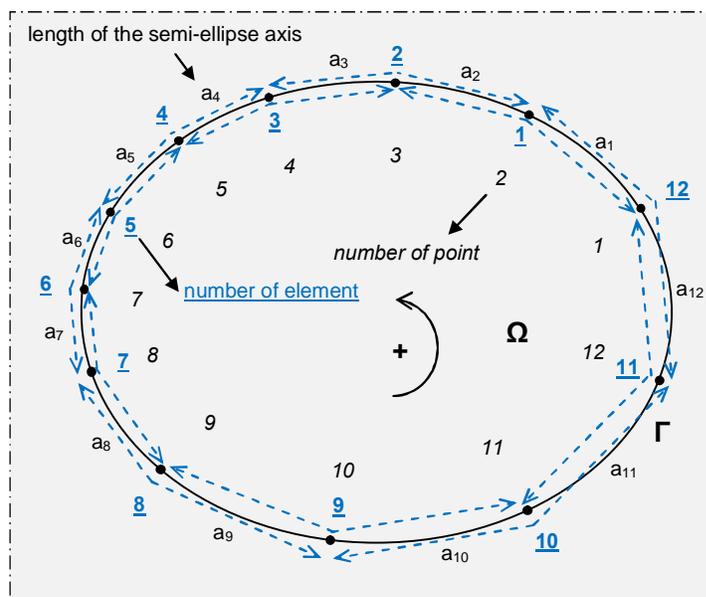


Figura 4.5 - Exemplo da discretização de um contorno Γ com 12 elementos de trinca

O sentido da numeração dos elementos segue a mesma convenção dos elementos de contorno convencional, isto é, o sentido anti-horário (positivo) para contornos que encerram um domínio Ω e sentido horário (negativo) para furos ou cavidades.

Para checar a aplicabilidade e a consistência da formulação que usa a função de tensão de Westergaard generalizada como solução fundamental no método híbrido dos elementos de contorno, analisa-se o problema de um

contorno submetido a uma fonte externa F tal como é apresentado no exemplo do item 4.4.1.

4.4.1. Exemplos

Uma fonte de potencial logarítmico $\Phi = \ln \sqrt{(x+10)^2 + (y-25)^2} / 2\pi$ é aplicada em um ponto F do contínuo infinito Ω^∞ , como é ilustrado na Figura 4.6. O potencial e os gradientes gerados por esta fonte são aplicados ao longo do contorno irregular da figura, criando o problema (para a equação de Laplace) com solução analítica conhecida. A esquina entrante (nó 17) e o furo interno da figura geram algumas dificuldades topológicas na simulação numérica.

O contorno Γ da Figura 4.6 tem 104 nós e segmentos lineares, os quais são proporcionalmente distribuídos entre os nós das esquinas indicadas, note-se que o sentido da numeração do contorno externo é anti-horário e do furo é horário.

Uma série de 51 pontos ao longo do segmento de linha \overline{AB} são usados para representar alguns resultados numéricos do agora domínio finito Ω .

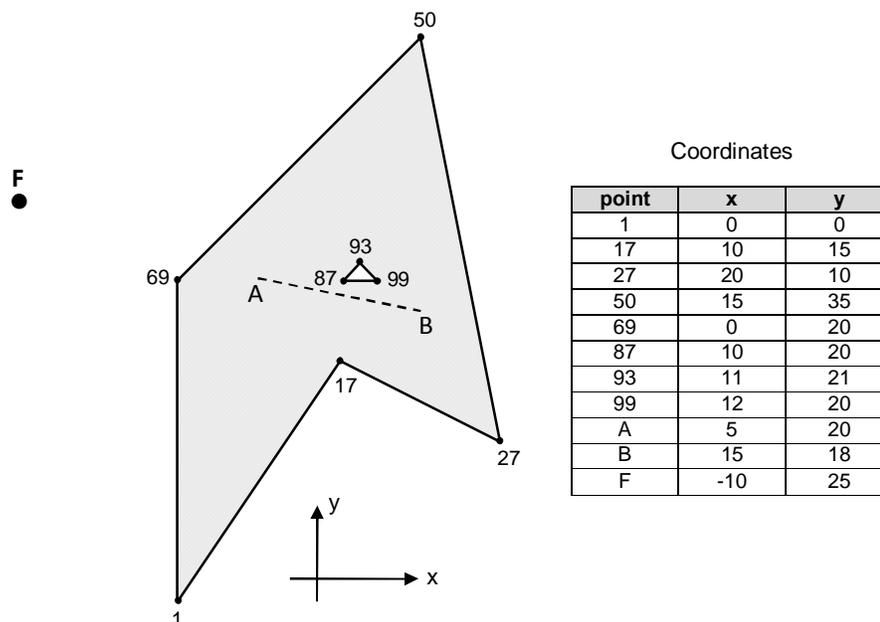


Figura 4.6 - Estrutura para avaliação do potencial e dos fluxos em pontos internos, devido a uma fonte externa F

Utilizando-se o método híbrido dos elementos de contorno são calculados os potenciais u_i e os fluxos q_i em pontos internos. Estes resultados numéricos são comparados com a solução analítica.

O problema é resolvido impondo-se as condições de contorno do tipo Neumann, onde somente a matriz \mathbf{H} precisa ser calculada. \mathbf{H} é uma matriz singular e os gradientes nodais equivalentes \mathbf{p} são auto equilibrados, este problema admite uma única solução para \mathbf{p}^* , a ser obtido com a ajuda dos conceitos de matrizes inversas generalizadas [Dumont (2011b)].

A Figura 4.7 mostra os resultados numéricos e analíticos do potencial u .

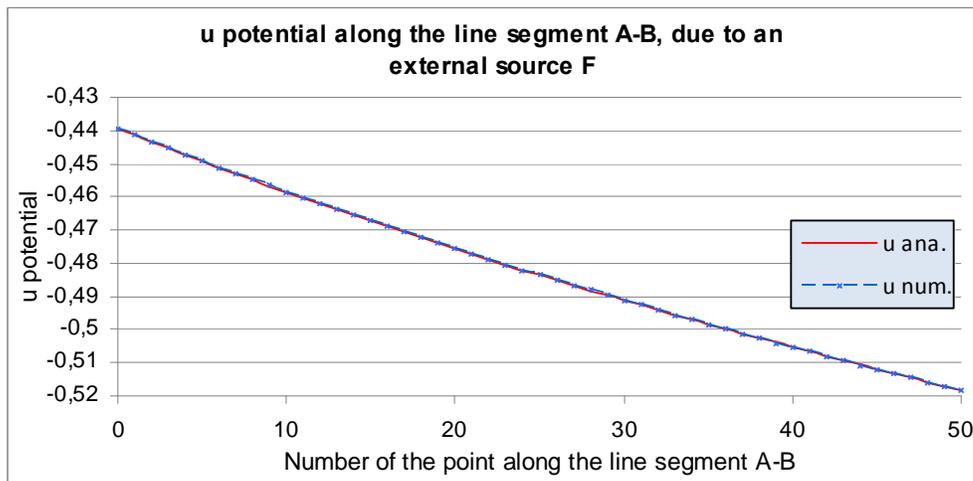


Figura 4.7 - Potencial u ao longo da linha tracejada A-B da Figura 4.6

Analisando os resultados da Figura 4.7, vê-se que a linha tracejada que representa a solução numérica para o potencial u , praticamente coincide com a solução analítica.

A Figura 4.8 mostra os gradientes q_x e q_y tanto da solução numérica como da solução analítica.

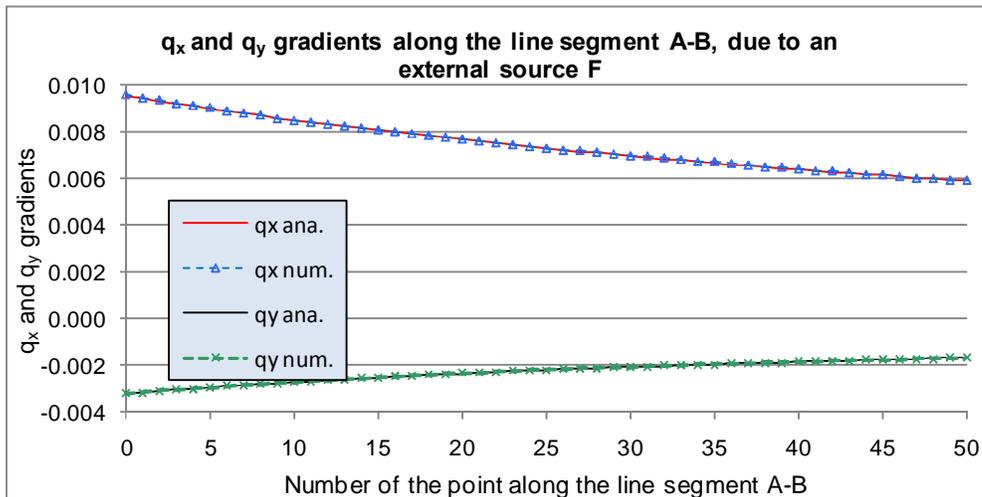


Figura 4.8 - Gradientes q_x e q_y ao longo da linha tracejada A-B da Figura 4.6

Uma melhor análise dos resultados do potencial e dos fluxos pode ser feita a partir da Figura 4.9, que mostra o erro da solução numérica em relação à solução analítica.

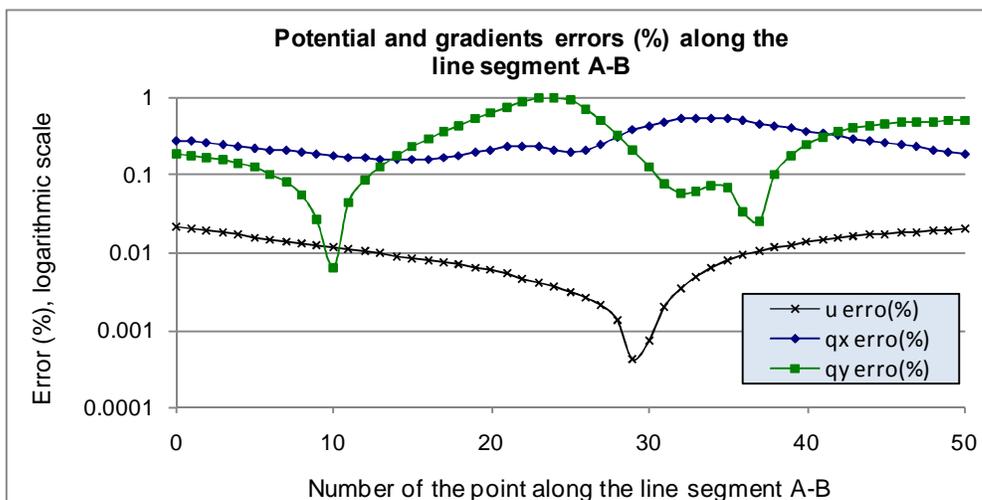


Figura 4.9 - Erro do potencial u e dos fluxos q_x e q_y ao longo da linha tracejada A-B da Figura 4.6

Os valores dos erros mostrados na Figura 4.9 são mostrados em escala logarítmica, isto permite uma melhor interpretação dos resultados. Estes erros são calculados pela seguinte expressão:

$$\text{erro}(\%) = \text{abs} \left(\frac{\text{valor numérico} - \text{valor analítico}}{\text{valor analítico}} \right) \times 100\% \quad (4.28)$$

Nota-se que o erro do potencial u , obtido pelo BHEM é menor a $\pm 0,1\%$, e dos fluxos q_x e q_y , menores a $\pm 1,0\%$. Isto mostra a obtenção de bons resultados da formulação para problemas com domínio infinito. Veja-se que os resultados dos potenciais são melhores que dos fluxos, como esperado, já que os fluxos são valores obtidos da derivada do potencial.

Estes bons resultados também têm a ver com a boa discretização dos contornos, mas, se esperaria melhores resultados para o caso da estrutura sem a presença do furo.

4.5. Formulação para uma trinca em um meio infinito

Tendo desenvolvido e mostrado que a função de tensão de Westergaard generalizada pode ser usada como solução fundamental para problemas no método híbrido dos elementos de contorno e especificamente para um domínio finito, a seguir faz-se uma particularização do método para o caso de trincas.

No item interior analisou-se o caso de contornos fechados, isto é que o último nó de um determinado contorno coincide com o primeiro nó do mesmo contorno. Para o caso particular de uma trinca, tem-se um contorno aberto, com um nó inicial e outro final que não coincidem.

Para uma melhor compreensão analisa-se o problema de uma trinca com curvatura qualquer (Figura 4.10).

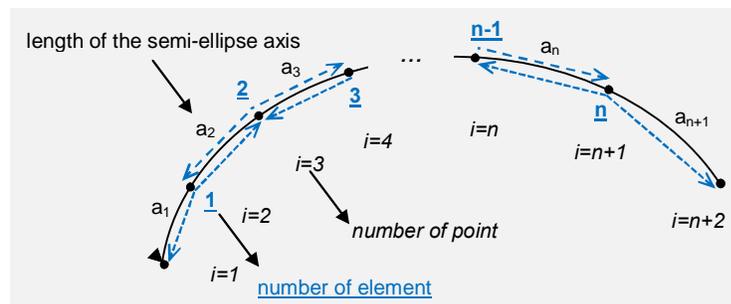


Figura 4.10 - Trinca curva discretizada com n elementos

A trinca da Figura 4.10 está discretizada com n elementos, aos quais correspondem $n+1$ segmentos e $n+2$ nós, sendo a_1 o comprimento do primeiro segmento ou primeira semi-elipse e a_{n+1} o comprimento do último segmento ou última semi-elipse.

A solução deste problema fica ainda mais simples, dado que a Matriz \mathbf{H} é calculada tomando em conta apenas os pontos fontes relacionados aos n elementos, mas tendo em consideração os efeitos das integrações ao longo dos $n+1$ segmentos do contorno, obtendo-se assim uma matriz \mathbf{H} da ordem de $n \times n$.

Esta matriz quadrada $\mathbf{H}_{n \times n}$ não singular ao ter condições de contorno tipo Neumann sua solução recai na primeira igualdade da eq. (3.58), de onde se obtém:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} \quad (4.29)$$

Onde \mathbf{p} é o vetor de gradientes nodais equivalentes nos pontos fonte dos elementos da trinca discretizada, este vetor é de ordem n . Assim \mathbf{p}^* é a única incógnita a ser calculada, de ordem n .

O cálculo do potencial e dos fluxos é efetuado a partir das componentes p_i^* para qualquer ponto do domínio Ω exceto para os pontos que coincidem com os nós da discretização do contorno Γ .

Para o cálculo do fator de intensidade de tensão K_I no modo I, basta aplicar a seguinte formula:

$$K_I = \frac{p_1^*}{2a_1} \sqrt{\pi a_1} \quad (4.30)$$

ou a formula:

$$K_I = \frac{p_n^*}{2a_{n+1}} \sqrt{\pi a_{n+1}} \quad (4.31)$$

dependendo do extremo da trinca onde se quer calcular o fator de intensidade de tensão K_I .

Os termos $p_1^*/2a_1$ e $p_n^*/2a_{n+1}$ das eq. (4.30) e (4.31), respectivamente, representam a meia do fluxo, aplicado ao longo do primeiro ou ultimo elemento da trinca discretizada, segundo seja o caso.

Para mostrar a aplicabilidade desta formulação, é apresentado o problema de uma trinca reta e uma trinca curva em um domínio infinito.

4.5.1. Exemplos

Analisa-se o problema de uma trinca reta em um domínio infinito, submetida a um fluxo normal unitário (Figura 4.11).

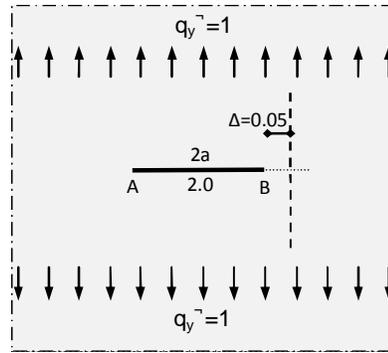


Figura 4.11 - Trinca reta de comprimento $a = 1$ submetida a um fluxo remoto unitário

O problema principal deste exemplo consiste em calcular os parâmetros de \mathbf{p}^* , usados no método híbrido dos elementos de contorno. A partir destes parâmetros \mathbf{p}_i^* são calculados os fatores de intensidade de tensão mediante as eq. (4.30) e (4.31), que ao se tratar de uma estrutura simétrica, os resultados duas equações são valores iguais.

A solução analítica do fator de intensidade de tensão para este problema vem dada por $K_I = \sigma\sqrt{\pi a} = \sqrt{\pi} \approx 1.772$.

A Figura 4.12 mostra os resultados obtidos pela análise. Várias discretizações da trinca foram utilizadas, variando-se a quantidade e a razão de distribuição (progressão geométrica) dos elementos ao longo das faces da trinca. Estas razões de distribuição começam nas extremidades da trinca e vão até o centro.

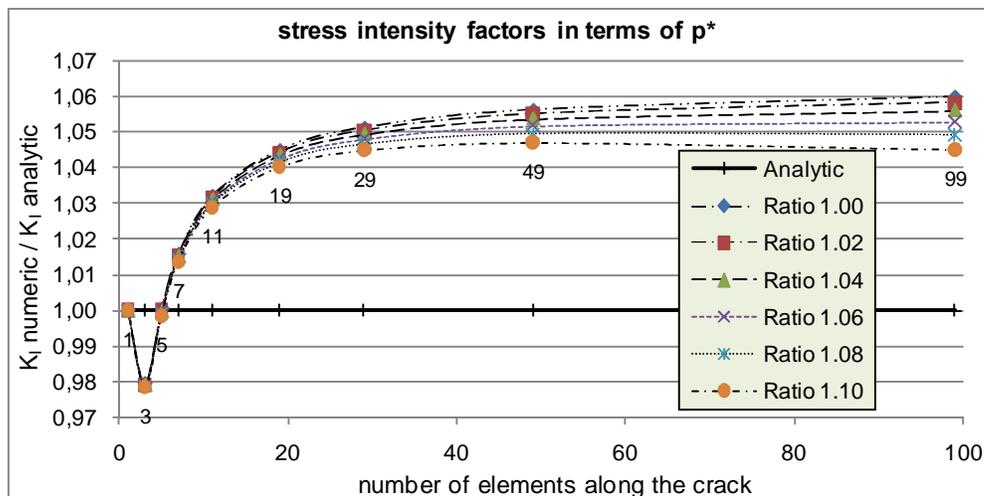


Figura 4.12 . Fatores de intensidade de tensão K_I para a trinca da Figura 4.11

Analisando os resultados mostrados na Figura 4.12, nota-se que apenas um elemento de trinca seria capaz de reproduzir a solução analítica. A utilização de três elementos de trinca forneceu um erro de $-2,0\%$, este resultado já era esperado, pois, não se consegue representar de maneira satisfatória uma elipse pela superposição de três outras. Para maiores discretizações de trinca e uma razão de distribuição de um, os valores calculados de K_I se aproximam a um erro de $+6,0\%$, seguindo um mesmo padrão, mas não podendo ser comprovado a existência de uma convergência, a qual pode ser mais bem apreciada na Figura 4.13.

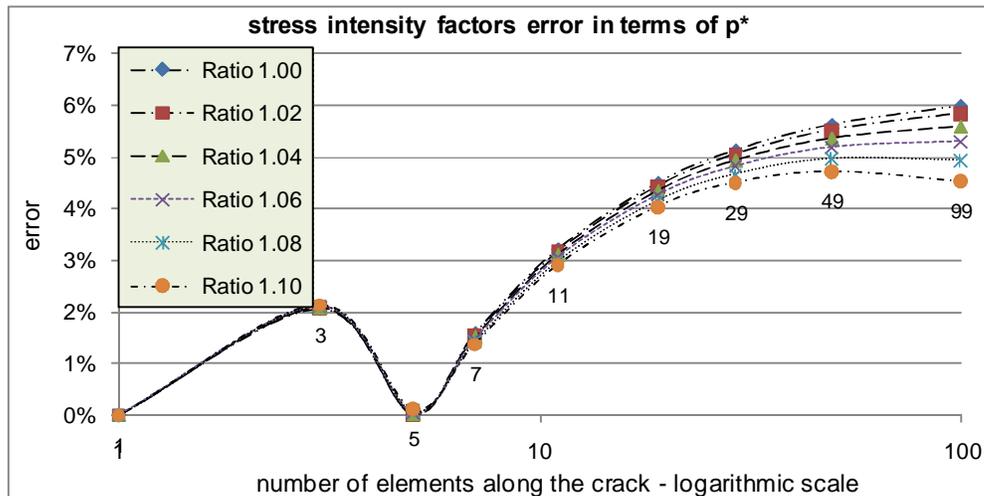


Figura 4.13 - Erro dos fatores de intensidade de tensão K_I para a trinca da Figura 4.11

Os erros calculados são desenhados em função do número de elementos da trinca em escala logarítmica (Figura 4.13), isto para uma melhor interpretação dos resultados, a seguir faz-se uma análise detalhada dos valores obtidos nesta gráfica.

Para todas as razões de distribuição apresentadas e número de elementos de trinca maior a 5 e menor a 49, a natureza dos resultados seguem um mesmo padrão com uma tendência a ir acrescentando o erro.

A linha que representa uma razão de distribuição de 1,10 apresenta um máximo com uma discretização da trinca próxima aos 49 elementos, assim, para discretizações maiores o erro decresce.

Pode-se ver que a linha que representa uma razão de distribuição de 1,08, também apresenta um máximo para um número de elementos de trinca entre 49 e 99, a partir do qual o erro tende a diminuir.

Então, é esperado que o comportamento de todas as razões de distribuição seja o mesmo, isto é, que o erro do fator de intensidade de tensão aumente quando e maior a discretização da trinca, até atingir um máximo, após do qual o erro irá diminuindo.

Também foram testados exemplos nos quais as razões de distribuição iniciaram no segundo elemento, isto é considerando o primeiro e segundo elemento de igual comprimento, cujos resultados numéricos não apresentaram melhoras em comparação com o exemplo deste item, motivo pelo qual não se considera necessária a apresentação dos resultados.

Conclui-se que a utilização de uma razão de distribuição diferente de 1,00 não melhora os resultados em forma significativa e que para qualquer razão de distribuição não é possível garantir a convergência dos resultados de K_I , motivo pelo qual o fator de intensidade de tensão não representa uma norma consistente para verificar a convergência da formulação, onde a exigência é que o campo de gradientes esteja em equilíbrio.

Para validar a convergência da formulação, realizou-se o estudo da obtenção dos fluxos em uma região bem próxima à ponta da trinca. Esta região é representada pela linha tracejada próxima à extremidade direita da trinca esquematizada na Figura 4.11, foram considerados várias discretizações da trinca com uma razão de distribuição de 1,00. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 4.14.

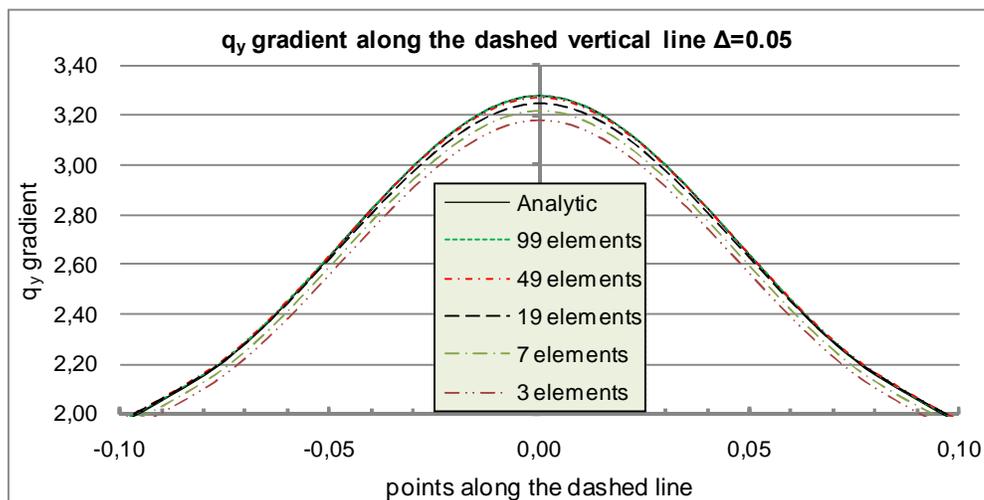


Figura 4.14 - Convergência da gradiente q_y ao longo da linha tracejada na Figura 4.11

Na Figura 4.14, vê-se que os valores do fluxo q_y melhoram com a discretização e os resultados numéricos tendem aos valores analíticos, ou seja,

ao campo de gradientes gerado por somente uma trinca elíptica. Para uma melhor visualização da convergência calculam-se os erros numéricos dos fluxos q_y obtidos em relação ao valor analítico, os quais são desenhados na Figura 4.15.

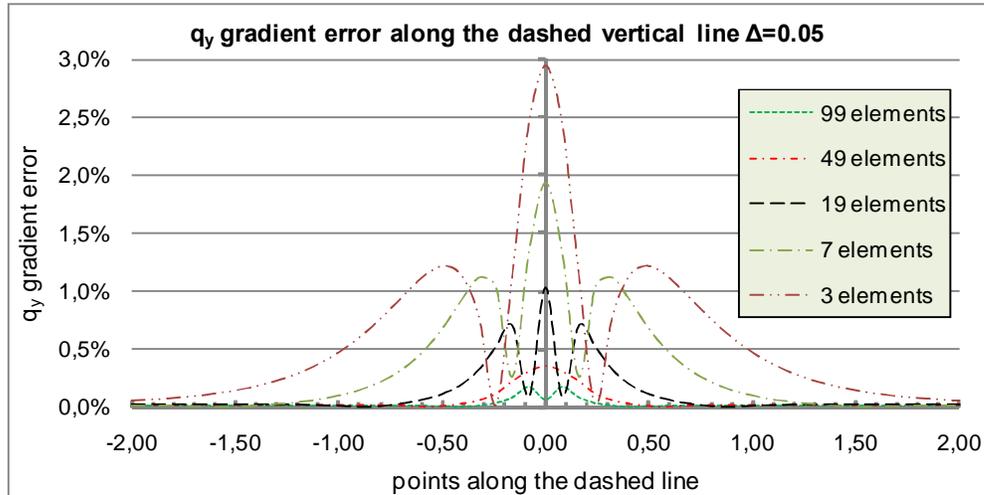


Figura 4.15 - Erro no gradiente q_y ao longo da linha tracejada da Figura 4.11

Analisando os resultados apresentados na Figura 4.15, vê-se que para uma trinca discretizada com 3 elementos o erro do fluxo q_y no ponto eixo vertical (interseção da linha tracejada com a projeção do eixo da trinca) é de $\pm 3,00\%$. Para uma trinca discretizada com 7 elementos o erro é de $\pm 2,00\%$, assim, o erro vai diminuindo até chegar a $\pm 0,10\%$, que corresponde à trinca discretizada com 99 elementos. Verifica-se deste modo a convergência do campo de fluxos q_y , isto é que os resultados melhoram e tendem ao valor analítico quando maior é a discretização da trinca. Para demonstrar que a convergência em termos do campo de fluxos não tem relação com a convergência em termos de fatores de intensidade de tensão, pode-se recorrer novamente à Figura 4.12.

Nesta Figura, toma-se a curva que representa o comportamento de K_I para uma razão de distribuição de 1,00, nesta curva analisa-se dois pontos: um que corresponde a uma discretização de 7 elementos e outro a uma discretização de 19 elementos. Observa-se claramente que o primeiro ponto fornece um erro de $\pm 0,00\%$, resultado bem melhor que o segundo que fornece um erro de $\pm 4,00\%$. Em contrapartida, na Figura 4.15 verifica-se que uma

discretização com 19 elementos fornece um erro de $\pm 2,00\%$, melhor resultado que a discretização com 7 elementos que fornece um erro de $\pm 1,00\%$. Isto prova que fatores de intensidade de tensão não podem ser utilizados como norma de convergência para esta formulação. Contudo, os valores obtidos para o fator de intensidade de tensão K_I estão dentro de um limite satisfatório de erro ($\pm 6,00$).

Para verificar a convergência dos fluxos para qualquer geometria da trinca, apresenta-se um segundo exemplo. Neste segundo exemplo, apresenta-se uma trinca curva de raio $R = \sqrt{2}$, em um meio infinito submetido a um fluxo remoto unitário tal como esquematizado na Figura 4.16.

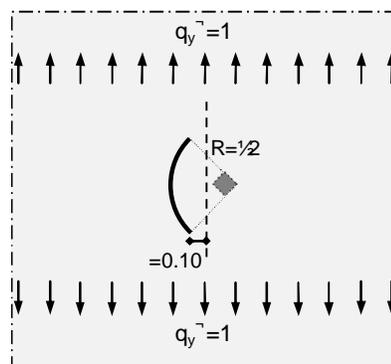


Figura 4.16 - Trinca curva de raio $\sqrt{2}$ submetida a um fluxo remoto unitário

A idéia deste exemplo consiste em calcular o fluxo q_y em pontos ao longo da linha tracejada da Figura 4.16 e verificar sua convergência.

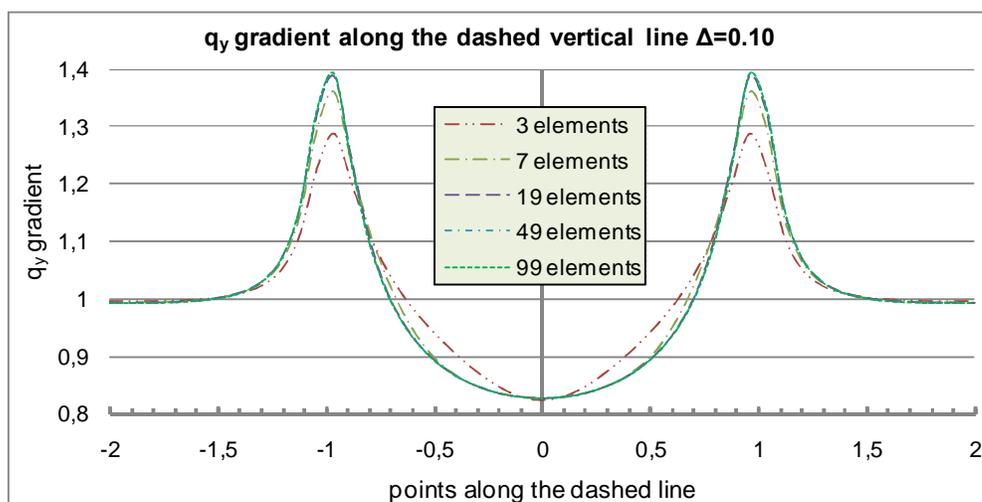


Figura 4.17 - Convergência da gradiente q_y ao longo da linha tracejada da Figura 4.16

Analisando a Figura 4.17, verifica-se a convergência da componente de fluxo q_y com o aumento do número de elementos utilizados na modelagem da trinca.

A trinca da Figura 4.16 tem os modos de trincamento I e II relacionados aos fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} , respectivamente, isto para problemas de elasticidade. Para problemas de potencial se tem somente um valor relacionado a um fator de intensidade de gradiente que não têm relação alguma com os fatores de intensidade de tensão K_I ou K_{II} . Conclui-se que neste problema não é possível calcular os fatores de intensidade de tensão.

4.6.

Formulação para uma trinca em um domínio finito

Nos itens 4.1, 4.2 e 4.3 foram desenvolvidas as considerações básicas da função de tensão de Westergaard generalizada para seu uso como solução fundamental no MHEC. No item 4.4 viu-se a aplicação da formulação na solução de problemas em um meio finito. No item 4.5 desenvolveu-se a formulação para trincas em um meio infinito. Para o presente item toma-se como base o desenvolvido nos itens anteriores.

Para o problema de uma trinca interna deve-se considerar na análise a superposição de efeitos que introduza a influência de um contorno finito e uma trinca contida no domínio de este contorno. Isto pode ser obtido com o uso da solução fundamental de Westergaard generalizada tanto nos pontos nodais do contorno externo da estrutura como nos nós utilizados para discretizar a trinca.

No presente item, por efeitos de eficiência computacional e para avaliar o uso de duas formulações distintas em um mesmo problema, utiliza-se a solução fundamental de Kelvin nos pontos nodais do contorno externo da estrutura e a solução fundamental de Westergaard generalizada nos nós dos elementos usados para discretizar a trinca. Dado que, a solução fundamental baseada na função de tensão de Westergaard generalizada demanda maior esforço computacional em relação à solução fundamental de Kelvin.

Sendo assim, considera-se o índice (0) referente à solução fundamental de Kelvin, e o índice (c) referente à solução fundamental de Westergaard generalizada, as matrizes e vetores do sistema de eq. (4.29) são dados por:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{00} & \mathbf{H}_{0c} \\ \mathbf{H}_{c0} & \mathbf{H}_{cc} \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{p}^*\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_0^* \\ \mathbf{p}_c^* \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{p}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_c \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

onde a matriz $[\mathbf{H}]$ é quadrada e singular.

Na eq. (4.32), as submatrizes de $[\mathbf{H}]$ são obtidas levando-se em consideração o seguinte:

\mathbf{H}_{00} - Matriz referente à aplicação da solução fundamental de Kelvin nos nós utilizados para discretizar o contorno externo, sendo a integração realizada no contorno externo.

\mathbf{H}_{0c} - Matriz referente à aplicação da solução fundamental de Kelvin nos nós utilizados para discretizar o contorno externo, sendo a integração realizada no contorno da trinca.

\mathbf{H}_{c0} - Matriz referente à aplicação da solução fundamental de Westergaard generalizada nos nós utilizados para discretizar a trinca, sendo a integração realizada no contorno externo.

\mathbf{H}_{cc} - Matriz referente à aplicação da solução fundamental de Westergaard modificada nos nós utilizados para discretizar a trinca, sendo a integração realizada no contorno da trinca.

Os elementos do vetor \mathbf{p}_0^* , uma das incógnitas do problema, são parâmetros singulares provenientes da aplicação das soluções de Kelvin no contorno externo da estrutura. Os elementos do vetor \mathbf{p}_c^* correspondem aos parâmetros da trinca, lembrando que de estes parâmetros, que representam as extremidades da trinca, é possível obter os fatores de intensidade de tensão K_I . Os termos \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_c são forças nodais equivalentes, sendo que para trincas descarregadas (maioria dos casos) \mathbf{p}_c é nulo.

4.6.1. Exemplos

Neste item é fornecido um exemplo que comprova a aplicabilidade da formulação para trincas internas. Trata-se do cálculo dos fatores de intensidade de tensão K_I de uma trinca de comprimento $2a$, contida em uma placa de dimensões $2w \times 6w$ (Figura 4.18).

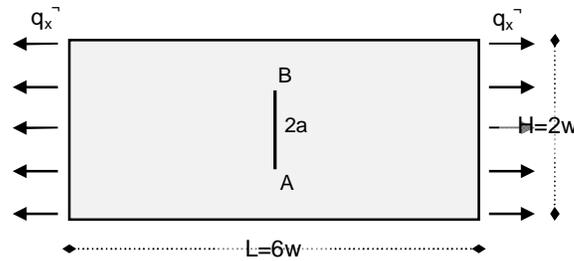


Figura 4.18 - Trinca concêntrica em uma placa retangular submetida a um fluxo unitário

Para a trinca da Figura 4.18 e varias relações de a/w calcula-se o fator de intensidade de tensão K_I em função do número de elementos usados para discretizar à trinca, os resultados numéricos são desenhados e mostrados na Figura 4.19.

Para assegurar que a influência da discretização do contorno externo na trinca seja da mesma ordem para diferentes valores de a/w se utilizou uma discretização variável das arestas da placa também em função de a/w , isto é, que para uma relação maior de a/w , os extremos da trinca estão mais próximos às arestas laterais da placa, assim será necessária uma maior discretização das arestas da placa, o resumo dos valores de a/w , assim como as diferentes discretizações do contorno da placa são apresentadas na seguinte tabela:

| a/w | a (und) | w (und) | Numero de elementos nas arestas | | |
|-------|-----------|-----------|---------------------------------|-----------------------|----------------|
| | | | Laterais (L) | Superior/inferior (H) | Total na placa |
| 1/20 | 1 | 20 | 12 | 36 | 96 |
| 1/10 | 1 | 10 | 12 | 36 | 96 |
| 1/5 | 1 | 5 | 14 | 42 | 112 |
| 1/2 | 1 | 2 | 20 | 60 | 160 |
| 1/1,5 | 1 | 1,5 | 30 | 90 | 240 |

Tabela 4.2 - Dimensões e discretizações das arestas da placa da Figura 4.18

A solução aproximada para este exemplo foi apresentada por Castro & Meggiolaro (2009), com uma precisão de $\pm 0.3\%$ para $h/w > 3$, dada pela seguinte expressão:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[1 - 0.25 \left(\frac{a}{w} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{w} \right)^4 \right] \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2w}} \quad (4.33)$$

A Figura 4.19 mostra os resultados fornecidos por esta análise.

Analisando-se os resultados mostrados na Figura 4.19, comprova-se que os valores do fator de intensidade de tensão K_I seguem o mesmo padrão que os obtidos para trincas em meio infinito. Para relações de $a/w=1/20$, $a/w=1/10$ e $a/w=1/5$ obtêm-se valores da relação $K_{I\text{-numérico}}/K_{I\text{-analítico}}$ bem próximos aos obtidos no meio infinito. Para valores $a/w=1/2$ e $a/w=1/1,5$ o valor da relação $K_{I\text{-numérico}}/K_{I\text{-analítico}}$ cai.

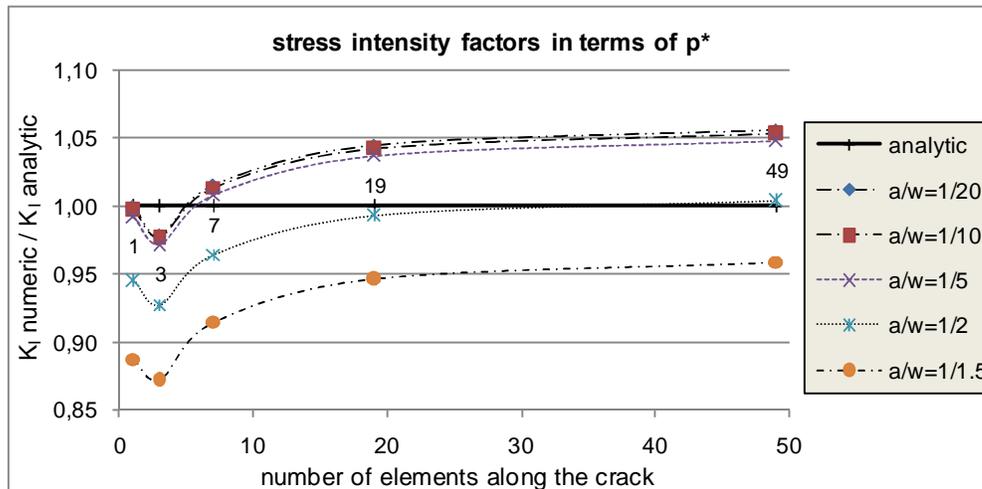


Figura 4.19 - Fatores de intensidade de tensão K_I para a trinca da Figura 4.18

Adicionalmente foram desenvolvidos exemplos com maiores discretizações do contorno da placa não apresentando melhora nos resultados, a partir do qual se conclui que a queda dos resultados numéricos nos valores de K_I para relações de $a/w=1/2$ e $a/w=1/1,5$ se deve à maior influência do contorno lateral próximo à ponta da trinca em análise que à influência do outro contorno lateral, ou seja, a relação $(w-a)/(w+a)$ tende a ser pequena.

4.7.

A Integral J no cálculo de fatores de intensidade de tensão

A boa convergência dos fluxos q_i e a não convergência dos valores de K_I , desenvolvidos nos itens anteriores, motivaram o uso de procedimentos e formulações alternativas para o cálculo do fator de intensidade de tensão K_I , de tal modo a ter mais um parâmetro de comparação. Uma de estas formulações alternativas é usando a Integral J , a qual será desenvolvida neste capítulo.

O caminho de integração seguinte:

$$J = \int_{\Gamma} (W \eta_x - T_i u_{i,x}) d\Gamma \quad (4.34)$$

foi proposta por Rice (1968), a fim de medir a intensidade do campo de tensões próxima à ponta da trinca para um problema de elasticidade em material homogêneo e isotrópico. A direção x no sistema cartesiano de coordenadas é tangente ao eixo da trinca na sua ponta.

A Integral J é aplicável ao caso de uma trinca descarregada, onde $T_i = 0$ ao longo das faces da trinca e sem a presença de fontes de corpo. Este desenvolvimento também é aplicado para o caso de trincas simetricamente carregadas nas suas faces, isto é, se $T_i^+ = -T_i^-$, desde que o termo $T_i u_{i,x}$ na eq. (4.34) seja cancelado quando a análise é realizada ao longo das caras da trinca.

4.7.1.

A integral J para problemas de potencial

Para problemas de potencial, a eq. (4.34) se simplifica a:

$$J = \int_{\Gamma} \left(-\frac{1}{2} q_i u_{,i} \eta_x + q_i \eta_{i,x} \right) d\Gamma \quad (4.35)$$

Onde $-\frac{1}{2} q_i u_{,i}$ é a energia de deformação em termos do potencial u e do fluxo $q_i = -k u_{,i}$.

É possível verificar que para um contorno J fechado, que não contem singularidades, o valor da Integral J é nulo. Isto mediante a aplicação do teorema de Green na eq. (4.35) a qual conduz à seguinte equação:

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} (q_i u_{,i})_{,x} + (q_i u_{,x})_{,i} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(-q_i u_{,ix} + q_{i,i} u_{,x} + q_i u_{,ix} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Desde que $q_{i,i} = 0$ no domínio Ω encerrado pelo contorno Γ_J , ou seja, não existam fontes de corpo.

Tendo em conta a eq. (4.1), a integral J da eq. (4.35) pode ser expandida como:

$$J = \frac{1}{4k} \int_{\Gamma} \left[\Phi'^2 (\eta_x + i \eta_y) + \bar{\Phi}'^2 (\eta_x - i \eta_y) \right] d\Gamma \quad (4.37)$$

ou, alternativamente, como:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{4k} \int_{\Gamma} \left[(\Phi'^2 + \bar{\Phi}'^2) \eta_x + i(\Phi'^2 - \bar{\Phi}'^2) \eta_y \right] d\Gamma \\
 &\equiv \frac{1}{k} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} (\Re(\Phi')^2 - \Im(\Phi')^2) \eta_x - \Re(\Phi') \Im(\Phi') \eta_y \right] d\Gamma
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

A eq. (4.36) mostra que a Integral J é nula, quando o contorno Γ_J encerra um domínio sem singularidades. Dito de outra forma, $J = 0$, se nenhuma descontinuidade é atravessada pelo caminho Γ_J , isto é também válido para o caso de uma trinca interna completamente implícita em Ω (encerrada, mas não atravessada pelo contorno Γ_J).

Uma generalização da condição expressada na eq. (4.36) é de se Γ_J corta à trinca um número par de vezes, é sempre possível transformar o problema em uma trinca que esta completamente implícita no domínio Ω .

4.7.2.

Relação da integral J com o fator de intensidade de tensão

Para problemas de estado plano de deformações, a Integral J é relacionada com a dureza da fratura no modo I de carregamento em termos do fator de intensidade de tensão K_I pela seguinte expressão:

$$J_I = G_I = K_I^2 \frac{1-\nu}{2G} \tag{4.39}$$

onde G_I é a taxa crítica de liberação de energia de deformação, $G = E/2(1+\nu)$ é o módulo de elasticidade transversal e ν é o coeficiente de Poisson de um material elástico e homogêneo.

A analogia da eq. (4.39), com o problema de potencial conduz à expressão:

$$J = \frac{K_I^2}{2k} \tag{4.40}$$

O fator de intensidade de tensão K_I é obtido a partir da eq. (4.40) e expressado como:

$$K_I = \sqrt{2kJ} \tag{4.41}$$

4.7.3. Exemplos

Neste item apresentam-se uma série de exemplos numéricos com o fim de qualificar e quantificar os valores do fator de intensidade de tensão K_I , obtidos a partir de varias posições e tamanhos do contorno J . Para isto, são analisadas, trincas em um plano infinito submetidas a gradientes normais unitárias ($q_y^\infty = 1$). Também são analisadas trincas com a presença de um e dois furos próximos.

Os resultados dos exemplos apresentados são valores de $K_{I\text{-numérico}}/K_{I\text{-analítico}}$ obtidos a partir da Integral J [eq. (4.41)], e descritos em função de varias solicitações e configurações da trinca, nestes gráficos também são desenhados os valores da relação $K_{I\text{-numérico}}/K_{I\text{-analítico}}$ obtidos diretamente dos parâmetros p_{n-1}^* e p_n^* , e da solução analítica.

O primeiro exemplo trata-se de uma trinca reta em um domínio infinito bidimensional, submetida a um fluxo unitário remoto $q_y^\infty = 1$. A Figura 4.20 mostra a configuração desta trinca e do contorno Γ_J , assim como os resultados do cálculo numérico.

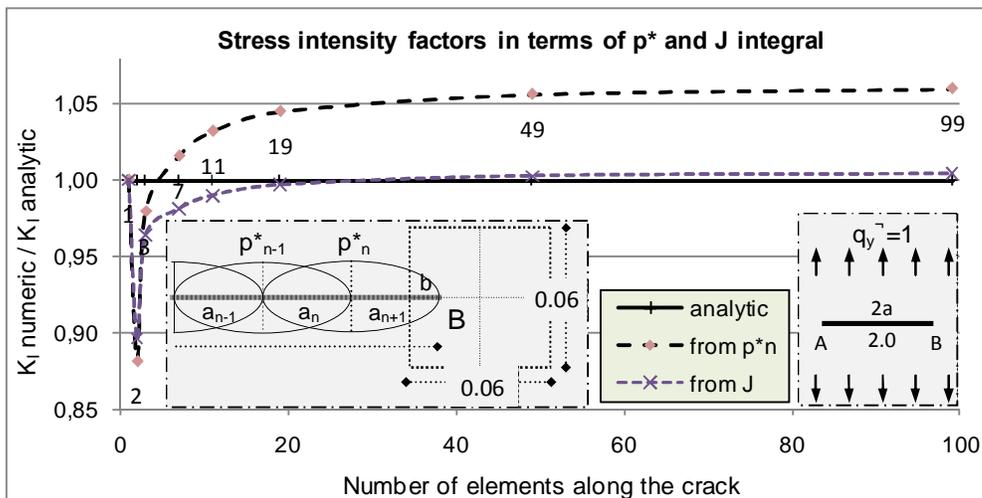


Figura 4.20 - K_I a partir da Integral J , para varias discretizações da trinca

Para fins de integração, o contorno Γ_J de dimensões $0,06 \times 0,06$, foi discretizado com 16 elementos de igual comprimento (4 por lado). A distância b , da ponta da trinca (ponto B) ao ponto onde o caminho J atravessa o eixo da trinca é dada por $b = 0,05a_{n+1}$ ou expresso de outra forma $b/a_{n+1} = 0,05$.

Analisando os resultados da Figura 4.20, note-se que para a trinca discretizada com um elemento, a solução numérica de K_I coincide com a solução analítica.

Para a trinca discretizada com dois elementos, os resultados numéricos de K_I apresentam erros muito grandes ($Erro \approx -10\%$). Já para a trinca discretizada com três elementos os resultados melhoram ($erro \approx -4\%$), a partir do qual a tendência no erro dos valores de K_I é crescente.

Para discretizações maiores da trinca, o valor de K_I se aproxima ao valor analítico, tendo-se, por exemplo, um erro de -0.3% para uma discretização de 19 elementos. Para discretizações da trinca ainda maiores o valor numérico de K_I resulta sendo maior ao analítico, sendo assim o erro de $+0,3\%$ para 49 elementos e erro de $+0,4\%$ para 99 elementos.

A partir dos resultados obtidos no presente exemplo conclui-se que para maior discretização da trinca obtêm-se melhores resultados de K_I , mas não se consegue verificar sua convergência. Então, surge a questão de se os fatores de intensidade de tensão K_I obtidos a partir da Integral J convergem para algum valor ou não, e se convergirem, para qual valor o fazem.

Como segundo exemplo apresenta-se a mesma trinca do exemplo anterior discretizada com 49 elementos. Para este exemplo, o fator de intensidade de tensão K_I é calculado em função da relação b/a_{n+1} , isto é, para vários pontos onde o contorno Γ_J corta à trinca. A Figura 4.21 mostra os resultados obtidos.

O contorno Γ_J de dimensões $0,06 \times 0,06$ foi discretizado com 16 elementos (4 por lado).

Analisando-se os valores obtidos, encontra-se que o valor de K_I depende da relação b/a_{n+1} . Para uma relação de $b/a_{n+1} = 0,005$, o valor de K_I tende ao valor obtido diretamente de p_n^* ($erro = +4\%$); para um valor de $b/a_{n+1} = 0,06$ se consegue um resultado de K_I próximo ao analítico ($erro = -0,2\%$); para valores próximos a 1 ($b/a_{n+1} = 0,995$) não se consegue obter um bom resultado ($erro = \pm 2\%$).

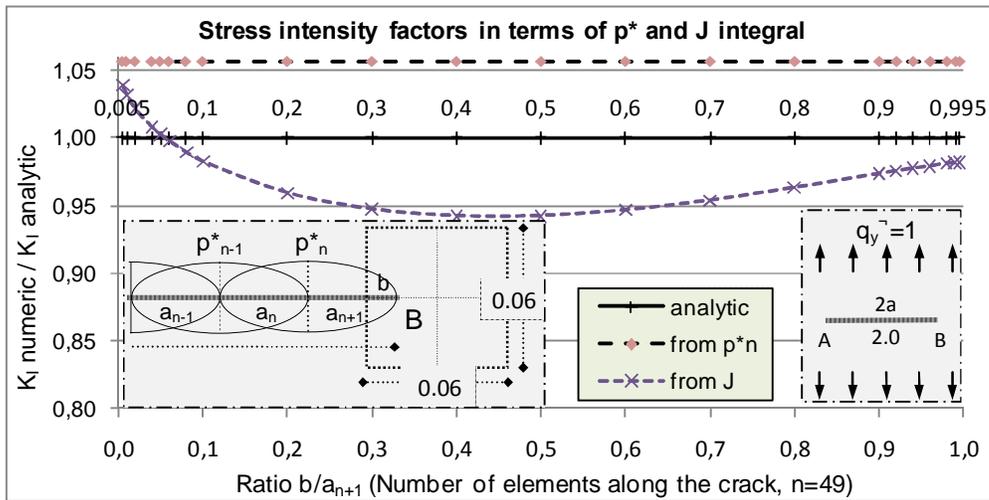


Figura 4.21 - K_I a partir da Integral J , em função da distância da ponta da trinca ao ponto onde o caminho Γ_J corta à trinca

Como terceiro exemplo, apresenta-se ainda a mesma trinca dos exemplos anteriores discretizada com 49 elementos. Neste exemplo as dimensões do contorno Γ_J são variáveis. Os resultados numéricos são mostrados na Figura 4.22.

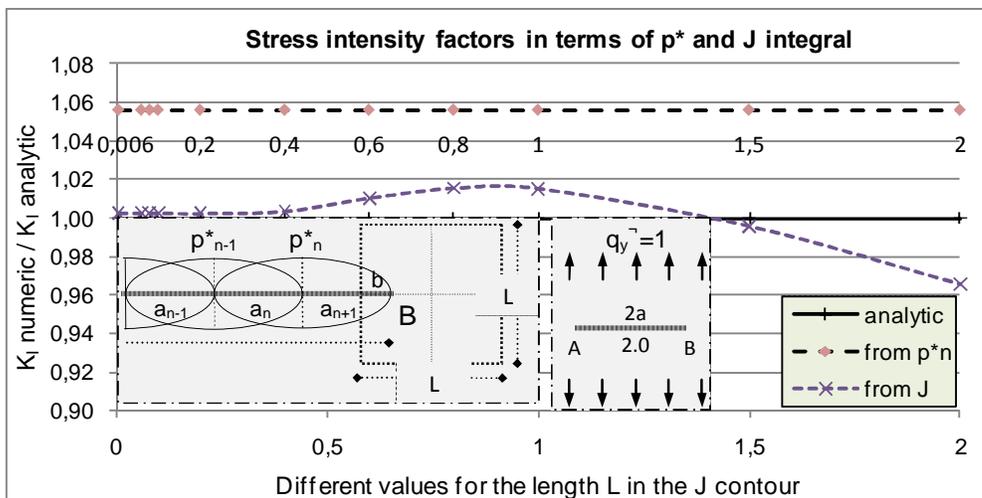


Figura 4.22 - K_I a partir de J , em função das dimensões de Γ_J

Para a integração ao longo do contorno J , usou-se 32 elementos (8 por lado) e um valor de $b = 0,05a_{n+1}$.

Neste exemplo, obtêm-se bons resultados numéricos de K_I para valores de L menores a 0,4, sendo, o máximo erro neste trecho de +0,3%. Para

valores de L maiores a 0,4 o valor de K_I aumenta, aumentando o erro ($erro = +1,5\%$ para $L=1$). Para valores ainda maiores de L o valor de K_I diminui ($erro = -3,4\%$ para $L=2$).

Como quarto exemplo apresenta-se uma trinca reta de comprimento $2a=1$ em um plano infinito, submetida a um fluxo remoto unitário $q_y^\infty = 1$. Esta trinca tem a influência de um furo próximo a sua extremidade direita. Neste exemplo, calculam-se os fatores de intensidade de tensão K_I na extremidade esquerda (A) e direita (B) da trinca, segundo o mostrado na Figura 4.23 e Figura 4.24, respectivamente. Para os dois casos o contorno Γ_J foi discretizado com 16 elementos (4 por lado). Para o cálculo de K_I foi usado um valor de $b/a_1 = 0,10$ na extremidade da esquerda (A), e de $b/a_1 = 0,03$ na extremidade da direita. O furo foi discretizado como 40 elementos lineares e utilizou-se a solução fundamental de Westergaard generalizada tanto no contorno da trinca como no contorno do furo.

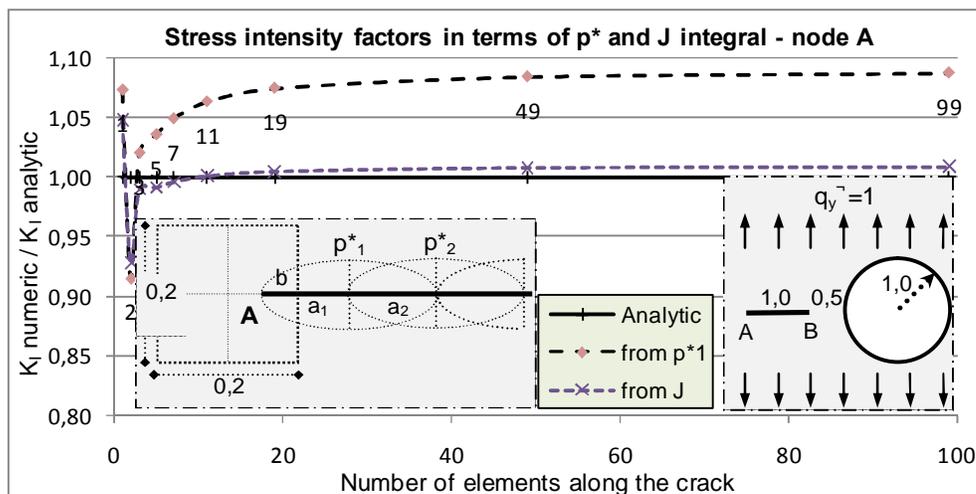


Figura 4.23 - K_I a partir de J , para varias discretizações da trinca influenciada por um furo próximo . ponta A

Para este exemplo os resultados analíticos (ou aproximações) são tomados de Rooke (1976), sendo o fator de intensidade de tensão analítico na extremidade esquerda da trinca $K_{I-A} = 1,494$, e na extremidade direita da trinca $K_{I-B} = 1,747$.

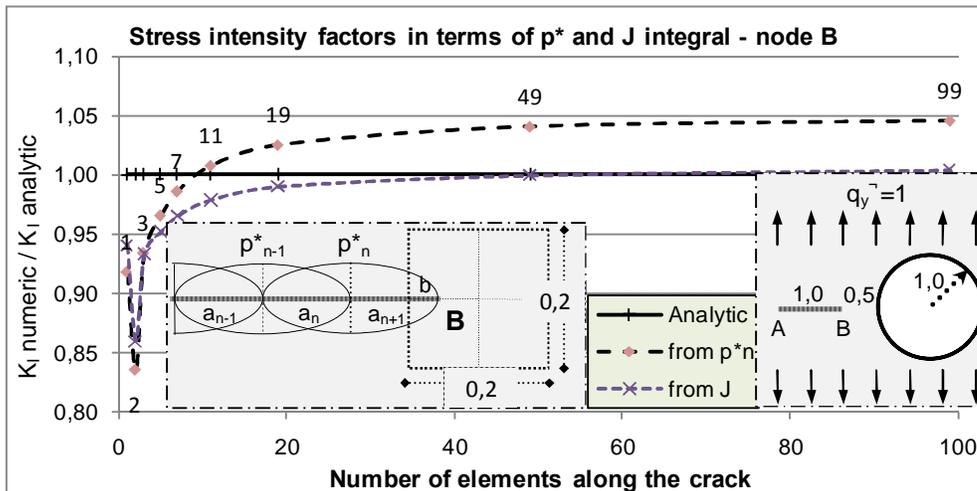


Figura 4.24 - K_I a partir de J , para varias discretizações da trinca influenciada por um furo próximo - ponta B

Analisando os resultados da Figura 4.23 verifica-se que o comportamento dos resultados numéricos é similar que de uma trinca sem a influência do furo, sendo assim que para uma discretização da trinca com 99 elementos se obtém um $erro = +0,9\%$.

Analisando-se a Figura 4.24 observe-se que se os valores numéricos de K_I melhoram com o aumento da discretização da trinca, já que para uma discretização da trinca com 99 elementos, se obtém um $erro = +0,4\%$.

Para a trinca discretizada com um elemento se esperaria um fator de intensidade de tensão $K_{I-numérico}$ igual ao valor analítico, mas isto não acontece para nenhum dos casos das duas últimas figuras, isto devido á influência do furo próximo.

Como seguinte exemplo apresenta-se a mesma configuração da anterior estrutura. Nesta vez para vários pontos onde o caminho Γ_J corta ao eixo da trinca. Os resultados deste exemplo se mostram na Figura 4.25 para o extremo A e na Figura 4.26 para o extremo B. O caminho Γ_J é discretizado com 36 elementos.

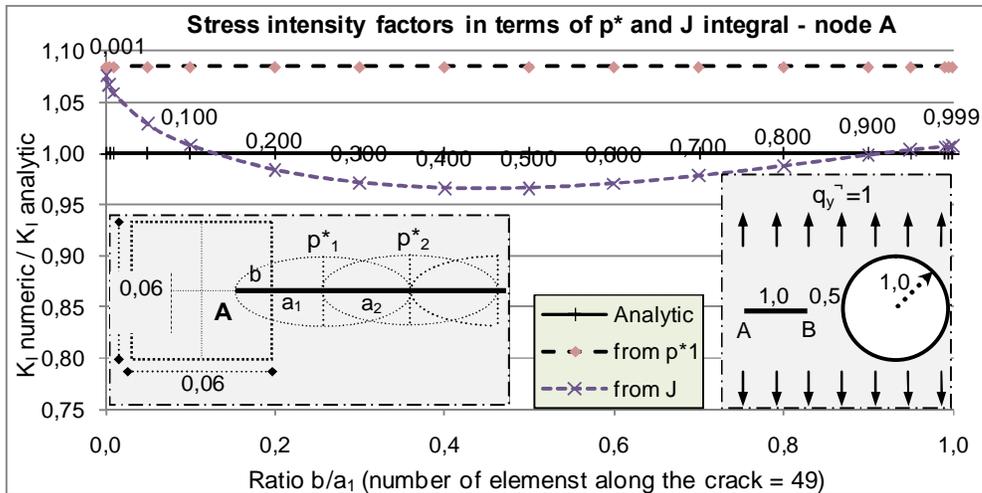


Figura 4.25 - K_I a partir de J , para uma trinca com influencia de um furo próximo - varias posições do caminho Γ_J

Analisando a Figura 4.25, verifica-se que quando a relação b/a_1 é bem pequena ($b/a_1 = 0,001$), os resultados numéricos de K_I obtidos a partir de J , se aproximam aos obtidos diretamente de p^*_1 . Para uma relação de $b/a_1 = 0,1$ o resultado numérico de K_I é próximo ao analítico ($erro = +0,8\%$).

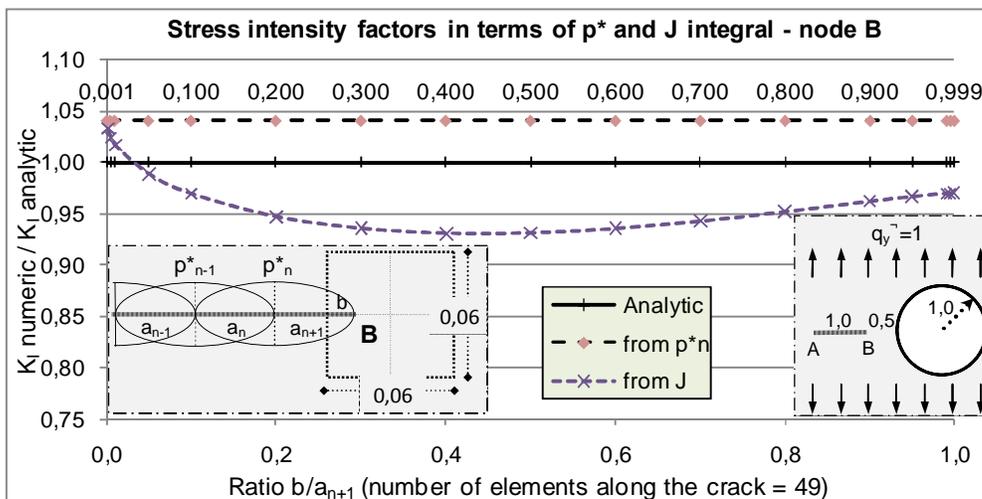


Figura 4.26 - K_I para uma trinca com a influencia de um furo próximo - varias posições do contorno Γ_J

Analisando os resultados da Figura 4.26 verifica-se que, para uma relação de $b/a_{n+1} = 0,05$ se obtêm valores próximos ao analítico ($erro = -1,1\%$).

Como seguinte exemplo, tem-se uma trinca com a presença de dois furos próximos. Os furos foram discretizado com 40 elementos retos cada um, e o contorno Γ_J foi discretizado com 26 elementos retos. Nota-se que os valores de K_I , para o extremo esquerdo e direito da trinca são iguais, isto pela simetria do problema. Para este exemplo, a relação de $b/a_{n+1} = 0,10$.

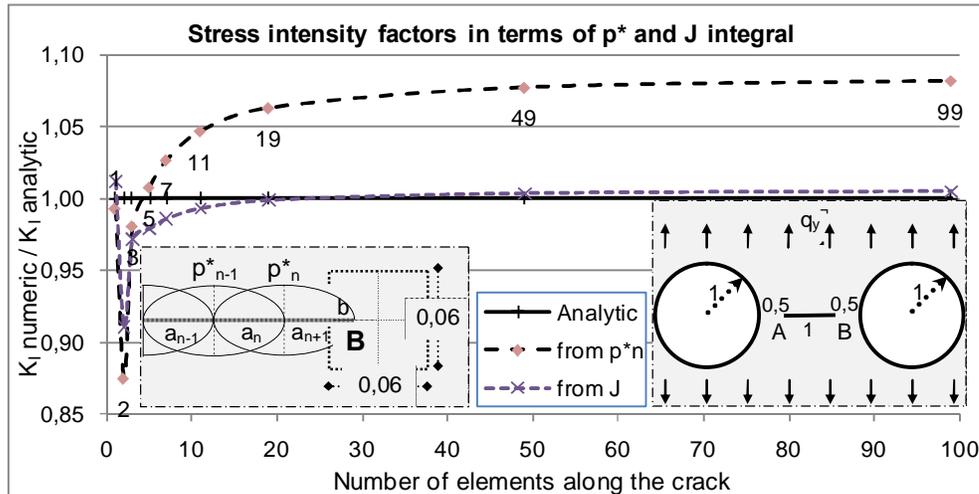


Figura 4.27 - K_I a partir de J em função do número de elementos discretizado de uma trinca com influencia de dois furos próximos

O valor analítico (aproximado) do fator de intensidade de tensão é tomado de Rooke (1976), sendo este valor: $K_{I-A} = K_{I-B} = 2,043$.

Na Figura 4.27, verifica-se que para uma maior discretização da trinca o valor numérico de K_I tende para um valor próximo a 1,005 vezes o valor analítico quando a trinca é discretizada com 99 elementos.

Na Figura 4.28, observa-se que o resultado numérico de K_I para uma relação de $b/a_{n+1} = 0,10$ é bem próxima ao analítico (*erro* = +0,3%).

Dos exemplos apresentados neste item, pode-se concluir que para o caso das trincas discretizada com um elemento de abertura elíptica o valor da Integral J independe do ponto por onde o caminho Γ_J corta a trinca e das dimensões do contorno Γ_J , se a trinca está em um meio infinito, a Integral J conduz á solução analítica do fator de intensidade de tensão K_I , e se a trinca tem a influência de furos ou cavidades o valor do fator de intensidade de tensão $K_{I-numérico}$ apresenta um desfaçamento em relação ao $K_{I-analítico}$.

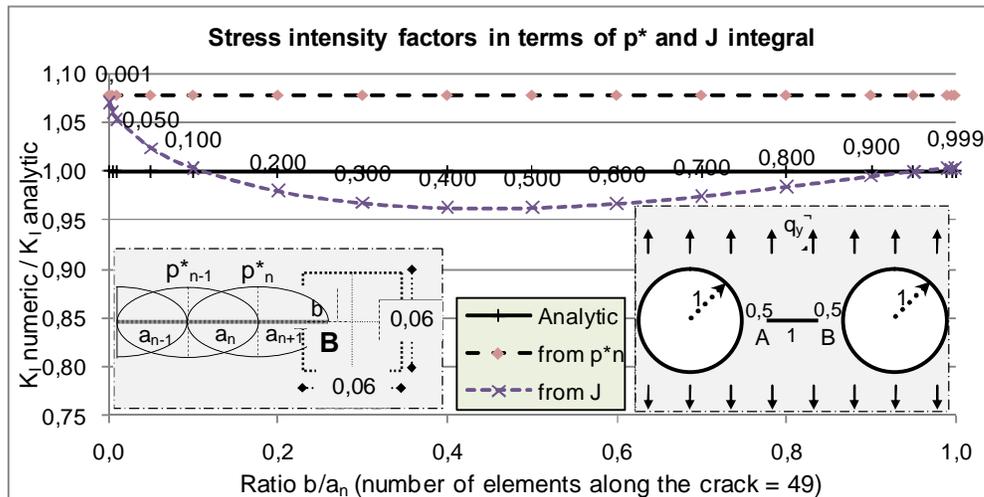


Figura 4.28 - K_I a partir de J em função da posição do contorno Γ_J , trinca reta com a influencia de dois furos próximos

Para o caso de trinca discretizada com vários elementos, os resultados da Integral J e do fator de intensidade de tensão K_I dependem das dimensões do contorno J e do ponto por onde o caminho Γ_J corta o eixo da trinca o qual tem que estar contido necessariamente no primeiro ou no último elemento discretizado da trinca.

Fica extremamente complicado generalizar para que valores de L (dimensões do contorno Γ_J) e b (distância do ponto da trinca ao ponto onde o caminho Γ_J a atravessa) se obtém os melhores resultados de $K_{I-numérico}$. Sendo necessária uma análise específica para cada caso

Para o caso específico dos exemplos apresentados neste item, obtêm-se bons resultados para valores de b entre $0,03a_{n+1}$ a $0,10a_{n+1}$, e valores de L menores ao comprimento da trinca obtendo-se para estes casos erros de até $\pm 5,00\%$.

4.8.

Aproximações polinomiais para o cálculo do fator de intensidade de tensão

Nos itens 4.4, 4.5 e 4.6 calcularam-se os valores numéricos dos fatores de intensidade de tensão K_I diretamente dos parâmetros p_1^* ou p_n^* obtendo-se erros menores a $\pm 6\%$. No item 4.7 usou-se a Integral J , obtendo-se erros

menores a $\pm 5\%$ com uma adequada escolha do caminho Γ_j . Em nenhum destes casos se conseguiu uma norma ou regra de convergência.

Assim, apresenta-se a seguir o cálculo do fator de intensidade de tensão K_I a partir da abertura da trinca, aproximada por funções polinomiais.

Para um domínio tridimensional elástico, os fatores de intensidade de tensão K_k podem ser expressos em termos da abertura próxima à ponta da trinca Δw_l segundo a seguinte relação (Mear, 1998):

$$K_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \Gamma_{kl} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta w_l}{\sqrt{t}} \right) \quad (4.42)$$

onde

$$\Gamma_{kl} = G \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

e t é a coordenada associada à direção da ponta ao interior da trinca.

Adaptado a problemas de potencial, a eq. (4.42) toma a seguinte forma:

$$K = \frac{\sqrt{2\pi k}}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\sqrt{x}} \right) \quad (4.44)$$

onde k é a condutividade (por exemplo) e as variáveis v e x são usadas ao invés de w e t . Segundo Williams (1952), a abertura da trinca na proximidade de sua ponta pode ser expressa pela seguinte expansão em series:

$$\Delta v = \sqrt{x} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots) \quad (4.45)$$

Aplicando a eq. (4.45) para o caso particular de três pontos próximos à ponta da trinca (Figura 4.29) e segundo a adaptação feita a problemas de potencial se tem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta v_1 / \sqrt{x_1} \\ \Delta v_2 / \sqrt{x_2} \\ \Delta v_3 / \sqrt{x_3} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

Na Figura 4.29, Δv é a função que descreve a abertura da trinca e Δv_i é o valor desta função no ponto associado à coordenada x_i .

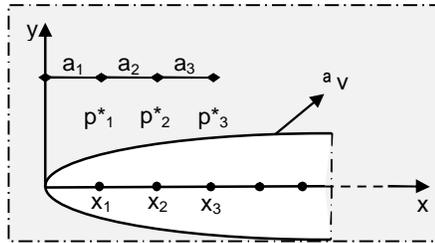


Figura 4.29 - Detalhe da abertura de uma trinca, próxima a sua ponta

Por outro lado, o salto do potencial ao longo das faces da trinca no desenvolvimento em termos de trinca elíptica dado por funções de Westergaard, é simplesmente:

$$\Delta v_i = p_i^*/k \quad (4.47)$$

Onde p_i^* são parâmetros da fonte interna em termos do qual o domínio solução é construído. Então, Resolvendo-se o sistema de equações da eq. (4.46) para três pontos numerados a partir da ponta da trinca, a uma mesma distancia a entre eles e usando-se a eq. (4.47), resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 2a & 4a^2 \\ 1 & 3a & 9a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{Bmatrix} p_1^*/\sqrt{a} \\ p_2^*/\sqrt{2a} \\ p_3^*/\sqrt{3a} \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

de onde se obtêm:

$$\alpha_0 = \frac{18p_1^* - 9p_2^*\sqrt{2} + 2p_3^*\sqrt{3}}{6\sqrt{a}} \quad (4.49)$$

Este valor α_0 é usado na eq. (4.44) para obter a expressão da eq. (4.50) do problema de potencial em análise.

$$K = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{18p_1^* - 9p_2^*\sqrt{2} + 2p_3^*\sqrt{3}}{6\sqrt{a}} \quad (4.50)$$

Seguindo o mesmo raciocínio é possível calcular o valor de K [eq.(4.44)] para valores de Δv a partir de um número qualquer de pontos próximos à ponta da trinca. A Tabela 4.3 mostra as expressões do fator de intensidade de tensão K_I para o caso particular de uma trinca reta. As expressões K_I da Tabela 4.3 são dadas para aberturas considerando entre 1 a 5 pontos próximos à ponta da trinca e são expressos em função dos parâmetros nodais p_i^* e do comprimento a .

| | Valores de fatores de intensidade de tensão K_I |
|----------|---|
| 1 termo | $\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left(\frac{p_1^*}{\sqrt{a}} \right)$ |
| 2 termos | $\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left(\frac{4p_1^* - p_2^*\sqrt{2}}{2\sqrt{a}} \right)$ |
| 3 termos | $\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left(\frac{18p_1^* - 9p_2^*\sqrt{2} + 2p_3^*\sqrt{3}}{6\sqrt{a}} \right)$ |
| 4 termos | $\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left(\frac{24p_1^* - 18p_2^*\sqrt{2} + 8p_3^*\sqrt{3} - 3p_4^*}{6\sqrt{a}} \right)$ |
| 5 termos | $\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left(\frac{150p_1^* - 150p_2^*\sqrt{2} + 100p_3^*\sqrt{3} - 75p_4^* + 6p_5^*\sqrt{5}}{30\sqrt{a}} \right)$ |

Tabela 4.3 - Expressões para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão K_I usando aproximações polinomiais

A continuação se apresenta um exemplo com o uso de estas aproximações.

4.8.1. Exemplos

Apresenta-se como exemplo, o caso de uma trinca reta discretizada com elementos de igual comprimento.

Neste exemplo analisa-se a trinca mostrada da Figura 4.11 (trinca reta em um domínio infinito com um fluxo unitário aplicado).

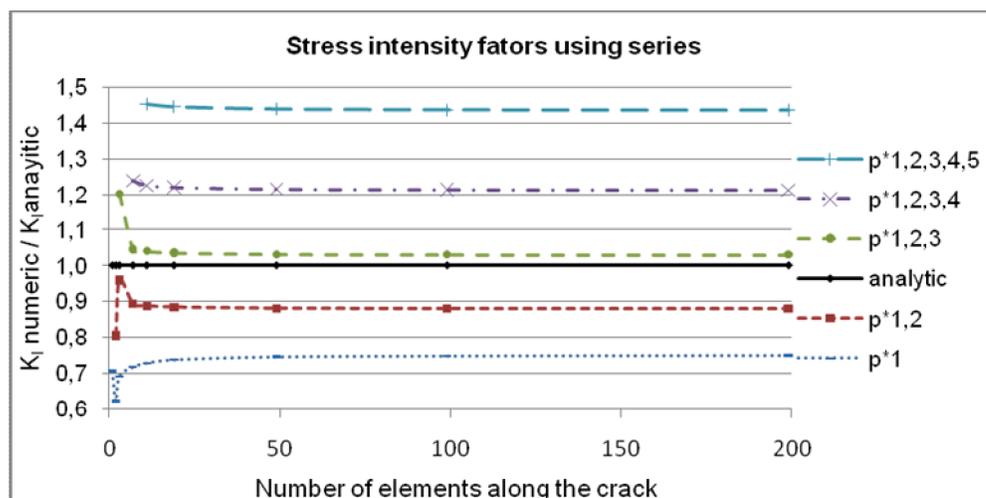


Figura 4.30 - Fatores de intensidade de tensão para a trinca da Figura 4.11 a partir de aproximações polinomiais

Os resultados obtidos para as diferentes aproximações da Tabela 4.3 são mostrados na Figura 4.30.

Analisando a Figura 4.30, vê-se que para discretizações da trinca maiores de 11 elementos e utilizando aproximações polinomiais com p_1^* e $p_{1,2}^*$ obtêm-se valores de K_I menores ao valor analítico. Para aproximações polinomiais com $p_{1,2,3}^*$, $p_{1,2,3,4}^*$ e $p_{1,2,3,4,5}^*$ obtêm-se valores de K_I maiores ao valor analítico. A tendência dos valores numéricos de K_I é ir acrescentando com o uso de um número maior de parâmetros p_i^* . Sendo que aproximações polinomiais com $p_{1,2,3}^*$, são os que apresentam melhores resultados, isto é, valores do erro próximos a +3.7%, para discretizações da trinca entre 19 e 199 elementos.

A Figura 4.31, apresenta os erros em escala logarítmica dos fatores de intensidade de tensão K_I correspondentes à curva $p_{1,2,3}^*$ da Figura 4.30.

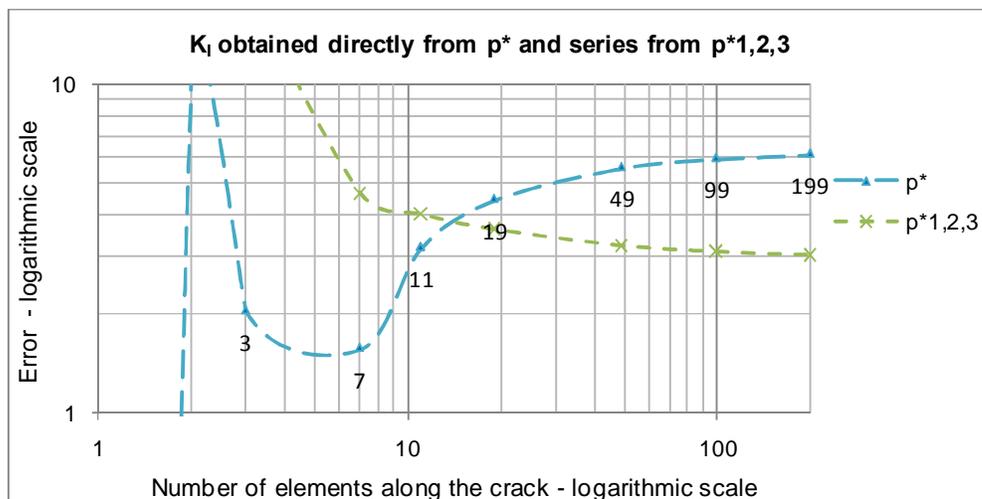


Figura 4.31 - Erro dos fatores de intensidade de tensão para a trinca da Figura 4.11 a partir de aproximações polinomiais com três termos

Conclui-se que o Cálculo dos fatores de intensidade de tensão K_I , usando aproximação polinomial com três termos, isto é, com o uso dos parâmetros p_1^* , p_2^* e p_3^* , apresentam bons resultados (erros menores de $\pm 4\%$) para discretizações maiores a 10 elementos, mas sem conseguir uma convergência dos resultados. Então, o uso de esta aproximação pode ser usado em forma

comparativa com os resultados de K_I obtidos a partir da Integral J e diretamente de p_1^* .