

### 3

## MÉTODO HÍBRIDO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Desenvolve-se neste capítulo um resumo da formulação do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC) aplicado a problemas da elastostática, além de serem abordados os requisitos teóricos básicos necessários ao seu desenvolvimento. Este capítulo é baseado nos desenvolvimentos realizados por Dumont (1987d), De Souza (1992), De Oliveira (1994) e Lopes (2002).

Inicialmente são apresentadas as equações básicas da teoria da elasticidade referentes a um corpo sujeito apenas a pequenos deslocamentos. O conceito de solução fundamental é então definido, sendo mostrada em particular a solução fundamental de Kelvin (Love, 1927). Em seguida, define-se o potencial de Hellinger-Reissner (Reissner, 1965) através da expressão generalizada da energia potencial total de um meio elástico.

A partir do potencial de Hellinger-Reissner, faz-se o desenvolvimento do método híbrido dos elementos de contorno, sem a consideração de forças de massa. A presente formulação também poderia ser deduzida a partir do princípio da energia potencial total estacionária (Carvalho, 1990) que, no entanto, por ser mais restritivo, forneceria as relações de uma maneira menos direta.

Posteriormente, são feitas considerações físicas sobre as relações obtidas. São discutidos aspectos relativos às transformações lineares entre os dois sistemas de coordenadas necessários para o estabelecimento do método. É mostrada a forma como podem ser obtidos os resultados finais, sendo estes tensões e deslocamentos em pontos internos. Aborda-se em seguida, o caso particular de estruturas externamente determinadas, as quais podem ser resolvidas de um modo bastante simples e eficiente em termos computacionais.

Neste trabalho será utilizada a notação indicial para simplificação da apresentação das diversas equações. Nesta notação, a utilização de um determinado índice  $i$ , por exemplo, representa os índices subscritos (1, 2, 3) para consideração das direções cartesianas (x, y, z) respectivamente. Índices repetidos em um mesmo termo têm o significado de somatório e um subscrito depois de uma (,) denota derivação segundo a direção coordenada representada.

### 3.1. Teoria da Elasticidade

Seja um corpo elástico sujeito apenas a pequenos deslocamentos. Os deslocamentos de um elemento infinitesimal deste corpo são descritos, na teoria da elasticidade, segundo dois sistemas de coordenadas:

- Um sistema global ou externo, onde se têm deslocamentos absolutos  $u_i$ . Sobre estes deslocamentos realizam trabalho forças externas que podem ser classificadas em dois tipos: forças de massa  $\bar{F}_i$ , definidas por unidade de volume e que atuam no domínio  $\Omega$ , ou seja, no interior do corpo; forças de superfície  $\bar{T}_i$ , definidas por unidade de área e que atuam no contorno  $\Gamma$ .
- Um sistema local ou interno, em que se têm deslocamentos relativos (deformações)  $\varepsilon_{ij}$ , referidos a um elemento infinitesimal  $d\Omega$ , sobre os quais realizam trabalho as forças de superfície (tensões)  $\sigma_{ij}$ .

O contorno do corpo é conceitualmente dividido em duas partes  $\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_u$ , onde se têm em  $\Gamma_\sigma$  forças prescritas e em  $\Gamma_u$  deslocamentos prescritos, conforme está representado na Figura 3.1. Seja um conjunto de forças externas conhecidas, atuando sobre o corpo elástico, e que são descritas no sistema global por  $\bar{F}_i$ , atuando em  $\Omega$  e  $\bar{T}_i$  atuando em  $\Gamma_\sigma$ . A análise deste corpo consiste na determinação dos deslocamentos  $u_i$  que ocorrem em  $\Omega$  e em  $\Gamma_\sigma$ , das reações de apoio que surgem em  $\Gamma_u$  e das tensões  $\sigma_{ij}$  em  $\Omega$ , causados pelas solicitações externas, é necessário então o estabelecimento de relações de transformação entre forças e deslocamentos entre os dois sistemas descritos.

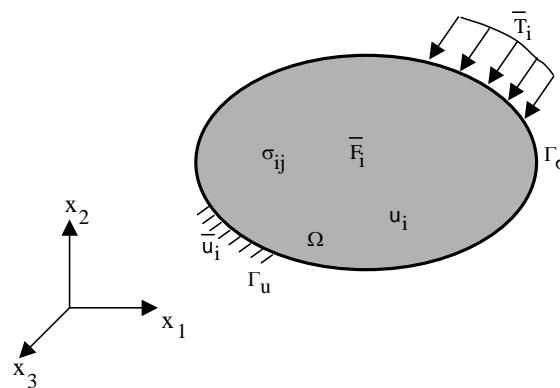


Figura 3.1 - Corpo elástico em equilíbrio

Entre as forças descritas no sistema global e as tensões do sistema local há as relações de transformação estática (equilíbrio):

$$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \quad e \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad em \quad \Omega \quad e \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij}\eta_j = \bar{T}_i \quad em \quad \Gamma_\sigma \quad (3.3)$$

onde  $\eta_j$  são os cossenos diretores de um elemento de superfície  $d\Gamma$ .

Entre os deslocamentos descritos no sistema global e as deformações do sistema local existem as relações de transformação cinemática:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad em \quad \Omega \quad (3.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad em \quad \Gamma_u \quad (3.5)$$

No sistema local existe também a relação entre tensões e deformações (relação constitutiva):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} \quad em \quad \Omega \quad (3.6)$$

onde  $C_{ijkl}$ , para um material linearmente elástico, isotrópico e homogêneo, vale:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3.7)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal ou de cisalhamento e  $\delta_{ij}$  é o delta Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.8)$$

A eq. (3.6) pode ser expressa, para este tipo de material, na forma:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (3.9)$$

Utilizando-se esta relação juntamente com a eq. (3.4), a equação de equilíbrio [eq. (3.1)] também pode ser expressa em termos de deslocamentos, resultando na equação de Navier:

$$Gu_{i,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,ki} + \bar{F}_i = 0 \quad (3.10)$$

### 3.2. Solução Fundamental de Kelvin

Considera-se o problema da determinação do campo de deslocamentos  $u_i^*$  em um meio contínuo de domínio  $\Omega^*$  e contorno  $\Gamma^*$ , submetido a uma força singular (concentrada)  $p_i^*$  aplicada em um ponto deste meio. Para um meio linearmente elástico, isotrópico e homogêneo, este campo de deslocamentos pode ser obtido através da resolução da equação de Navier, onde as componentes das forças de massa correspondem à força singular aplicada:

$$Gu_{i,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,ki}^* + \Delta p_i^* = 0 \quad (3.11)$$

onde  $\Delta$  é uma função singular (delta de Dirac) nula em todo domínio exceto em uma região  $\Omega_0$  arbitrariamente pequena de  $\Omega^*$  e que envolve o ponto de aplicação da força  $p_i^*$  (ponto forte), de acordo com o ilustrado na Figura 3.2.

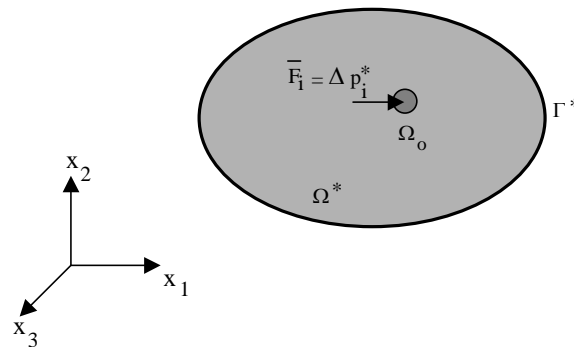


Figura 3.2 - Força singular aplicada em um ponto

No caso que houvesse várias forças singulares atuando neste meio, pode-se, por superposição de efeitos, generalizar a eq. (3.11)

$$Gu_{i,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,ki}^* + \Delta_{ij}p_j^* = 0 \quad (3.12)$$

sendo que neste caso o índice subscrito  $j$  refere-se às componentes das várias forças aplicadas  $p_j^*$ . Além disso, tem-se que:

$$\int_{\Omega_0} \Delta_{ij} d\Omega = \delta_{ij} \quad (3.13)$$

aqui  $\delta_{ij}$  tem o significado ligeiramente diferente do delta de Kronecker, já que o subscrito  $i$  varia de 1 a 3 (para três dimensões) enquanto o subscrito  $j$  varia de 1 ao número de graus de liberdade relacionados às forças singulares. Sendo assim:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{quando } i \text{ e } j \text{ se referem a} \\ & \text{mesma direção coordenada} \\ 0 & \text{em caso contrario} \end{cases} \quad (3.14)$$

Caso o domínio  $\Omega^*$  seja relacionado a um meio elástico de dimensões infinitas,  $\Gamma^*$  situa-se no infinito. O problema consiste, então, na determinação do campo de deslocamentos neste meio sem a imposição das condições de contorno. Os deslocamentos são, portanto, determinados a menos de uma constante e também exceto na vizinhança  $\Omega_0$  do ponto fonte. Esta solução corresponde à solução fundamental apresentada por Kelvin (Love, 1927):

$$u_i^* = (u_{ij}^* + C_{ij}) p_j^* \quad (3.15)$$

onde  $C_{ij}$  são constantes arbitrárias e  $u_{ij}^*$  representa uma função de interpolação (flexibilidade) que corresponde aos deslocamentos na direção  $i$  em um ponto qualquer do domínio (ponto campo), devido a uma carga unitária aplicada na direção  $j$  no ponto fonte. Para estado plano de deformação, esta função vale:

$$u_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left\{ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (3.16)$$

onde  $r$  é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo (raio).

A partir dos deslocamentos  $u_{ij}^*$  pode-se definir um campo de tensões  $\sigma_{ij}^*$ :

$$\sigma_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) (r_{,i} \delta_{jk} + r_{,j} \delta_{ki} - r_{,k} \delta_{ij}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} p_k^* \quad (3.17)$$

que satisfaz a seguinte equação de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j}^* + \Delta_{ij} p_j^* = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.18)$$

A partir das tensões  $\sigma_{ij}^*$  pode-se definir um campo de forças  $T_i^*$  no contorno:

$$T_i^* = \sigma_{ij}^* \eta_j = p_{ij}^* p_j^* \text{ em } \Gamma \quad (3.19)$$

onde  $p_{ij}^*$  representa uma função de interpolação que corresponde às forças na direção  $i$  em um ponto qualquer do contorno  $\Gamma$ , devido a uma carga unitária aplicada na direção  $j$  no ponto fonte. Para estado plano de deformação, esta função vale:

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial \eta} - (1-2\nu) (r_{,i} \eta_j - r_{,j} \eta_i) \right\} \quad (3.20)$$

### 3.3. Potencial de Hellinger-Reissner

A expressão da energia potencial total de um corpo elástico sujeito a pequenos deslocamentos é dada por:

$$\Pi = \int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij})d\Omega - \int_{\Omega} \bar{F}_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{T}_i u_i d\Gamma \quad (3.21)$$

a menos de uma constante. Neste funcional, o primeiro termo corresponde à energia total interna de deformação, onde

$$U_0(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.22)$$

e os demais referem-se ao potencial das forças externas  $\bar{F}_i$  e  $\bar{T}_i$  que atuam no corpo. Este potencial foi estabelecido sob as condições restritivas de compatibilidade geométrica, dadas pelas eq. (3.4) e (3.5).

Pode-se, no entanto, formular um potencial de forma independente destas restrições, de forma que estas não sejam atendidas previamente. Isto pode ser proporcionado através do acréscimo, no funcional, destas condições de restrição por intermédio de multiplicadores de Lagrange. O novo funcional resulta então em uma forma generalizada da energia potencial total:

$$\begin{aligned} \Pi_g = & \int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij})d\Omega - \int_{\Omega} \bar{F}_i u_i d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right] \lambda_{ij} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{T}_i u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_i - u_i) \lambda_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde  $\lambda_{ij}$  e  $\lambda_i$  são os multiplicadores de Lagrange. Os novos termos que surgem nesta equação compensam a eliminação feita previamente das condições restritivas.

Este novo potencial é função das variáveis  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $\lambda_{ij}$  e  $\lambda_i$  completamente independentes entre si, a princípio, sem qualquer relação direta com as forças prescritas  $\bar{F}_i$  e  $\bar{T}_i$ , e com os deslocamentos prescritos  $\bar{u}_i$ .

Pode-se reconhecer nos multiplicadores de Lagrange um sentido mecânico: a variável  $\lambda_{ij}$  corresponde às tensões no domínio, enquanto  $\lambda_i$  refere-se às forças no contorno. Além disto, observa-se que a imposição da estacionariedade do potencial (3.23) estabelece que as variáveis presentes devem ser relacionadas entre si através das eq. (3.1) a (3.6).

A expressão de  $\Pi_g$  na eq. (3.23) é, para finalidade prática, excessivamente geral. Pode-se supor, no entanto, que o tensor das tensões seja simétrico [eq. (3.2)], que as condições de contorno em termos de deslocamentos estejam previamente satisfeitas [eq. (3.5)] e que a densidade de energia interna seja expressa em termos de tensões, isto é, define-se

$$U_0^c(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} - U_0(\varepsilon_{ij}) \quad (3.24)$$

Para materiais linearmente elásticos, os valores destes dois termos  $U_0^c(\sigma_{ij})$  e  $U_0(\varepsilon_{ij})$  na verdade são iguais. A diferença existente consiste na forma como estas duas parcelas são descritas, conforme representado na Figura 3.3.

Além disso, através da consideração da simetria de  $\sigma_{ij}$ , pode-se escrever um dos integrandos da eq. (3.23) na forma

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (3.25)$$

que após a aplicação do teorema de Green e posterior integração por partes, pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} u_i \sigma_{ij} \eta_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_i \sigma_{ij,j} d\Omega \quad (3.26)$$

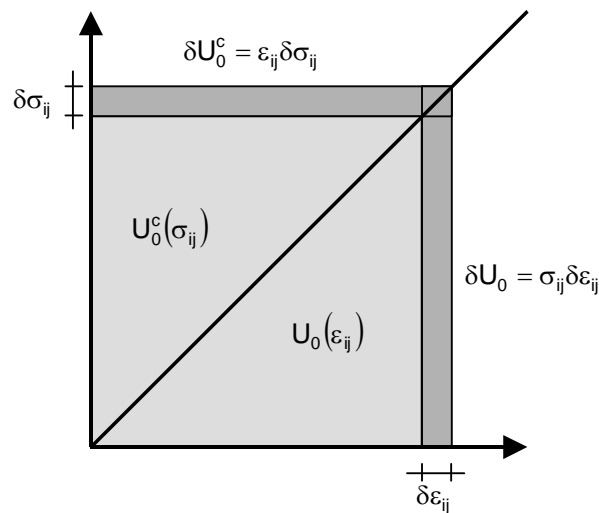


Figura 3.3 - Gráfico da energia interna de deformação

Com isto, recai-se no potencial de Hellinger-Reissner (Reissner, 1965):

$$-\Pi_R = \int_{\Omega} \left[ U_0^c(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i) u_i \right] d\Omega - \int_{\Gamma} u_i \sigma_{ij} \eta_j d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{T}_i u_i d\Gamma \quad (3.27)$$

função unicamente dos deslocamentos  $u_i$  e das tensões  $\sigma_{ij}$  (independentes entre si).

Supondo-se também que as tensões estejam em equilíbrio com as forças de massa no domínio [eq. (3.1)], chega-se à origem da formulação híbrida dos elementos finitos, desenvolvida por Pian (1966), em que se tem um campo de tensões no domínio e um campo de deslocamentos no contorno. Esta mesma formulação foi estendida ao método híbrido dos elementos de contorno, conforme será apresentado a seguir.

### 3.4. Estabelecimento da formulação

Na formulação híbrida dos elementos de contorno, a descrição do comportamento da estrutura deve ser feita através do estabelecimento de dois sistemas de coordenadas:

- a) Um sistema global ou externo, que descreve no contorno  $\Gamma$  um campo de deslocamentos  $u_i$  aproximados da seguinte forma:

$$u_i = u_{ij}d_j \quad \text{em } \Gamma \quad (3.28)$$

onde  $u_{ij}$  são funções de interpolação, escolhidas de tal forma que proporcionem a completa compatibilidade entre os deslocamentos  $u_i$  em  $\Gamma_u$  [eq. (3.5)], e  $d_j$  são parâmetros que podem ser fisicamente identificados como deslocamentos de determinados pontos do contorno.

- b) Um sistema local ou interno, que descreve no domínio  $\Omega$  um campo de tensões  $\sigma_{ij}^*$  em equilíbrio [eq. (3.1) e (3.2)]. Este campo de tensões é descrito por intermédio de forças  $p_k^*$ , correspondentes à solução fundamental, aplicadas em diversos pontos do contorno.

A utilização destes dois sistemas de coordenadas, para a descrição do comportamento da estrutura, tem como base a idéia de que o domínio  $\Omega$  da estrutura está contido no domínio de dimensões infinitas  $\Omega^*$ , onde a solução fundamental foi estabelecida, conforme está representado na Figura 3.4.

Estes dois sistemas de coordenadas podem ser relacionados através do potencial de Hellinger-Reissner:

$$-\Pi_R = \int_{\Omega} \left[ U_0^{*c}(\sigma_{ij}^*) + (\sigma_{ij,j}^* + \bar{F}_i)u_i \right] d\Omega - \int_{\Gamma} u_i \sigma_{ij}^* \eta_j d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{T}_i u_i d\Gamma \quad (3.29)$$

onde



$$U_0^{*c}(\sigma_{ij}^*) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^* = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* \quad (3.30)$$

é a densidade de energia complementar, ou seja, expressa em termos de tensões.

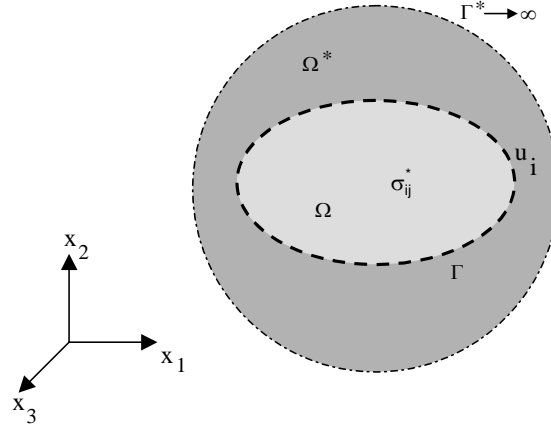


Figura 3.4 - Sistema de coordenadas, para descrição do comportamento da estrutura

Considera-se de início que as forças de massa  $\bar{F}_i$  sejam nulas. No desenvolvimento que se segue, considerar-se-á  $\Gamma_\sigma \equiv \Gamma$ , por uma questão de simplicidade da formulação, sem perda de generalidade, já que se tem garantido a priori, que os deslocamentos  $u_i$ , satisfazem sempre a condição de compatibilidade no contorno [eq. (3.5)].

A condição de estacionariedade do funcional  $\Pi_R$ , para as considerações feitas, resulta em:

$$-\delta \Pi_R = 0 = \delta \int_{\Omega} [U_0^{*c}(\sigma_{ij}^*) + \sigma_{ij}^* u_{i,j}^*] d\Omega - \delta \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* \eta_j u_i d\Gamma + \delta \int_{\Gamma} \bar{T}_i u_i d\Gamma \quad (3.31)$$

A variação do termo da energia interna é dada por:

$$\delta \int_{\Omega} U_0^{*c}(\sigma_{ij}^*) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* d\Omega \quad (3.32)$$

que, após integração por partes e aplicação do teorema de Green, recai em:

$$\delta \int_{\Omega} U_0^{*c}(\sigma_{ij}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \sigma_{ij}^* \eta_j u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* d\Omega \quad (3.33)$$

A substituição de  $u_i^*$ ,  $\sigma_{ij,j}^*$  e  $\sigma_{ij}^* \eta_j$  das eq. (3.15), (3.18) e (3.19), respectivamente nesta equação, resulta finalmente em:

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} U_0^{*c}(\sigma_{ij}^*) d\Omega &= \delta p_k^* \left[ \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_{il}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta_{ik}^* u_{i,l}^* d\Omega \right] p_i^* + \\ &\delta p_k^* \left[ \int_{\Gamma} p_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta_{ik}^* d\Omega \right] C_{ip} p_l^* \end{aligned} \quad (3.34)$$

que pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta U_0^{*c}(\sigma_{ij}^*) d\Omega = \delta p_k^* F_{kl} p_l^* \quad (3.35)$$

onde

$$F_{kl} \equiv [\mathbf{F}] \equiv \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_{il}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta_{ik} u_{i,l}^* d\Omega \quad (3.36)$$

é uma matriz de flexibilidade simétrica que relaciona forças e deslocamentos do sistema interno de coordenadas. A segunda expressão em colchetes da eq. (3.34) desaparece, já que a condição de equilíbrio

$$\int_{\Gamma} p_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta_{ik} d\Omega = 0 \quad (3.37)$$

é satisfeita para qualquer valor de  $C_{il} p_l^*$ , pela própria definição da solução fundamental.

A integral do segundo termo em colchetes da eq. (3.31) pode ser escrita, depois da substituição de  $\sigma_{ij,j}^*$  e de  $u_i$  através das eq. (3.18) e (3.28), respectivamente, como:

$$\delta \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega = -\delta p_k^* \int_{\Omega} \Delta_{ik} u_{i,l} d\Omega d_l - \delta d_k \int_{\Omega} \Delta_{il} u_{ik} d\Omega p_l^* \quad (3.38)$$

Analogamente, a primeira integral de contorno da eq. (3.31) pode ser expressa, depois das substituições de  $\sigma_{ij}^* \eta_j$  e  $u_i$  das eq. (3.19) e (3.28), como:

$$\delta \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* \eta_j u_i d\Gamma = -\delta p_k^* \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_{il} d\Gamma d_l - \delta d_k \int_{\Gamma} p_{il}^* u_{ik} d\Gamma p_l^* \quad (3.39)$$

Somando-se estas duas últimas equações, chega-se a:

$$\delta \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \delta \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* \eta_j u_i d\Gamma = -\delta p_k^* H_{kl} d_l - \delta d_k H_{lk} p_l^* \quad (3.40)$$

onde

$$H_{kl} \equiv [\mathbf{H}] = \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_{il} d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta_{ik} u_{il} d\Omega \quad (3.41)$$

é uma matriz de transformação cinemática entre deslocamentos dos sistemas interno e externo de coordenadas, conforme será apresentado oportunamente. Esta matriz corresponde à mesma matriz  $[\mathbf{H}]$  obtida na formulação convencional dos elementos de contorno (Brebbia et al, 1984), sendo que neste contexto, geralmente não lhe é atribuída nenhum significado físico.

Finalmente, a última integral da eq. (3.31) resulta, após a substituição de  $u_i$ , dado na eq. (3.28), em:

$$\delta \int_{\Gamma} \bar{T}_i u_i d\Gamma = \delta d_k p_k \quad (3.42)$$

onde

$$p_k \equiv \{\mathbf{p}\} = \int_{\Gamma} \bar{T}_i u_i d\Gamma \quad (3.43)$$

é um vetor de forças nodais equivalentes, em termos energéticos, às forças de superfície  $\bar{T}_i$  correspondente ao campo de deslocamentos adotado no contorno, segundo a eq. (3.28) este vetor é obtido de modo completamente análogo ao que é feito no Método dos Elementos Finitos.

A partir das eq. (3.36), (3.41) e (3.43), é possível reescrever o princípio de Hellinger-Reissner [eq. (3.31)], na forma discretizada:

$$-\delta\Pi_R = 0 = \delta p_k^* (F_{kl} p_l^* - H_{kl} d_l) + \delta d_k (p_k - H_{lk} p_l^*) \quad (3.44)$$

que, para quaisquer valores de  $\delta p_k^*$  e  $\delta d_k$ , resulta, em notação matricial, no sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} -[\mathbf{F}] & [\mathbf{H}] \\ [\mathbf{H}]^T & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}^*\} \\ \{\mathbf{d}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{p}\} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Este sistema de equações tem exatamente a mesma forma do sistema proveniente da Formulação Híbrida do Método dos Elementos Finitos, podendo ser resolvido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} &= \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{p}^*\} &= [\mathbf{F}]^{-1}[\mathbf{H}]\{\mathbf{d}\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{H}]^T [\mathbf{F}]^{-1} [\mathbf{H}] \quad (3.47)$$

é uma matriz de rigidez simétrica, que transforma deslocamentos  $\{\mathbf{d}\}$  do sistema externo de coordenadas em forças nodais equivalentes  $\{\mathbf{p}\}$ .

Pode-se observar, de imediato, que para a obtenção das matrizes de flexibilidade  $\{\mathbf{F}\}$  e de incidência cinemática  $[\mathbf{H}]$ , além do vetor de forças nodais equivalentes  $\{\mathbf{p}\}$ , é requerida apenas a integração no contorno  $\Gamma$  da estrutura. Esta característica intrínseca dos métodos de contorno advém da própria natureza da solução fundamental adotada, a qual atende a equação de equilíbrio no domínio  $\Omega$ . Aliada a esta propriedade da solução fundamental está a utilização das forças singulares para a descrição deste campo de tensões, o que proporciona integrais de domínio que somente existem em torno de pontos discretos onde estas forças são aplicadas.

### 3.5.

#### Transformações entre o sistema interno e externo de coordenadas

A eq. (3.45), que pode ser escrita na forma das eq. (3.46) e (3.47) define transformações lineares que relacionam os dois sistemas de coordenadas utilizados para o estabelecimento do comportamento da estrutura.

No sistema externo ou global, os deslocamentos nodais  $\{\mathbf{d}\}$  descrevem através da eq. (3.28) um campo de deslocamentos  $u_i$  compatível em todo o contorno  $\Gamma$ . A estes deslocamentos  $\{\mathbf{d}\}$  correspondem às forças nodais  $\{\mathbf{p}\}$  energeticamente equivalentes às solicitações externas que atuam no contorno, de acordo com a eq. (3.43). Os deslocamentos  $\{\mathbf{d}\}$  podem assumir valores arbitrários, porém as forças equivalentes  $\{\mathbf{p}\}$  devem ser sempre auto-equilibradas. Caso estes deslocamentos correspondam a movimento de corpo rígido, as forças nodais equivalentes devem ser nulas. Em termos de trabalhos virtuais, isto significa que:

$$[\mathbf{W}]^T \{\mathbf{p}\} = \mathbf{0} \quad (3.48)$$

onde  $[\mathbf{W}]$  é uma matriz cujas colunas formam a base do espaço dos deslocamentos de corpo rígido. Para o caso bidimensional, existem três modos de deslocamentos de corpo rígido, sendo duas translações e uma rotação.

Estas considerações implicam no fato de que a matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$ , que relaciona as forças e deslocamentos do sistema externo [eq. (3.46)], é singular, e seu espaço nulo é formado pela base do espaço de deslocamentos de corpo rígido, ou seja:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{W}] = [\mathbf{0}] \quad (3.49)$$

No sistema interno ou local, as forças nodais  $\{\mathbf{p}^*\}$  definem através da eq. (3.17), um campo de tensões em equilíbrio no domínio  $\Omega$ . A partir deste campo de tensões obtém-se um campo de deformações, que integradas, fornecem um campo de deslocamentos  $u_i^*$  definido em todo o domínio, exceto no ponto de aplicação das forças singulares, e a menos de uma constante. A estas forças nodais  $\{\mathbf{p}^*\}$  correspondem deslocamentos nodais  $\{\mathbf{d}^*\}$ , que podem ser definidos a partir do princípio dos trabalhos virtuais na forma complementar:

$$\delta p_k^* d_k^* = \delta \int_{\Omega} U_0^*(\sigma_{ij}^*) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* d\Omega = \delta p_k^* F_{kl} p_l^* \quad (3.50)$$

logo,

$$\{\mathbf{d}^*\} = [\mathbf{F}]\{\mathbf{p}^*\} \quad (3.51)$$

Estes deslocamentos nodais equivalentes não são reais, mas sim grandezas mecanicamente equivalentes, em termos de deslocamentos, ao campo de deslocamentos correspondente às forças singulares aplicadas.

Da primeira equação do sistema (3.45), juntamente com a eq. (3.51), conclui-se que  $[\mathbf{H}]$  é uma matriz de incidência cinemática que relaciona os deslocamentos nodais  $\{\mathbf{d}\}$  do sistema externo, com os deslocamentos nodais equivalentes  $\{\mathbf{d}^*\}$  do sistema interno de coordenadas:

$$\{\mathbf{d}^*\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{d}\} \quad (3.52)$$

Da segunda equação do sistema (3.45) advém que a matriz  $[\mathbf{H}]^T$  realiza uma transformação de equilíbrio entre forças nodais  $\{\mathbf{p}^*\}$  do sistema interno e as forças nodais equivalentes  $\{\mathbf{p}\}$  do sistema externo de coordenadas:

$$\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{H}]^T\{\mathbf{p}^*\} \quad (3.53)$$

o que equivale ao princípio da contragradência.

A condição de ortogonalidade de  $\{\mathbf{p}\}$  ao espaço de deslocamentos de corpo rígido [eq. (3.48)], leva à:

$$[\mathbf{H}][\mathbf{W}] = [\mathbf{0}] \quad (3.54)$$

ou seja, a matriz de incidência cinemática  $[\mathbf{H}]$  é singular, e seu espaço nulo é o mesmo da matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  o que permite concluir que deslocamentos de corpo rígido  $\{\mathbf{d}\}$  não podem ser transformados em deslocamentos nodais equivalentes  $\{\mathbf{d}^*\}$ .

Baseado no fato de que as forças nodais equivalentes  $\{\mathbf{p}\}$  são nulas para os deslocamentos de corpo rígido  $\{\mathbf{d}\}$ , além de que  $[\mathbf{H}]$  é uma matriz singular que realiza a transformação de equilíbrio entre as forças nodais  $\{\mathbf{p}\}$  e  $\{\mathbf{p}^*\}$  (eq. (3.53)), depreende-se que, devem existir forças  $\{\mathbf{p}^*\}$  que não podem ser transformadas em forças nodais equivalentes  $\{\mathbf{p}\}$ , referentes a deslocamentos de corpo rígido. Logo:

$$[\mathbf{H}]^T[\mathbf{V}] = [\mathbf{0}] \quad (3.55)$$

onde  $[\mathbf{V}]$  é uma matriz cujas colunas formam a base do espaço de forças  $\{\mathbf{p}^*\}$  que correspondem a forças nodais equivalentes  $\{\mathbf{p}\}$  nulas, ou seja, correspondem apenas aos deslocamentos de corpo rígido.

Aplicando-se o princípio dos deslocamentos virtuais aos dois sistemas de coordenadas, tem-se que:

$$\delta d_i p_i = \delta d_i^* p_i^* = \delta p_k^* F_{ki} p_i^* \quad (3.56)$$

Caso as forças nodais  $p_i^*$  pertençam ao espaço coberto pelas colunas da base  $[V]$ , o trabalho virtual representado nesta equação é nulo para qualquer  $\delta p_k^*$ , ou seja:

$$[F][V] = [0] \quad (3.57)$$

Pode-se concluir então que forças nodais  $\{p^*\}$  pertencentes ao espaço definido por  $[V]$  também produzem deslocamentos equivalentes  $\{d^*\}$  nulos. Isto significa que a matriz de flexibilidade  $[F]$  do sistema interno é singular, e o espaço nulo desta matriz é o mesmo da matriz  $[H]^T$ . A base  $[V]$ , conforme à eq. (3.55), é obtida a partir de  $[H]^T$ , sendo, portanto influenciada pela função de interpolação  $u_{ij}$ . Isto assegura através da eq. (3.57), uma clara dependência entre a matriz de flexibilidade  $[F]$  e na forma de como os deslocamentos são descritos no contorno, a qual inexistia até então.

### 3.6.

#### Obtenção de tensões e deslocamento no domínio

A solução dos sistemas de eq. (3.45) e (3.46) fornece como resultados iniciais, de acordo como as condições de contorno, os elementos desconhecidos do vetor de forças nodais equivalentes  $\{p\}$  (reações de Apoio) e do vetor de deslocamentos nodais  $\{d\}$  no contorno  $\Gamma$ . Feito isto, obtêm-se o vetor de forças nodais  $\{p^*\}$  do sistema interno de coordenadas. As tensões e os deslocamentos do domínio  $\Omega$  podem então ser expressos como funções destas forças nodais  $\{p^*\}$ , conforme será mostrado a seguir.

A solução fundamental descreve através das forças  $\{p^*\}$ , um campo de tensões em equilíbrio [eq. (3.18)]. A presente formulação pressupõe que este campo de tensões permite a representação aproximada de um estado qualquer de tensões em um domínio  $\Omega$  de geometria qualquer.

Deste modo, as tensões e os deslocamentos são definidos em todo o domínio  $\Omega$ , a partir das forças nodais  $\{p^*\}$ , exceto nos pontos de aplicação destas forças. As tensões podem então ser obtidas diretamente através da eq. (3.17), e os deslocamentos são obtidos, a menos de uma constante, através da eq. (3.16).

Convém ressaltar que este modo de se obter os resultados internos no Método Híbrido dos Elementos de Contorno representa uma grande vantagem em relação ao método convencional. Este procedimento se torna incomparavelmente mais simples e mais rápido, uma vez que não acarreta em nenhuma integração adicional, conforme o que é feito classicamente no método convencional (Brebbia et al, 1984).

### 3.7. Caso particular de estruturas estaticamente determinadas

Quando as forças nodais são completamente conhecidas em todo o contorno da estrutura, diz-se que as condições de contorno são somente do tipo Neumann. Neste caso, a estrutura está externamente, ou estaticamente, determinada.

Para este caso particular de estruturas, o vetor de forças nodais  $\{\mathbf{p}^*\}$  pode ser obtido, de uma maneira bastante simplificada, através da eq. (3.53), juntamente com a condição de ortogonalidade dada pela equação **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**

$$\begin{Bmatrix} [\mathbf{H}]^T \\ [\mathbf{V}]^T \end{Bmatrix} \{\mathbf{p}^*\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Deste modo, apenas a matriz de incidência cinemática precisa ser calculada. Esta peculiaridade é uma característica muito relevante do presente método, haja vista que esta operação demanda um esforço computacional bastante reduzido. Procede-se então, à obtenção do estado interno de tensões, a partir do vetor  $\{\mathbf{p}^*\}$ .

O sistema retangular de eq. (3.58) é consistente e admite uma resposta única. Isto ocorre porque tanto as forças nodais equivalentes  $\{\mathbf{p}\}$ , quanto a matriz de incidência cinemática  $[\mathbf{H}]$  satisfazem a condição de ortogonalidade estabelecida pelas eq. (3.48) e (3.54) respectivamente. Este sistema pode ser resolvido pelo Método dos Mínimos Quadrados, onde se requer que  $\{\mathbf{p}^*\}$  seja tal que:

$$\left( \{\mathbf{p}^*\}^T [\mathbf{H}][\mathbf{V}] - \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix}^T \right) \left( \begin{Bmatrix} [\mathbf{H}]^T \\ [\mathbf{V}]^T \end{Bmatrix} \{\mathbf{p}^*\} - \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \right) = \min \quad (3.59)$$

sendo que este mínimo é nulo, já que o problema é consistente. Derivando-se esta equação em relação a  $\{\mathbf{p}^*\}$  e igualando-a a zero, chega-se a:

$$([\mathbf{H}][\mathbf{H}]^T + [\mathbf{V}][\mathbf{V}]^T)\{\mathbf{p}^*\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{p}\} \quad (3.60)$$

onde o termo entre parênteses equivale a uma matriz simétrica positiva definida.

Deve-se observar, no entanto que, para este caso particular, os deslocamentos nodais  $\{\mathbf{d}\}$  não podem ser obtidos apenas através da solução do sistema de eq. (3.58).