

2 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DA FRATURA

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos da mecânica de fratura, dando maior ênfase na mecânica da fratura linear elástica (MFLE) em duas dimensões, teoria na qual se baseia o presente trabalho de mestrado. Utilizou-se neste capítulo como alicerce teórico os trabalhos feitos por Anderson (1995); Unger (1995); Lopes (2002); Castro & Meggiolaro (2009).

2.1. Mecânica da Fratura

A resistência à tração de um material a nível macroscópico é da ordem de dez a cem vezes menor que a resistência estimada a nível atômico. Ao longo das pesquisas, foi descoberto que pequenos defeitos ou microfissuras, decorrentes de esforços impostos à peça estrutural ou mesmo do processo de fabricação, agem como pólos concentradores de tensões e diminuem a resistência da peça estrutural.

Por outro lado, a maioria das peças e estruturas reais têm a presença de transições bruscas de geometria ou entalhes como furos, rasgos, ombros ou outros detalhes geométricos similares, onde a seção varia bruscamente. Estas geometrias geram nas peças tensões muito maiores que a tensão nominal.

Têm-se também, as cargas concentradas, que geralmente são aplicadas em pontos específicos da estrutura gerando fortes tensões nas faces em contato com a estrutura.

A necessidade de qualificar e, principalmente quantificar os efeitos das microfissuras contidas no material estrutural, da presença de transições bruscas de geometria e dos pontos de aplicação das cargas concentradas, deu origem ao ramo interdisciplinar da ciência intitulado **Mecânica da Fratura**.

Fratura é um problema que o homem vem enfrentando desde a fabricação das primeiras peças estruturais. O problema hoje é ainda maior que nos séculos anteriores, devido a que vem sendo usados novos materiais e vem sendo construídas estruturas cada vez mais complexas e/ou de tamanhos maiores. Por outro lado, vem-se obtendo grandes avanços no conhecimento da mecânica da

fratura que, com ferramentas cada vez mais poderosas tais como os métodos numéricos e os computadores nos permitem uma análise mais detalhada.

Até 1960, os conceitos da mecânica da fratura eram aplicáveis somente a materiais que obedecessem às leis de Hooke. Apesar de correções para pequenos níveis de plasticidade terem sido propostas, todas as análises eram restritas a estruturas que apresentassem um comportamento global linearmente elástico. Nesse período, todos os problemas de fratura eram abordados utilizando-se os conceitos da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE).

O principal parâmetro definido pela MFLE foi o fator de intensidade de tensão K . Este fator possibilita a caracterização e previsão do comportamento de uma trinca evitando acidentes indesejáveis.

Após 1960, diversas teorias da mecânica da fratura foram desenvolvidas para vários tipos de comportamentos não-lineares dos materiais. Todas essas teorias, entretanto, são extensões da mecânica da fratura linear elástica. Com isto, fica evidente que o conhecimento dos fundamentos da MFLE é essencial para o entendimento dos mais avançados conceitos em mecânica da fratura.

Este capítulo tem como objetivo mostrar os fundamentos da mecânica da fratura, explicitando a importância do fator de intensidade de tensão na aplicação da MFLE a situações reais, sempre visando na análise numérica.

2.2. Concentração de Tensões

As fórmulas clássicas da análise tradicional de tensões (ou da resistência dos materiais) só servem para calcular as chamadas tensões nominais σ_n , as quais desprezam os efeitos localizados nas transições geométricas bruscas. Estas equações só são válidas nas regiões da peça que ficam longe destas transições bruscas de geometria e dos pontos de aplicação das cargas concentradas. Como a maioria das peças reais tem entalhes como furos, rasgos, ombros ou outros detalhes geométricos similares, onde a seção varia bruscamente, os quais são em geral indispensáveis para a fixação e/ou a operação da peça, estes entalhes concentram localmente as tensões nominais que atuam na peça.

A primeira solução analítica de um problema de concentração de tensões foi obtida em 1898 por Kirsh (Timoshenko & Goodier, 1970) quem, ao calcular as tensões tangenciais $\sigma_\theta(r, \theta)$ em torno de um furo circular de raio R em uma placa infinita tracionada (Figura 2.1), obteve a seguinte expressão:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_n}{2} \left[\left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (2.1)$$

logo, o furo circular introduz na placa de Kirsh um fator de concentração de tensões K_t , que é definido por:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = 3 \quad (2.2)$$

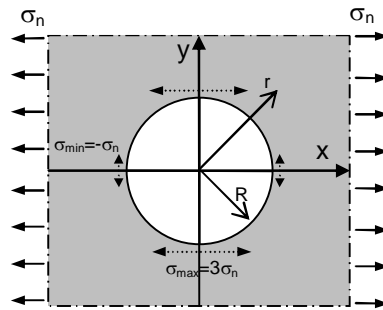


Figura 2.1 - Entalhe circular em uma placa plana infinita

Inglis (1913) quantificou os efeitos da concentração de tensão de entalhes elípticos em placas planas infinitas (largura $\gg 2a$ e comprimento $\gg 2b$, na Figura 2.2). Nesta análise, Inglis obteve uma expressão que determina a tensão na extremidade do maior eixo da elipse, ilustrada na Figura 2.2 (ponto A).

$$\sigma_A = \sigma_n \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.3)$$

onde ρ é o raio de curvatura da ponta da elipse calculado através da expressão:

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (2.4)$$

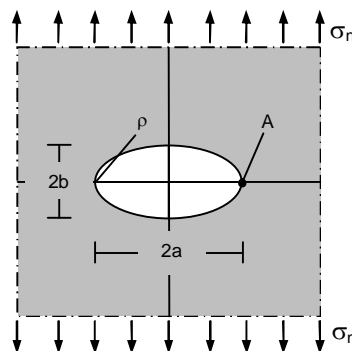


Figura 2.2 - Entalhe elíptico em uma placa plana infinita

Logo, o furo elipsoidal introduz na placa de Inglis o seguinte fator de concentração de tensões:

$$K_t = \frac{\sigma_A}{\sigma_n} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2.5)$$

De acordo com a eq. (2.5) o efeito da concentração de tensões é maior quanto mais afiado for o entalhe, ou seja, quanto menor for o raio de curvatura na ponta da elipse. Mas a concentração de tensão para um raio nulo na ponta de uma trinca tende a infinito e a ruptura ocorreria a uma tensão próxima de zero, o que não acontece experimentalmente. Foi Griffith (1920) quem resolveu o paradoxo decorrente da aplicação dos resultados de Inglis a uma trinca.

2.3. Balanço de energia de Griffith

Por volta de 1920, Griffith (1920) realizava experiências utilizando vidro, material de ruptura frágil, contendo uma trinca de tamanho $2a$ em seu interior (Figura 2.3).

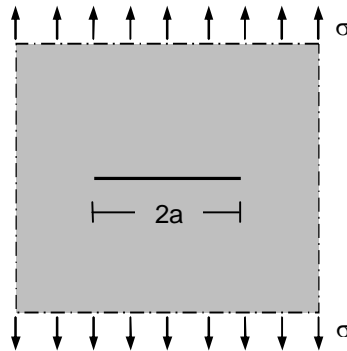


Figura 2.3 - Modelo de Griffith para uma trinca

Segundo Griffith a trinca se propagaria de maneira instável se a energia de deformação liberada quando a trinca avançasse um comprimento infinitesimal fosse igual ou maior que a energia requerida para formar uma nova superfície de trinca, isto é, a energia necessária para romper a coesão entre os átomos à frente da trinca; assim, tem-se a seguinte expressão:

$$G \geq 2\gamma \quad (2.6)$$

onde G é a taxa de liberação de energia de deformação por unidade de área de crescimento da trinca e γ é o trabalho necessário para formar uma nova superfície de trinca. A taxa de dissipação de energia de deformação G é função do carregamento e do tamanho da trinca.

Considerando a trinca como o caso limite de uma cavidade elíptica, Griffith, utilizando a análise de tensões de Inglis, mostrou que a taxa de liberação de energia de deformação para estado plano de tensão era dada por:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.7)$$

onde σ é a tensão aplicada remotamente em uma direção perpendicular à trinca e E o módulo de Young do material. De acordo com a eq. (2.7), no início da instabilidade ($G = 2\gamma$) a tensão crítica σ_c está relacionada com o comprimento crítico da trinca a_c através da seguinte equação:

$$\sigma_c \sqrt{a_c} = \sqrt{\frac{G_c E}{\pi}} = \text{constante} \quad (2.8)$$

Logo, existe um valor crítico de G a partir do qual o crescimento da trinca é instável. A eq. (2.8) evidencia que G_c é uma propriedade de cada material, podendo ser tabelado para comparações.

Os experimentos de Griffith foram feitos em vidro, material frágil que se trinca com pouca ou nenhuma deformação permanente. A maioria dos materiais estruturais, como por exemplo, os metais, são dúcteis; o que significa que o trincamento é acompanhado de uma deformação permanente. Irwin (1948) e Orowan (1948), independentemente um do outro, sugeriram uma extensão do critério do balanço energético de Griffith para materiais dúcteis. Eles propuseram que a falha ocorreria se:

$$G \geq 2\gamma + \Delta \quad (2.9)$$

onde Δ é o trabalho não recuperável associado à deformação permanente na ponta da trinca. Para materiais dúcteis, onde $\Delta \gg \gamma$, o critério energético se resume a:

$$G \geq \Delta \quad (2.10)$$

Esta relação explica a necessidade de realizar mais trabalho para fraturar um material dúctil em comparação com um material frágil.

2.4. Fatores de Intensidade de Tensão

Durante a segunda guerra mundial, os chamados %liberty Ships+ apresentaram problemas que incentivaram um grupo de pesquisa em mecânica da fratura do laboratório de pesquisa naval dos Estados Unidos, o qual tinha como chefe ao Dr. G. R. Irwin, a estudar com mais detalhes os problemas de

fratura. Após a segunda guerra mundial, em 1956, as falhas na fuselagem de vários aviões a jato Comet chamaram ainda mais a atenção dos pesquisadores para tais problemas.

Em 1957, Irwin (1957), que já havia dado uma grande contribuição ao estender as análises de Griffith a materiais dúcteis, deu um passo crucial no desenvolvimento da mecânica da fratura, obtendo, devido ao contexto favorável imposto pelos problemas com os Comet, a aceitação imediata por parte da comunidade industrial e científica. Com base nas análises de tensões feitas por Westergaard (1939), Irwin constatou que o campo de tensões em torno da ponta de uma trinca se comportava sempre da mesma maneira: as soluções, desenvolvidas em forma de série, são sempre singulares na ponta da trinca e o termo que lidera esta singularidade é sempre proporcional a um fator, designado por ele como "Fator de Intensidade de Tensão K ". Durante este mesmo período, Williams (1957), utilizando análises ligeiramente diferentes, obteve resultados equivalentes.

Segundo Irwin, o campo de tensões, em um sistema polar de coordenadas com origem na ponta da trinca (Figura 2.4), é dado por:

$$\sigma_{ij} = \left[\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right] f_{ij}(\theta) + \text{termos de ordem superior} \quad (2.11)$$

Onde K é o fator de intensidade de tensão e $f_{ij}(\theta)$ é uma função adimensional de θ .

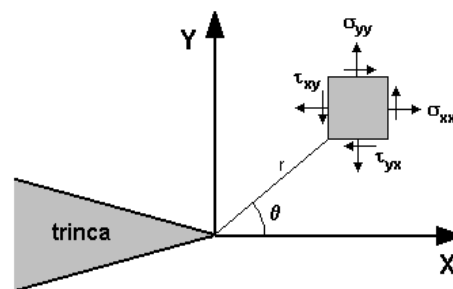


Figura 2.4 - Definição do sistema de coordenadas para a trinca

Dependendo do tipo de carregamento imposto à estrutura, podem surgir três modos fundamentais de trincamento caracterizados pelo movimento relativo entre as duas faces da trinca (Figura 2.5): Modo I, de abertura, quando a trinca está sujeita à tensão de tração; modo II, de deslizamento, quando sujeita à tensão cisalhante e modo III de rasgamento.

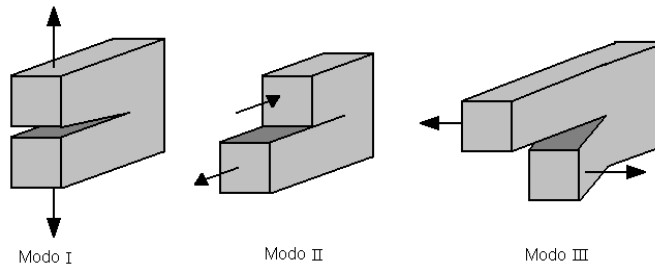


Figura 2.5 - Modos fundamentais de trincamento

Para cada um dos modos de trincamento existe um fator de intensidade de tensão relacionado. A Tabela 2.1 mostra o primeiro termo da série de Irwin para as tensões e deslocamentos nos modos I e II de trincamento no sistema cartesiano de coordenadas.

	Modo I	Modo II
σ_{xx}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_{yy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
u_x	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
u_y	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

Tabela 2.1 - Tensões e deslocamentos para os modos I e II de trincamento no sistema cartesiano de coordenadas

onde:

$\kappa = 3 - 4\nu$ Para estado plano de deformações.

$\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ Para estado plano de tensões.

E Módulo de elasticidade transversal.

ν Coeficiente de Poisson.

A Tabela 2.2 mostra as tensões nos modos I e II de trincamento no sistema polar de coordenadas

	Modo I	Modo II
σ_{rr}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{5}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{5}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
$\sigma_{\theta\theta}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
$\sigma_{r\theta}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$

Tabela 2.2 - Tensões para os modos I e II de trincamento no sistema polar de coordenadas

O fator de intensidade de tensão é função da forma e tamanho da trinca, da geometria e do carregamento que solicita a peça estrutural. Soluções analíticas ou empíricas para K foram tabeladas para diversos tipos de configurações de geometria e carga. Para situações mais complexas a análise de tensões que permite calcular o fator de intensidade de tensão é realizada utilizando-se métodos numéricos.

Para uma placa infinita, remotamente carregada (Figura 2.3), o fator de intensidade de tensão é dado por (Anderson, 1995):

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.12)$$

Comparando-se as eq. (2.12) e (2.7) pode-se chegar a uma relação entre a taxa de dissipação de energia de deformação (G) e o fator de intensidade de tensão (K_I):

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (2.13)$$

validas para problemas de estado plano de tensão. A eq. (2.13) foi obtida a partir de equações que se referem a uma trinca horizontal contida em uma placa infinita, porém, considerando o trabalho elástico para fechar a ponta de uma trinca, Irwin obteve a expressão geral:

$$G = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}^2}{E} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.14)$$

De posse de uma relação entre G e K , é imediato avaliar que, se existe um valor crítico G_c , a partir do qual o crescimento da trinca é instável, existe um valor crítico de K correspondente. Com isto fica provado que o fator de

intensidade de tensão pode ser utilizado como parâmetro de controle de propagação de fissuras.

2.5. Função de Tensão Complexa de Westergaard

Westergaard (1939) mostrou que um limitado tipo de problemas pode ser resolvido introduzindo uma função de tensão complexa $\phi(z)$, onde $z = x + iy$ e $i = \sqrt{-1}$. Para o modo I de trincamento, Westergaard propôs para as tensões

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^I &= \Re(\phi_I) - y\Im(\phi_I') \\ \sigma_{yy}^I &= \Re(\phi_I) + y\Im(\phi_I') \\ \tau_{xy}^I &= -y\Re(\phi_I')\end{aligned}\quad (2.15)$$

onde $\Re()$ e $\Im()$ são parte real e imaginária da função, respectivamente. ϕ' é a derivada da função de tensão dada por $\phi' = (\phi)'$ ou $\phi' = d(\phi)/dz$.

A parte imaginária das tensões desaparece para um valor de $y=0$, implicando que o plano da trinca é o plano principal. Assim os campos de tensões são simétricos em torno a $\theta=0$.

A função de tensão complexa de Westergaard na sua forma original é apropriada para resolver um número limitado de problemas no modo I de trincamento. Posteriores modificações generalizaram a função de Westergaard para ser aplicada a um número maior de configurações de trincas.

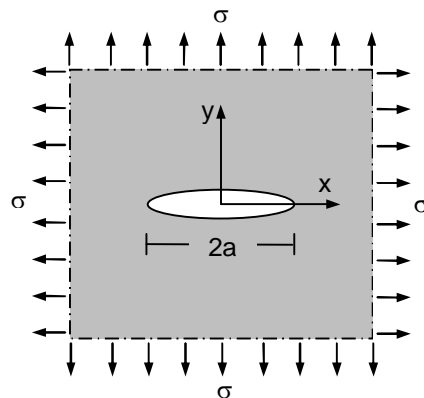


Figura 2.6 - Trinca em uma placa infinita submetida a tensão biaxial

Considere-se uma trinca em uma placa infinita, submetida a um carregamento biaxial remoto (Figura 2.6). Se a origem é definida no centro da trinca, a função de tensão complexa de Westergaard é dada por:

$$\phi_I(z) = \sigma \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.16)$$

onde σ é a tensão remota e a é a metade do comprimento da trinca, como definido na Figura 2.6. Porém a forma da eq. (2.16) impossibilita a correta interpretação do sinal complexo da função de tensão z , sendo necessário reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\phi(z) = \sigma \frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.17)$$

Considere-se o plano da trinca; onde $y=0$, para valores de x entre $-a < x < a$, o valor de z é puramente imaginária, enquanto que para valores de x , $|x| > |a|$, as tensões normais no plano da trinca são dadas por:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \Re(\phi) = \sigma \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (2.18)$$

considere-se agora a origem na ponta da trinca, $x^* = x - a$, sendo $x^* \ll a$, a eq. (2.18) resulta em:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma \frac{\sqrt{(x^* + a)^2}}{\sqrt{x^*(x^* + 2a)}} \quad (2.19)$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma \frac{\sqrt{x^{*2} + 2x^*a + a^2}}{\sqrt{x^{*2} + 2x^*a}} \quad (2.20)$$

Como $x^* \ll a$, pode-se simplificar a eq. (2.20) para:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2x^*}} \quad (2.21)$$

Para o caso particular de $\theta = 0$ tem-se as tensões σ_{xx}^I e σ_{yy}^I da Tabela 2.1 como:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x^*}} \quad (2.22)$$

desta maneira a aproximação de Westergaard nos conduz à singularidade da inversa da raiz-quadrada $(1/\sqrt{x^*})$.

Comparando as eq. (2.21) e (2.22) tem-se:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.23)$$

que relaciona o parâmetro σ com K_I .

Por outro lado, substituindo-se a eq. (2.23) na eq. (2.17) e considerando:

$$\begin{aligned} z^* &= z - a \\ z^* &\ll a \end{aligned} \quad (2.24)$$

tem-se:

$$\phi_I(z^*) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z^*}} \quad (2.25)$$

de onde resulta:

$$\phi_I(z^*) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} z^{*\left(-\frac{1}{2}\right)} \quad (2.26)$$

sendo sua derivada em relação a z^* dada por:

$$\phi'(z^*) = -\frac{1}{2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} z^{*\left(-\frac{3}{2}\right)} \quad (2.27)$$

fazendo-se agora:

$$z^* = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2.28)$$

obtêm-se as componentes de tensão dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{yy}^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \tau_{xy}^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

que são exatamente as componentes de tensão propostas por Williams.

Uma análise semelhante pode ser feita para o modo II de trincamento, bastando para isso considerar a seguinte função de tensão:

$$\phi_{II}(z) = -i\tau \frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.30)$$

o campo de tensões é descrito a partir de

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{II} &= 2\Re(\phi_{II}) - y\Im(\phi'_{II}) \\ \sigma_{yy}^{II} &= y\Im(\phi'_{II}) \\ \tau_{xy}^{II} &= -\Im(\phi_{II}) - y\Re(\phi'_{II}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

e o fator de intensidade de tensão é calculado a partir de

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a} \quad (2.32)$$

As soluções fundamentais das eq. (2.17) e (2.30) ainda podem ser modificadas, obtendo-se as funções de tensão de Westergaard modificada proposta por Dumont e Lopes (2003), a saber:

$$\begin{aligned}\phi_I(z) &= \sigma \left(\frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \\ \phi_{II}(z) &= -i\tau \left(\frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right)\end{aligned}\quad (2.33)$$

Estas modificações consistem em adicionar um termo constante para forçar um carregamento na trinca e zerar as solicitações em pontos distantes, sem que isto influencie na natureza do campo de tensões, a Figura 2.7 ilustra esta modificação para o caso particular do modo I de trincamento

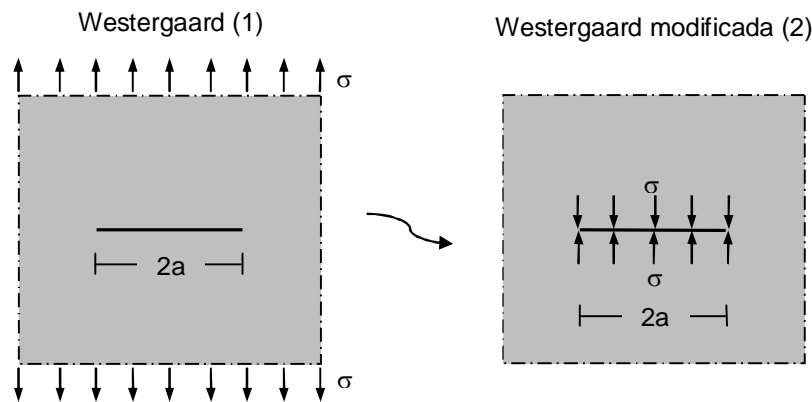


Figura 2.7 - Representação gráfica da função de tensão de Westergaard modificada

Para o caso particular de uma trinca horizontal com $a = 1$, a representação gráfica das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} para os modos I e II de trincamento é mostrada na Tabela 2.3.

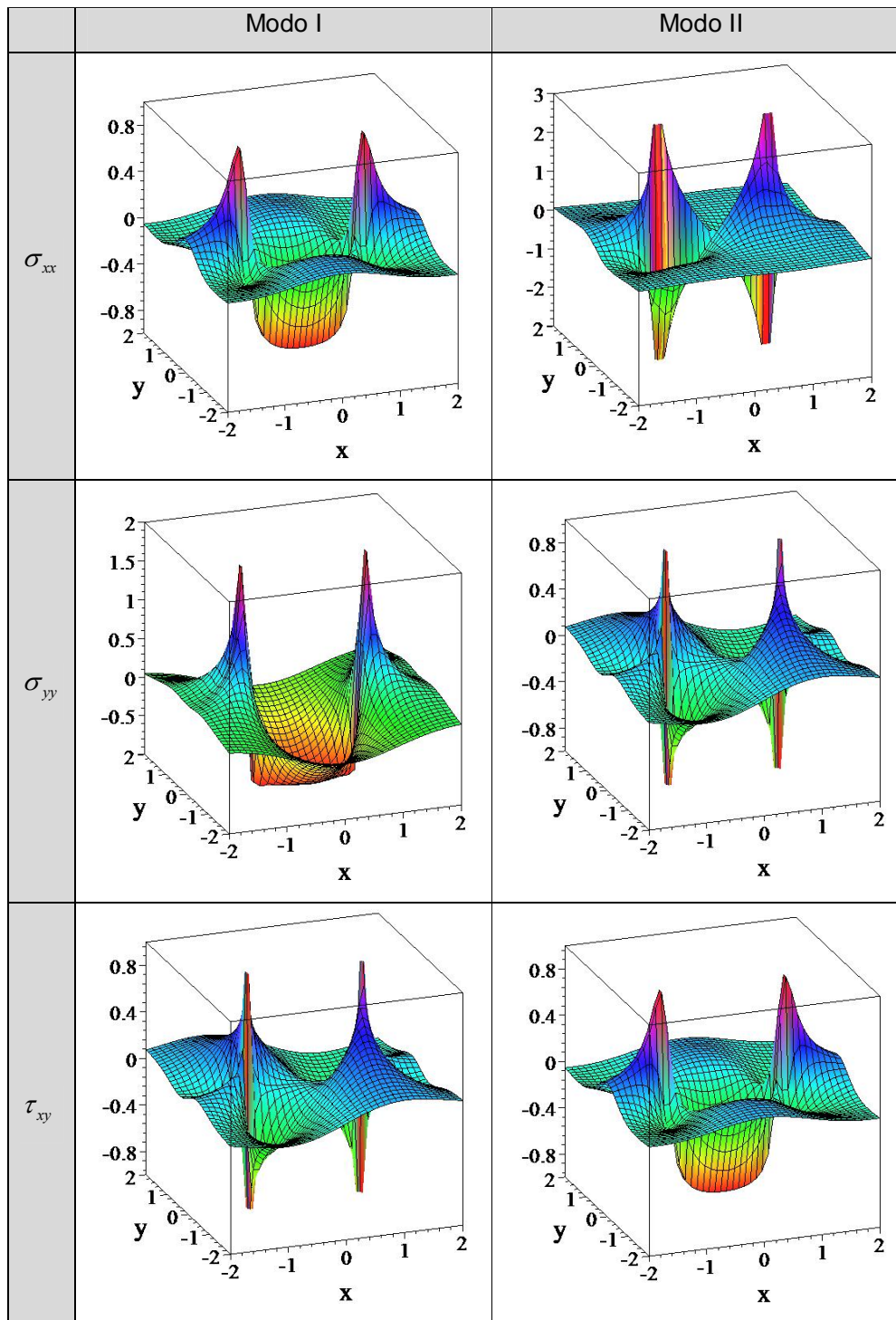


Tabela 2.3 - Representação gráfica das componentes de tensão σ_{ij} nos modos I e II de trincamento para o caso particular de $a = 1$

A função de tensão complexa de Westergaard modificada também permite calcular os deslocamentos, sendo estes para o modo I de trincamento:

$$\begin{aligned}
 u^I &= \frac{(1+\nu)}{E} [(1-2\nu)\Re(\phi^*_I) - y\Im(\phi_I)] \\
 v^I &= \frac{(1+\nu)}{E} [2(1-\nu)\Im(\phi^*_I) - y\Re(\phi_I)]
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

onde, ϕ^*_I é a integral da solução fundamental ϕ_I ; tal que $\phi^*_I = \int \phi_I dz$ ou $\phi_I = d(\phi^*_I)/dz$. ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de elasticidade.

Os deslocamentos para o modo II de trincamento estão dados por:

$$\begin{aligned}
 u^{II} &= \frac{(1+\nu)}{E} [2(1-\nu)\Re(\phi^*_{II}) - y\Im(\phi_{II})] \\
 v^{II} &= \frac{(1+\nu)}{E} [(1-2\nu)\Im(\phi^*_{II}) - y\Re(\phi_{II})]
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

cujos gráficos são mostrados na Tabela 2.4.

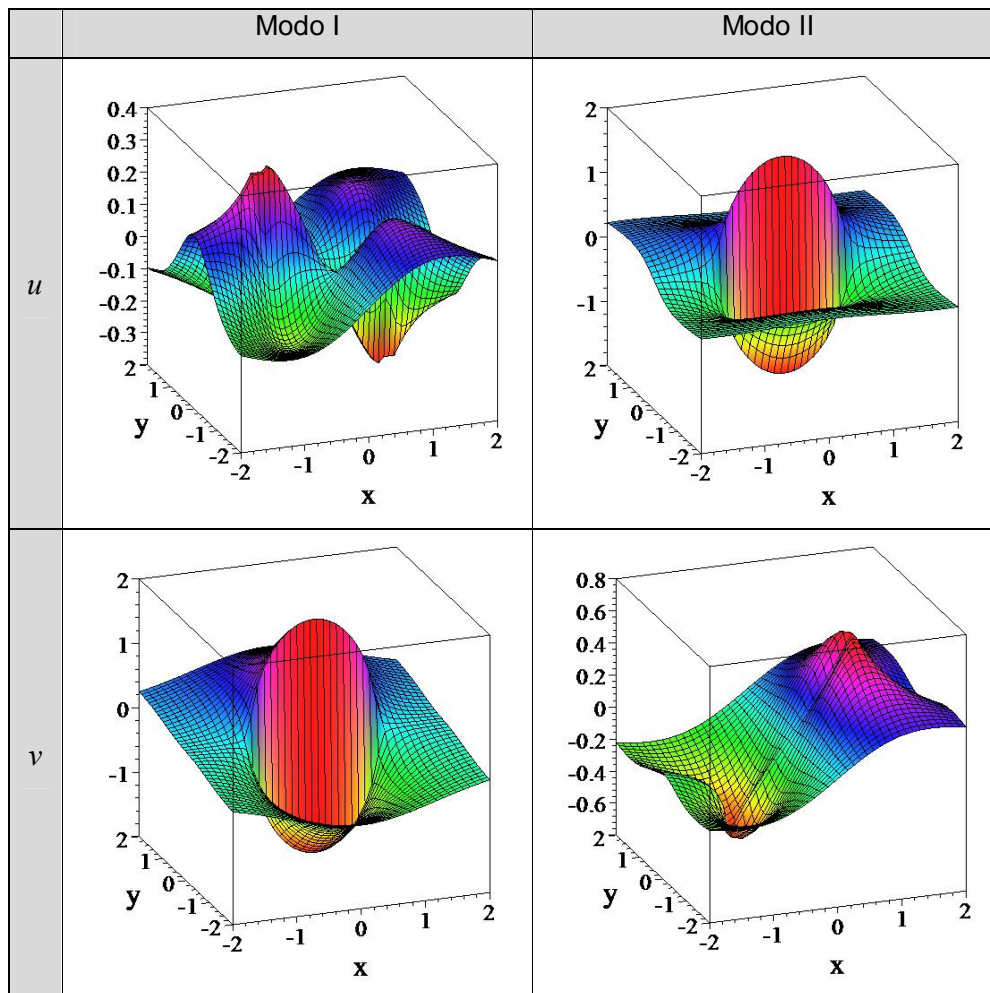


Tabela 2.4 - Representação gráfica das componentes de deslocamentos u e v nos modos I e II de trincamento para o caso particular de $a = 1$, $\nu = 0,30$ e $E = 1$

As particularizações para problemas de potencial são desenvolvidas no capítulo 4.

2.6. Integral J

O conceito de fator de intensidade de tensão é aplicável a materiais que tenham um comportamento global linearmente elástico, ou seja, nos casos onde a zona plástica é reduzida, ainda é possível utilizar K para quantificar o campo de tensões próximo à ponta da trinca. Se a zona plástica for elevada, outros conceitos como o da Integral J precisam ser utilizados para prever o comportamento estrutural de corpos trincados.

O conceito de integral J foi introduzido por Rice (1968), que propôs uma integral de linha, em torno da ponta de uma trinca, invariante para qualquer percurso utilizado, desde que se inicie na face inferior e termine na face superior da trinca. Como o caminho de integração é qualquer, pode-se evitar as regiões com deformações plásticas através da escolha adequada do percurso de integração, o que simplifica a análise.

A integral J é definida em relação a um eixo local de coordenadas cuja origem situa-se na ponta da trinca, como indicado na Figura 2.8. A expressão de J é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} \left(W \eta_x - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) d\Gamma \quad (2.36)$$

onde $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ é a energia de deformação, $T_i = \sigma_{ij} \eta_j$ são as componentes do vetor de forças de superfície, u_i representa o vetor de deslocamentos e η_i os cossenos diretores do caminho Γ_J .

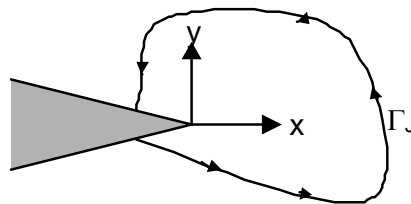


Figura 2.8 - Contorno arbitrário em torno da ponta de uma trinca

No caso de materiais lineares elásticos, a integral J é numericamente igual à taxa de dissipação de energia de deformação G e, portanto, se relaciona a K através da eq. (2.14).

Considerando a Figura 2.9, que representa um caminho de integração fechado, sem incluir a ponta da trinca, tem-se:

$$J^* = \int_{\Gamma^*} \left(W \eta_x - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) d\Gamma^* \quad (2.37)$$

Aplicando-se o teorema de Green, tem-se a expressão de J^* .

$$J^* = \int_{A^*} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right) dx dy \quad (2.38)$$

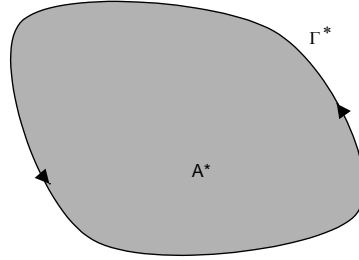


Figura 2.9 - Contorno fechado utilizado para cálculo da integral J

O primeiro termo do integrando da eq. (2.38) é dado por:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} \quad (2.39)$$

sendo:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{ji}}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.40)$$

como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, tem-se:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (2.41)$$

pela condição de equilíbrio tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.42)$$

logo:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (2.43)$$

Observando-se as eq. (2.43) e (2.38) conclui-se que a integral J , quando o caminho de integração utilizado Γ_J é fechado, é nula.