

### 3

## Análise de Sensibilidade de fluxos máximos multiterminal

Este capítulo apresentará a versão paramétrica do *problema de fluxo máximo multiterminal*, também chamada de *análise de sensibilidade de fluxos máximos multiterminal*. Esta consiste em estudar o comportamento do fluxo máximo entre todos os pares de nós de uma rede frente à variação de capacidade de uma aresta da rede. O primeiro a lançar um método de resolução para este problema foi Elmaghraby [4, 5].

### 3.1 Elmaghraby

Elmaghraby [4] mostrou a relação existente entre as arestas da árvore de cortes e as arestas da rede. Esta relação tem como base o teorema 2.

**Teorema 2 (Elmaghraby).** *Seja a rede  $G = (V, E)$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas, e  $CT$  a árvore de cortes de  $G$ . Se um corte mínimo arbitrário  $C$  de  $G$  contém uma aresta  $e = (i, j) \in E$  qualquer, então a aresta de  $CT$  correspondente a  $C$  pertence ao caminho único de  $CT$  que conecta as extremidades  $i$  e  $j$  da aresta  $e$ .*

A prova para este teorema é simples de ser verificada. Se a aresta de  $CT$  que corresponde a  $C$  puder ser encontrada fora do caminho que conecta as extremidades  $i$  e  $j$ , a remoção desta aresta em  $CT$  deixaria  $i$  e  $j$  em um mesmo componente conexo. Assim, esta remoção não representa um corte mínimo entre  $i$  e  $j$ , levando a uma contradição com a hipótese de que  $C$  contém  $e$ .

Seja a rede e sua árvore de cortes da Figura 3.1. A partir do teorema 2 pode-se relacionar os cortes mínimos de  $CT$  com as arestas de  $G$  que os compõem:  $C_1 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$ ,  $C_2 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4)\}$  e  $C_3 = \{(2, 3), (3, 4)\}$ .

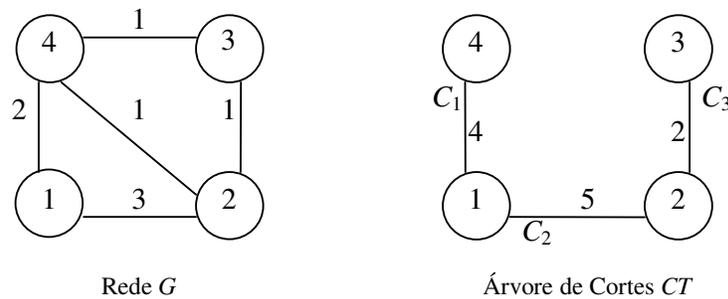


Figura 3.1: Rede e sua árvore de cortes nos quais será aplicado o teorema de Elmaghraby.

É importante ressaltar que o teorema só é válido para os cortes mínimos utilizados na construção da árvore de cortes. A aresta  $(1, 2)$  de  $G$ , por exemplo, poderia pertencer ao corte mínimo composto pelas arestas  $\{(1, 4), (1, 2)\}$ , que separa a rede em  $X = \{1\}$  e  $\bar{X} = \{2, 3, 4\}$ . Se o algoritmo utilizasse este corte mínimo, a árvore de cortes seria provavelmente diferente.

Com base nesta relação entre as arestas da árvore de cortes e as arestas da rede, Elmaghraby [5] descreveu um método para analisar a influência nos fluxos máximos entre todos os pares de nós quando a capacidade de uma aresta da rede decresce linearmente.

O problema resolvido por Elmaghraby pode ser sintetizado como:

**Problema 1.** *Seja uma rede  $G = (V, E)$  com a aresta  $e = (i, j) \in E$  possuindo capacidade  $c(e) = \bar{c} - \varepsilon$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \bar{c}$ , sendo  $\bar{c}$  a capacidade inicial. O objetivo é determinar o fluxo máximo entre todos os pares de nós para todos os valores do parâmetro  $\varepsilon$ .*

Para cada par de vértices da rede, o valor do fluxo máximo entre eles, frente ao decrescimento de  $c(e)$ , se comporta dentro das três seguintes possibilidades:

1. Permanece constante para todo valor de  $c(e)$ . Isto ocorre quando, para qualquer valor de  $c(e)$ ,  $e$  não pertence a um corte mínimo entre o par de vértices.

2. Varia linearmente com  $c(e)$ . Isto é válido para, quando  $\varepsilon = 0$ , um corte mínimo que separa o par de vértices contém a aresta  $e$ . No caso de  $\bar{c} = \infty$ , o par  $\{i, j\}$  é o único que se encontra nesta possibilidade.
3. Permanece constante até um dado valor  $c^*(e)$  de  $c(e)$ , quando então começa a variar linearmente com  $c(e)$ . A partir de  $c^*(e)$ , a aresta  $e$  está contida nos cortes mínimos que separam o par de vértices.

**Definição 23.** Um valor  $c^*(e)$  de  $c(e)$  que satisfaça o item 3 acima, em pelo menos, um fluxo máximo, é chamado de **capacidade crítica**.

Elmaghraby observa que, no intervalo entre duas capacidades críticas, nenhum fluxo máximo muda de comportamento, ou seja, só ocorrem as possibilidades dos itens 1 e 2 acima. O estudo da *análise de sensibilidade de fluxos máximos multiterminais* passa a ser, então, determinar todas as capacidades críticas, uma vez que, em cada intervalo, a construção de uma árvore de cortes fornece os fluxos máximos desejados.

O processo para se obter as capacidades críticas ocorre da seguinte maneira: primeiramente, é computada uma árvore de cortes com o parâmetro  $\varepsilon = 0$ . Utilizando o teorema 2, é identificado, na árvore de cortes, um conjunto  $C$  dos cortes mínimos que contém a aresta parametrizada  $e$ , e o seu conjunto complementar  $\bar{C}$ . A primeira capacidade crítica  $\lambda_0$  será o menor valor do parâmetro  $\varepsilon$  para o qual um corte mínimo se desloca do conjunto  $\bar{C}$  para o  $C$ . De posse de  $\lambda_0$ , com o intuito de calcular a segunda capacidade crítica, diminui-se a capacidade inicial  $\bar{c}$  de  $e$  em  $G$  pelo valor de  $\lambda_0$  e repete-se o procedimento com esta nova capacidade. O método termina quando a capacidade da aresta  $e$  é zero ( $\varepsilon = \bar{c}$ ).

Desta forma, pelo algoritmo de Elmaghraby, é necessário calcular uma árvore de cortes para se obter cada capacidade crítica.

Para o caso em que a capacidade da aresta paramétrica cresce, Elmaghraby propôs definir um valor grande para a capacidade inicial e realizar o processo inverso, decrescendo a capacidade e calculando as capacidades críticas pelo procedimento já exposto.

Diallo e Hamacher [18] demonstraram que a matriz utilizada por Elmaghraby para relacionar as arestas da rede com as arestas da árvore de cortes (teorema 2) pode falhar em fornecer todos os cortes mínimos que contenham a aresta paramétrica. Eles criaram um contra exemplo e complementaram o método de Elmaghraby com um simples algoritmo que testa se um corte mínimo entre um par de nós contém, ou não, uma dada aresta.

### 3.2

#### Determinando capacidades críticas com duas árvores de cortes

Enquanto que em Elmaghraby é necessário calcular uma árvore de cortes para se obter cada capacidade crítica, Berthomé *et al.* [2] e Diallo [14] demonstraram que, com apenas duas árvores de cortes, é possível determinar todas as capacidades críticas, tanto para o caso de decrescimento como para o de crescimento da capacidade da aresta paramétrica.

Para chegar a este resultado, forneceram, primeiramente, um método para se obter a capacidade crítica no que concerne a somente um fluxo máximo, quando a aresta paramétrica varia de zero a infinito.

Seja  $G = (V, E)$  uma rede com dois vértices  $s$  e  $t$ , respectivamente a origem e o destino. Seja uma aresta única  $e = (i, j)$  com capacidade  $c(e) = \lambda$  que varia de acordo com o parâmetro  $\lambda \geq 0$ . Define-se  $f_{s,t}(\lambda)$  como o valor do fluxo máximo entre  $s$  e  $t$  quando a capacidade da aresta  $e$  é  $\lambda$ . Denota-se:

- $f_{s,t}^0$  (ou simplesmente  $f^0$ ) o valor do fluxo máximo  $f_{s,t}(0)$ , ou seja, quando a aresta  $e$  é removida da rede,
- $f_{s,t}^\infty$  (ou simplesmente  $f^\infty$ ) o  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{s,t}(\lambda)$ , ou seja, o valor do fluxo máximo quando não há restrição de capacidade em  $e$ . Este valor é finito para todos os pares  $\{s, t\}$ , exceto quando  $s = i$  e  $t = j$ .

Calcular  $f_{s,t}^\infty$  pode ser facilmente executado marcando a aresta  $e$  com o valor máximo entre a soma das capacidades das arestas incidentes ao nó  $i$  e a soma das capacidades das arestas incidentes ao nó  $j$ .

O comportamento de um fluxo máximo  $f_{s,t}(\lambda)$ , para qualquer par  $\{s, t\}$ , frente à variação de  $\lambda$ , ocorre dentro dos seguintes casos:

- a) Temporariamente sensível à variação de  $c(e)$ . Quando a capacidade  $\lambda$  varia de 0 até  $\lambda^*$ , o fluxo máximo cresce proporcionalmente. Neste estágio, a aresta  $e$  está contida em um corte mínimo que separa  $s$  e  $t$ . A partir de  $\lambda^*$ , o fluxo máximo permanece insensível ao aumento de  $\lambda$ . Neste momento, a aresta  $e$  não pertence a qualquer corte mínimo que separa  $s$  e  $t$ . Logo,  $\lambda^*$  é a capacidade crítica deste fluxo máximo. A Figura 3.2 ilustra este comportamento.

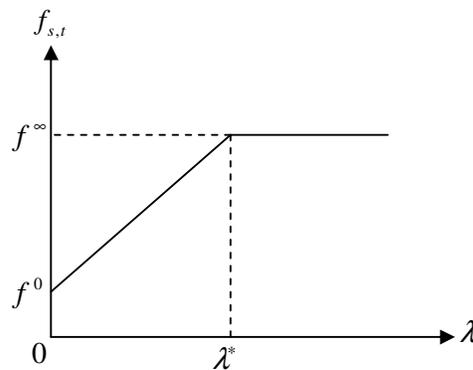


Figura 3.2: Comportamento de um fluxo máximo temporariamente sensível à variação de  $\lambda$ .

- b) Sensível à variação de  $c(e)$ . Este caso só ocorre quando  $\{s, t\} = \{i, j\}$ , pois, por definição, a aresta  $e$  sempre pertencerá a um corte mínimo que separa o par de vértices, e, desta forma, o fluxo máximo será sempre influenciado pela variação de  $\lambda$ . Logo  $f_{i,j} \rightarrow \infty$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . A Figura 3.3 ilustra este comportamento.

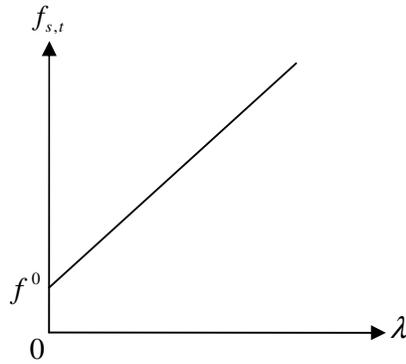


Figura 3.3: Comportamento de um fluxo máximo sensível à variação de  $\lambda$ .

- c) Insensível à variação de  $c(e)$ . A variação de  $\lambda$ , para qualquer valor, não influencia o fluxo máximo entre  $s$  e  $t$ . A aresta  $e$ , neste caso, não pertence, em instante algum, a um corte mínimo (s-t). A Figura 3.4 ilustra este comportamento em que  $f^0 = f^\infty$ .

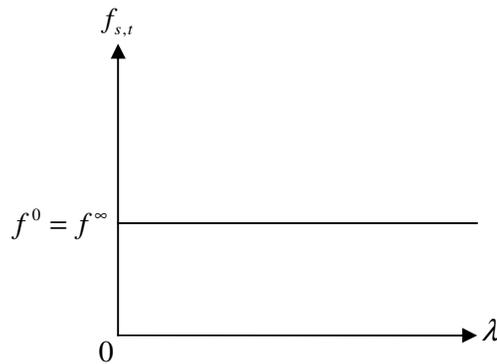


Figura 3.4: Comportamento de um fluxo máximo insensível à variação de  $\lambda$ .

Com estas observações, Berthomé *et al.* e Diallo chegaram às seguintes conclusões:

**Lema 1.** *Seja uma rede  $G = (V, E)$  e uma aresta  $e = (i, j) \in E$  com capacidade paramétrica  $\lambda \geq 0$ . Sejam  $p$  e  $q$  dois vértices de  $G$ . A capacidade crítica  $\lambda_{p,q}^*$  existe se  $\{p, q\} \neq \{i, j\}$ , e satisfaz a:*

$$\lambda_{p,q}^* = f_{p,q}^\infty - f_{p,q}^0. \quad (1)$$

**Demonstração:** Isto é uma consequência direta do comportamento do valor do fluxo máximo em função da variação de  $\lambda$ . Ele cresce linearmente de  $f_{p,q}^0$  a  $f_{p,q}^\infty$ , e, portanto, o ponto de parada é quando a capacidade se iguala a  $f_{p,q}^\infty - f_{p,q}^0$ .  $\square$

**Corolário 1.** *A capacidade crítica  $\lambda^*$  de  $\lambda$  para um fluxo máximo arbitrário pode ser calculada executando-se apenas dois algoritmos de fluxo máximo.*

**Demonstração:** Utilizando o Lema 1, pode-se deduzir que somente  $f^0$  e  $f^\infty$  são necessários para calcular  $\lambda^*$ . E ainda, a fim de calcular  $f^\infty$ , o resultado de  $f^0$  pode ser usado como valor inicial.  $\square$

**Corolário 2.** *Seja uma rede  $G = (V, E)$  e uma aresta  $e = (i, j) \in E$  com capacidade paramétrica  $\lambda \geq 0$ . Sejam  $s$  e  $t$  dois vértices de  $G$ . O valor do fluxo máximo  $f_{s,t}(\lambda)$  é:*

$$f_{s,t}(\lambda) = \begin{cases} f_{s,t}^0 + \lambda & \text{se } \lambda < f_{s,t}^\infty - f_{s,t}^0 \\ f_{s,t}^\infty & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

consequentemente:

$$f_{s,t}(\lambda) = \min(f_{s,t}^0 + \lambda, f_{s,t}^\infty). \quad (3)$$

Utilizando este resultado, lançaram o seguinte teorema referente à *análise dos fluxos máximos multiterminais*:

**Teorema 3.** *Seja  $G = (V, E)$  uma rede com  $n$  nós. Se apenas a capacidade de uma única aresta puder variar, então, o conjunto de todas as capacidades críticas pode ser calculado utilizando duas árvores de cortes seguidas de  $O(n^2)$  operações.*

**Demonstração:** Duas observações importantes compõem esta demonstração.

1. Para um par de vértices  $s$  e  $t$  de uma rede, o Lema 1 fornece um modo simples de calcular a capacidade crítica (única) se soubermos os valores dos fluxos máximos  $f_{s,t}^0$  e  $f_{s,t}^\infty$ .
2. O algoritmo de Gomory e Hu fornece um modo eficiente de calcular os fluxos máximos entre todos os pares de nós.

Desta forma, o resultado esperado pode ser obtido calculando-se, seguidamente, uma árvore de cortes de Gomory e Hu na ausência da aresta paramétrica  $e$ , obtendo-se assim todos os  $f_{s,t}^0, \forall s,t \in V$ , e uma segunda árvore de cortes com  $c(e) = \infty$ . Esta última fornece todos os  $f_{s,t}^\infty, \forall s,t \in V$ . De posse destes dois valores de fluxo máximo, é possível, utilizando-se o Lema 1, determinar todas as capacidades críticas calculando e classificando crescentemente as diferenças

$$f_{s,t}^\infty - f_{s,t}^0, \forall s,t \in V.$$

Este último passo considera  $n(n-1)$  pares de vértices, adicionando-se, então,  $O(n^2)$  operações ao algoritmo.  $\square$

Observe que não importa se a variação de  $e$  é crescente ou decrescente. Uma vez executado o método, ou algoritmo, os valores críticos para os dois tipos de caso podem ser obtidos.

### 3.2.1 Generalizando para várias capacidades paramétricas

Berthomé *et al.* [2] e Diallo [14] expandiram o resultado mencionado para o caso em que várias arestas de uma rede possuem capacidade paramétrica. Este problema é conhecido como *fluxos paramétricos em rede multiterminal*. Os autores analisaram a situação em que as capacidades de duas arestas variam independentemente e generalizaram para o caso em que  $k$  arestas de uma rede possuem capacidade paramétrica.

Para uma rede  $G = (V, E)$  com duas arestas distintas  $e_1$  e  $e_2$ , sendo  $\lambda$  e  $\mu$  suas respectivas capacidades paramétricas, onde  $\lambda, \mu \geq 0$ , o valor do fluxo máximo entre quaisquer dois vértices  $s$  e  $t$  de  $G$  quando  $\lambda$  e  $\mu$  variam é:

$$f_{s,t}(\lambda, \mu) = \min(f_{s,t}^{0,0} + \mu + \lambda, f_{s,t}^{0,\infty} + \lambda, f_{s,t}^{\infty,0} + \mu, f_{s,t}^{\infty,\infty}).$$

Por  $f_{s,t}^{0,0}$  entende-se o valor do fluxo máximo entre  $s$  e  $t$  quando as arestas  $e_1$  e  $e_2$  são removidas da rede. Os fluxos  $f_{s,t}^{0,\infty}$ ,  $f_{s,t}^{\infty,0}$  e  $f_{s,t}^{\infty,\infty}$  são, respectivamente,  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} f_{s,t}(0, \mu)$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{s,t}(\lambda, 0)$  e  $\lim_{\mu \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow \infty} f_{s,t}(\lambda, \mu)$ .

Quatro execuções do algoritmo de fluxo máximo são suficientes para determinar todos os valores de fluxo máximo, entre um par de vértices, quando duas arestas variam. De forma análoga, quatro árvores de cortes são suficientes para se determinar todos os valores de fluxo máximo entre todos os pares de vértices de uma rede, quando  $e_1$  e  $e_2$  variam.

Para o caso geral, em que  $k$  arestas de uma rede possuem capacidade paramétrica, Berthomé *et al.* e Diallo concluíram que  $2^k$  computações de árvores de cortes são suficientes para se obter o valor do fluxo máximo entre quaisquer par de vértices da rede.

Detalhes e demonstrações da generalização e do caso em que duas arestas variam em uma rede podem ser encontrados nas referências mencionadas. Exemplos de implementações da teoria da análise de sensibilidade podem ser encontrados em Berthomé *et al.* [1].

### 3.3 Computação de Árvores de Cortes

Com o objetivo de diminuir a complexidade dos algoritmos que necessitam calcular duas ou mais árvores de cortes em sequência, Barth *et al.* [23] mostraram como utilizar as informações de uma árvore de cortes já computada para construir a seguinte.

Para uma rede que possui apenas uma aresta com capacidade paramétrica, a variação desta capacidade pode não influenciar o valor dos fluxos máximos (e dos cortes mínimos) para vários pares de vértices.

**Lema 2.** *Seja  $G$  uma rede com  $n$  vértices e  $e = (i, j)$  uma aresta de  $G$  tal que  $c(e) = \lambda$ . Seja  $s$  e  $t$  um par de vértices de  $G$ . Seja  $CT^\alpha$  uma árvore de cortes quando  $c(e) = \alpha$ . Se o caminho  $P_{s,t}$  em  $CT^\alpha$  não possui aresta em comum com  $P_{i,j}$ , então  $f_{s,t}^\lambda = f_{s,t}^\alpha, \forall \lambda > \alpha \geq 0$ .*

**Demonstração:** Utilizando a propriedade de corte da árvore de cortes, existe um corte mínimo  $C_{s,t}^\alpha$  separando  $s$  e  $t$  em que ambos os vértices  $i$  e  $j$  ( $e = (i, j)$ ) se encontram no mesmo lado do corte mínimo. Conseqüentemente, o corte não contém  $e$  para  $\lambda > \alpha$ , e é insensível à variação de  $\lambda$ .  $\square$

Para as próximas inferências, a seguinte definição se faz necessária:

**Definição 24.** *Seja  $G = (V, E)$  uma rede conexa e acíclica, ou seja, uma árvore. Seja  $i$  e  $j$  um par de vértices de  $G$  e  $P_{i,j}$  o (único) caminho entre eles. Seja  $x_a$  um vértice de  $P_{i,j}$  e  $y_a^b, 0 \leq b < w_a$ , os vizinhos de  $x_a$  não contidos em  $P_{i,j}$ , onde  $w_a$  é o número total de vizinhos de  $x_a$ . Para qualquer  $y_a^b$ , seja  $T_a^b$  a maior subárvore de  $G$  enraizada em  $y_a^b$  não contendo  $x_a$ . O conjunto das árvores  $T_a^b$  é chamado de **floresta decomposta - (i, j)** de  $G$ , simbolizado por  $F_{i,j}$ .*

A Figura 3.5 ilustra a Definição 24. Utilizando a nomenclatura,  $x_i, x_3$  e  $x_j$  são os nós do caminho  $P_{i,j}$  na árvore  $G$ . Conseqüentemente o nó 4 é  $y_i^0$ , o nó 7 é  $y_j^0$  e os nós 1 e 2 são respectivamente  $y_3^0$  e  $y_3^1$ .

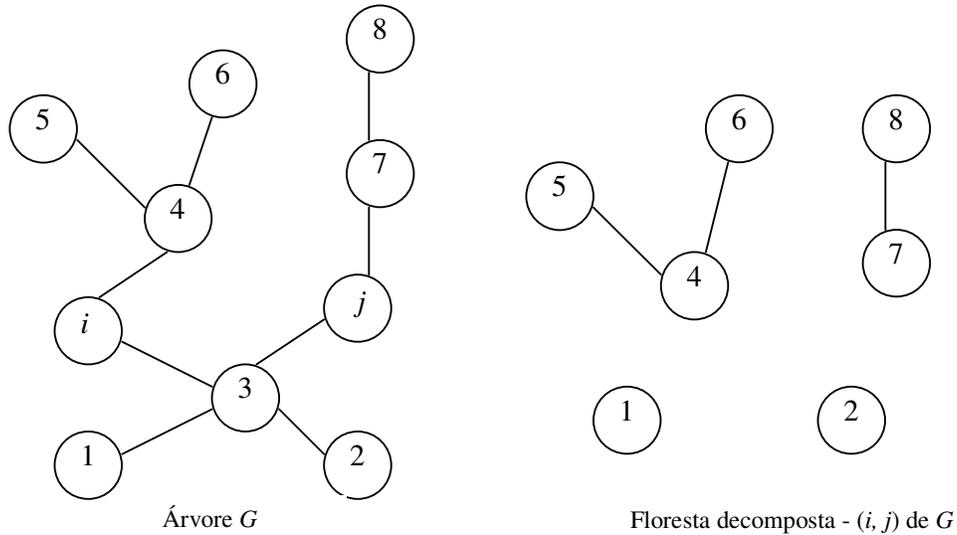


Figura 3.5: Ilustração de uma árvore  $G$  e sua floresta decomposta- $(i, j)$ .

**Lema 3.** *Seja  $G$  uma rede com uma aresta de capacidade paramétrica  $e = (i, j)$ . Seja  $CT^\alpha$  a árvore de cortes quando  $c(e) = \alpha$ . Seja  $F_{i,j}$  a floresta decomposta -  $(i, j)$  de  $CT^\alpha$ . Para cada árvore  $T_a^b \in F_{i,j}$ , existe uma árvore de cortes de  $G$  com  $c(e) = \lambda > \alpha$  que contém  $T_a^b$  como subárvore.*

O Lema 3 pode ser demonstrado realizando o algoritmo de Gomory e Hu da seguinte forma. Primeiramente, seja  $s_1 = x_a$  e  $t_1 = y_a^b$  pertencendo ao mesmo super nó. O caminho  $P_{s_1, t_1}$  em  $CT^\alpha$ , reduzido a aresta  $(x_a, y_a^b)$ , não possui aresta em comum com  $P_{i,j}$ . Assim, com base no Lema 2, o corte mínimo entre  $s_1$  e  $t_1$  pode ser obtido de  $CT^\alpha$ . A partir desta escolha, os super nós resultantes são  $SV_1$  com todos os elementos de  $T_a^b$  e  $SV_2$  com os outros elementos da rede. Continuando o algoritmo de Gomory e Hu para o super nó  $SV_1$  e sempre obtendo os cortes mínimos de  $CT^\alpha$ , ao final, teremos reconstruído toda a estrutura de  $T_a^b$ . Detalhes da demonstração em Barth *et al.* [23].

A Figura 3.6 exemplifica o Lema 3.

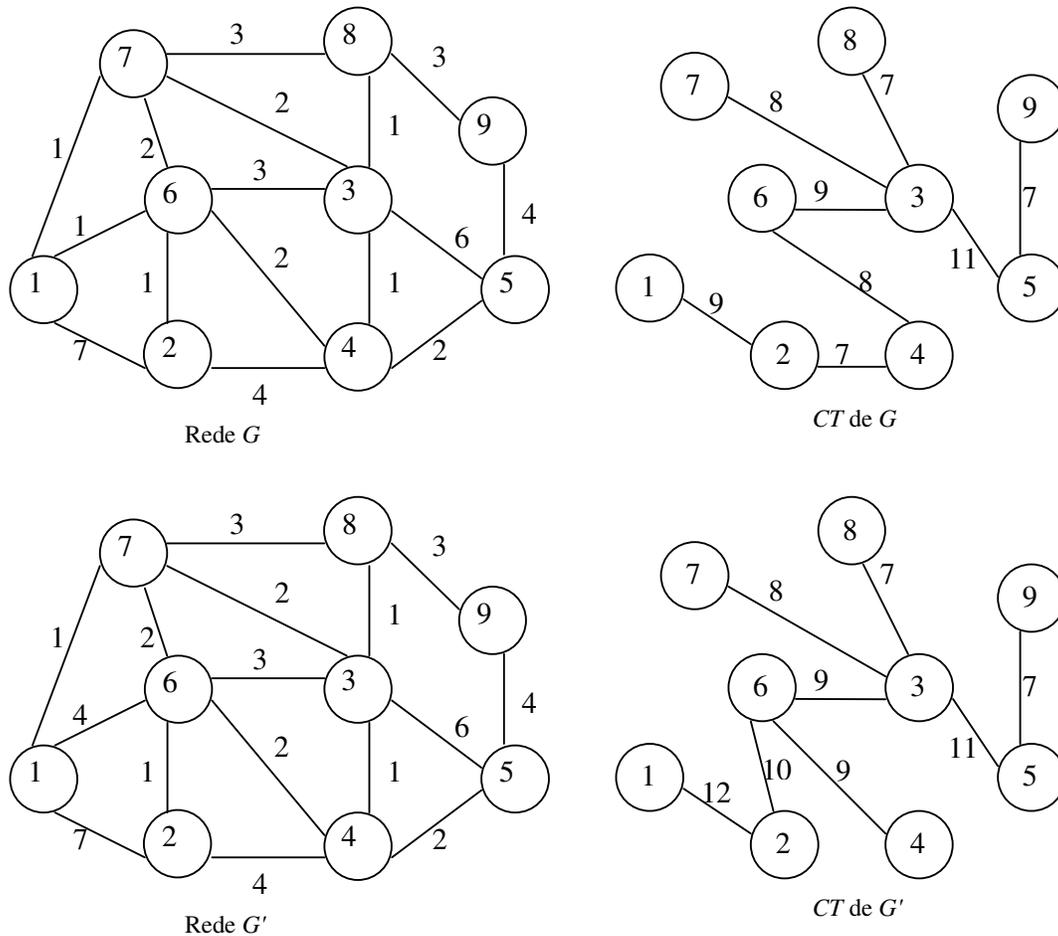


Figura 3.6: Exemplo do Lema 3. Aresta (1, 6) variou de capacidade.

**Teorema 4.** *Seja  $G$  uma rede com uma aresta  $e = (i, j)$  de capacidade paramétrica  $c(e) = \lambda$ . Seja  $CT^\alpha$  uma árvore de cortes obtida quando  $c(e) = \alpha$ . Seja  $P_{i,j}$  o caminho entre  $i$  e  $j$  em  $CT^\alpha$ . Para  $\lambda > \alpha$  é suficiente calcular  $|P_{i,j}| - 1$  cortes mínimos em  $G^\lambda$  a fim de obter a árvore de cortes  $CT^\lambda$ .*

A demonstração do teorema 4 está baseada no algoritmo de Gomory e Hu. O ponto principal é escolher os nós  $s$  e  $t$  durante o algoritmo de forma a reconstruir, em primeiro lugar, de acordo com o Lema 3, todas as  $T_a^b$ , sem executar, sequer, um algoritmo de corte mínimo. Neste momento, a árvore intermediária encontra-se estruturada com um super nó composto por todos os elementos do caminho  $P_{i,j}$  ao qual todas as subárvores  $T_a^b$  estão conectadas. A

partir deste ponto, o algoritmo de Gomory e Hu processará normalmente, executando, então,  $|P_{i,j}| - 1$  cortes mínimos.

Uma extensão ao teorema 4 de Barth *et al.* [23], para o caso de várias arestas de capacidades paramétricas, é apresentada neste trabalho pelo teorema 5.

**Teorema 5.** *Seja  $CT$  uma árvore de cortes de uma rede  $G = (V, E)$ . Seja  $P$  uma subárvore de  $CT$ . Seja  $E'$  um conjunto de arestas não contidas em  $E$ , mas com extremidades em  $P$ . Para se obter uma árvore de cortes  $CT'$  de  $G' = (V, E \cup E')$ , é suficiente calcular  $|P| - 1$  cortes mínimos em  $G'$ , sendo  $|P|$  é o número de vértices da subárvore.*

**Demonstração:** Duas observações importantes compõem esta demonstração.

1. Afirmar que uma dada aresta não está contida em uma rede, equivale a afirmar que esta aresta está contida na rede e possui capacidade nula. Portanto, adicionar arestas a uma rede é o caso de variação crescente de capacidade.
2. De acordo com o Lema 2 de Barth *et al.* (2006), a variação crescente das arestas  $E'$  não terá influência na árvore de cortes  $CT$ , exceto para a subárvore  $P$ .

Assim, de forma análoga ao teorema 4 de Barth *et al.* (2006), são suficientes  $|P| - 1$  cálculos de corte mínimo em  $G'$  para se obter  $CT'$ .  $\square$

Para os algoritmos que geram uma árvore de cortes a partir de informações de uma existente, esse estudo apenas considera o caso em que a capacidade das arestas cresce. Caso contrário, o problema se torna mais complicado, exigindo um estudo *à la* Elmaghraby.

Os teoremas 4 e 5 formam a idéia central do algoritmo proposto neste trabalho.